

761103P Sähkö- ja magnetismioppi

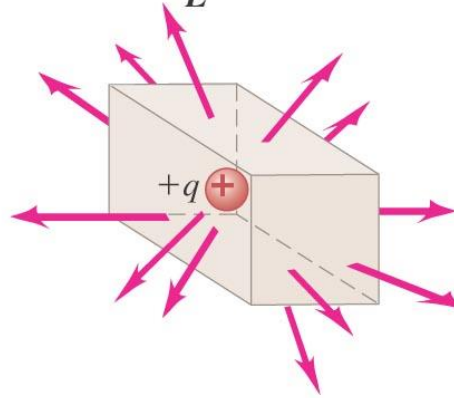
Gaussin laki ja sen sovelluksia

ESIMERKKEJÄ

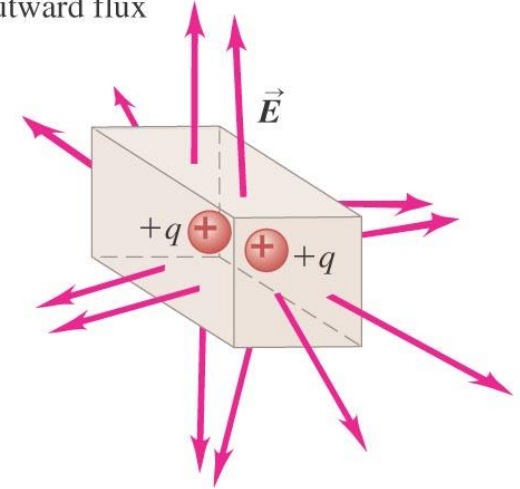
Gaussin laki: perusidea

Gaussin laki on yhteys suljetun kuvitteellisen pinnan läpi menevän sähköisen vuon ja pinnan sisällä olevan kokonaisvarauksen välillä.

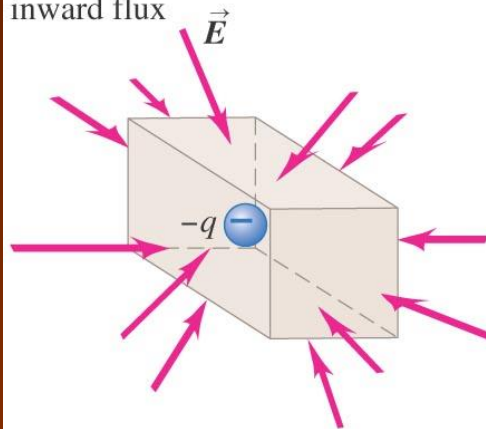
(a) Positive charge inside box, outward flux \vec{E}



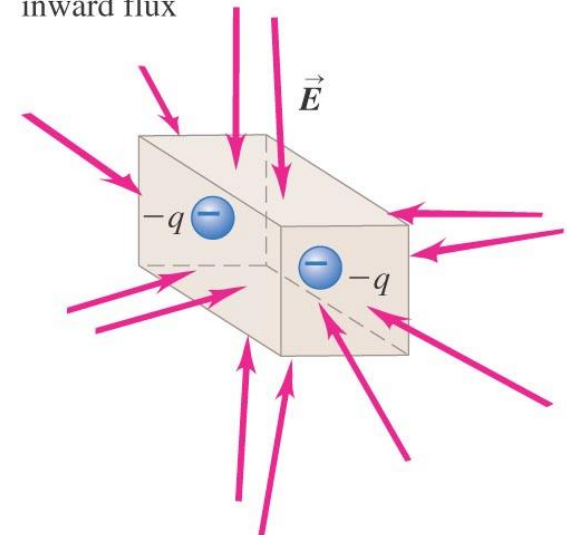
(b) Positive charges inside box, outward flux \vec{E}



(c) Negative charge inside box, inward flux \vec{E}



(d) Negative charges inside box, inward flux \vec{E}



Sähköinen vuo

- Määritellään *sähköinen vuo* pinnan (pinta-ala A) läpi kaavalla

$$\Phi_E = E_{\perp} A$$

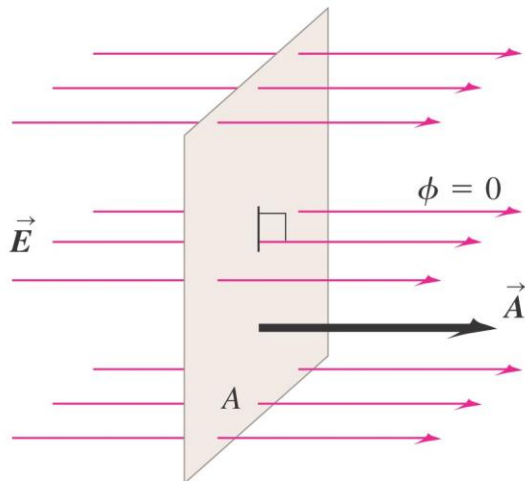
missä E_{\perp} on pinnan normaalin suuntainen sähkökenttäkomponentti.

- Mikäli sähkökentän ja pinnan normaalin välinen kulma on ϕ , on vuo

$$\Phi_E = EA \cos \phi = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

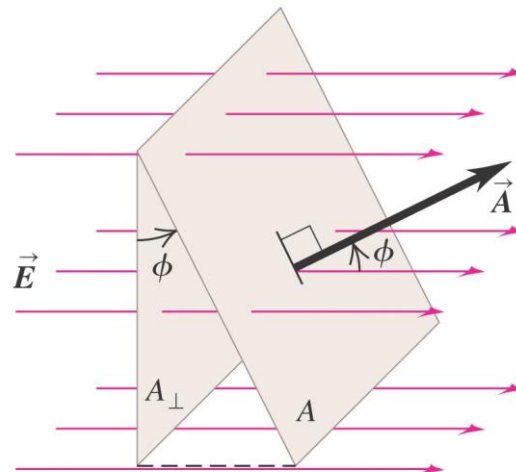
(a) Surface is face-on to electric field:

- \vec{E} and \vec{A} are parallel (the angle between \vec{E} and \vec{A} is $\phi = 0$).
- The flux $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$.



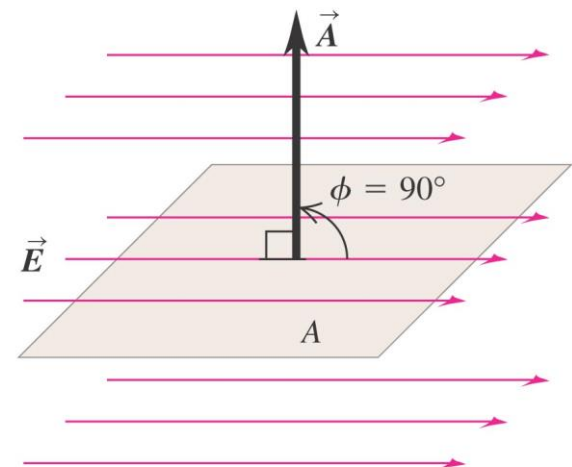
(b) Surface is tilted from a face-on orientation by an angle ϕ :

- The angle between \vec{E} and \vec{A} is ϕ .
- The flux $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$.



(c) Surface is edge-on to electric field:

- \vec{E} and \vec{A} are perpendicular (the angle between \vec{E} and \vec{A} is $\phi = 90^\circ$).
- The flux $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90^\circ = 0$.



ESIMERKKEJÄ

Gaussin laki: matemaattisesti

- Tarkastellaan pistevarausta, jonka sähkökenttä on radiaalinen:

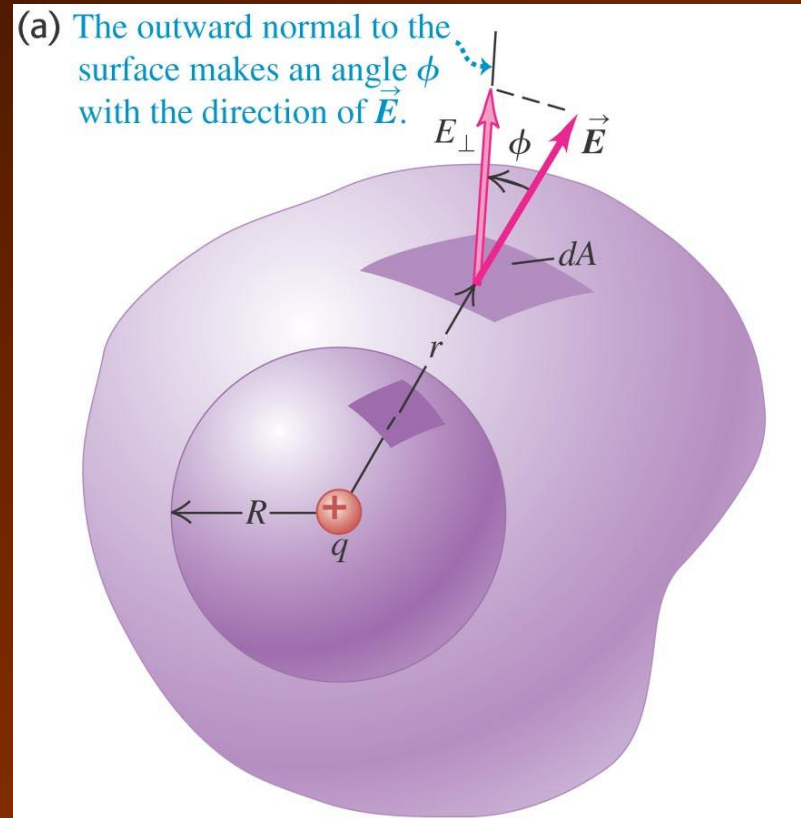
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

- Kuvitteellisen R-säteisen pallopinnan läpi menee nyt sähköinen vuo:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$$

$$\Phi_E = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \right) 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- Selvästi tämä sama vuo ("kenttäviivojen lkm") menee läpi myös minkä tahansa muun muotoisesta suljetusta pinnasta, joka ympäröi pallon!!



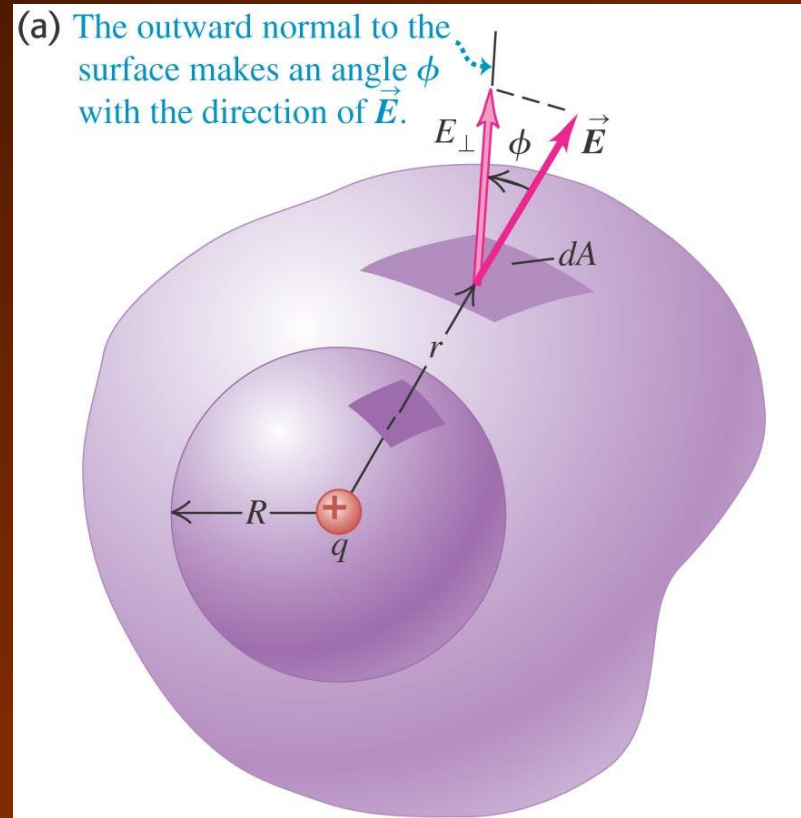
Gaussin laki: matemaattisesti

- Saamme Gaussin lain matemaattisen muodon:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Integraali tarkoittaa sähköistä kokonaisvuota *kuvitteellisen suljetun pinnan läpi* (ns. *Gaussin pinta*).
- Q on tämän pinnan sisäpuolella oleva kokonaisvaraus.

ESIMERKKEJÄ



Gaussin lain soveltaminen

- Monesti Gaussin lailla halutaan laskea makroskooppisten kappaleiden sähkökenttä
- Tällöin tarkoituksena on pystyä kirjoittamaan Gaussin laki ja erityisesti vasen puoli (sähkövuo) aluksi muotoon

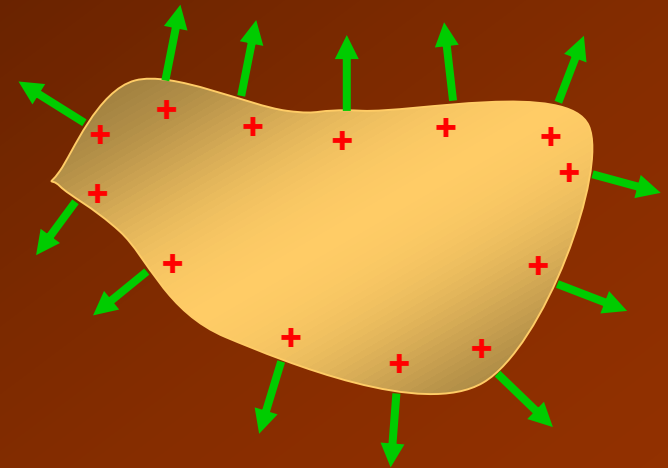
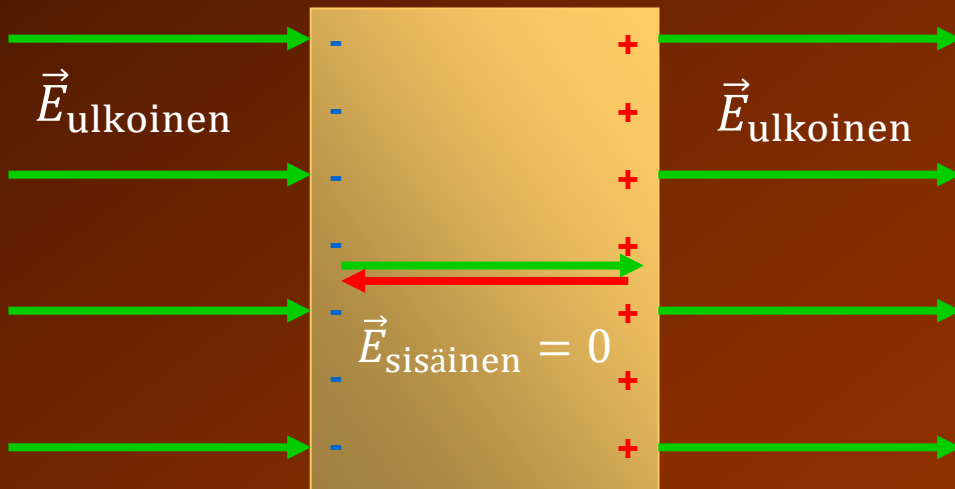
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Tällöin voidaan ratkaista sähkökentän voimakkuus.
 - Sähkökentän suunta määräytyy systeemin geometriasta!
1. Mieti tutkittavan systeemin geometria. Miltä sähkökenttä näyttää? Piirrä kuva!
 2. Pyri valitsemaan Gaussin integrointipinta niin, että sähkökentän suuruus on pinnalla vakio ja pinnan normaali on sähkökentän suuntainen.
 3. Kirjoita Gaussin laki ja ratkaise sähkökenttä!

ESIMERKKEJÄ

Sähkökenttä johteen sisällä

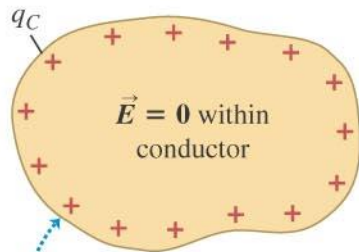
- Kun johdekappale laitetaan sähkökenttään, varauksen kuljettajat liikkuvat *kappaleen pinnalle* sellaiseen asentoon, että johdekappaleen sisällä sähkökenttä häviää (staattisessa tilanteessa)!
- Johdekappaleen pinnalla sähkökenttä on kohtisuorassa pintaa vastaan!



Sähkövaraukset johteessa

- Jos johdekappaleeseen tuodaan *ylimääräistä* varausta se asettuu kappaleen pinnalle.
- Gaussin lain perusteella tällöin sähkökenttä johteen sisällä häviää *sähköstaattisessa tilanteessa* (eli silloin kun tilanne ei enää muutu ajallisesti)

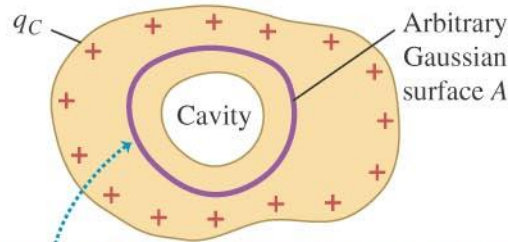
(a) Solid conductor with charge q_C



The charge q_C resides entirely on the surface of the conductor. The situation is electrostatic, so $\vec{E} = 0$ within the conductor.

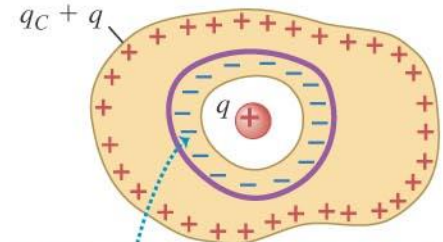
Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

(b) The same conductor with an internal cavity



Because $\vec{E} = 0$ at all points within the conductor, the electric field at all points on the Gaussian surface must be zero.

(c) An isolated charge q placed in the cavity



For \vec{E} to be zero at all points on the Gaussian surface, the surface of the cavity must have a total charge $-q$.