

761103P Sähkö- ja magnetismioppi

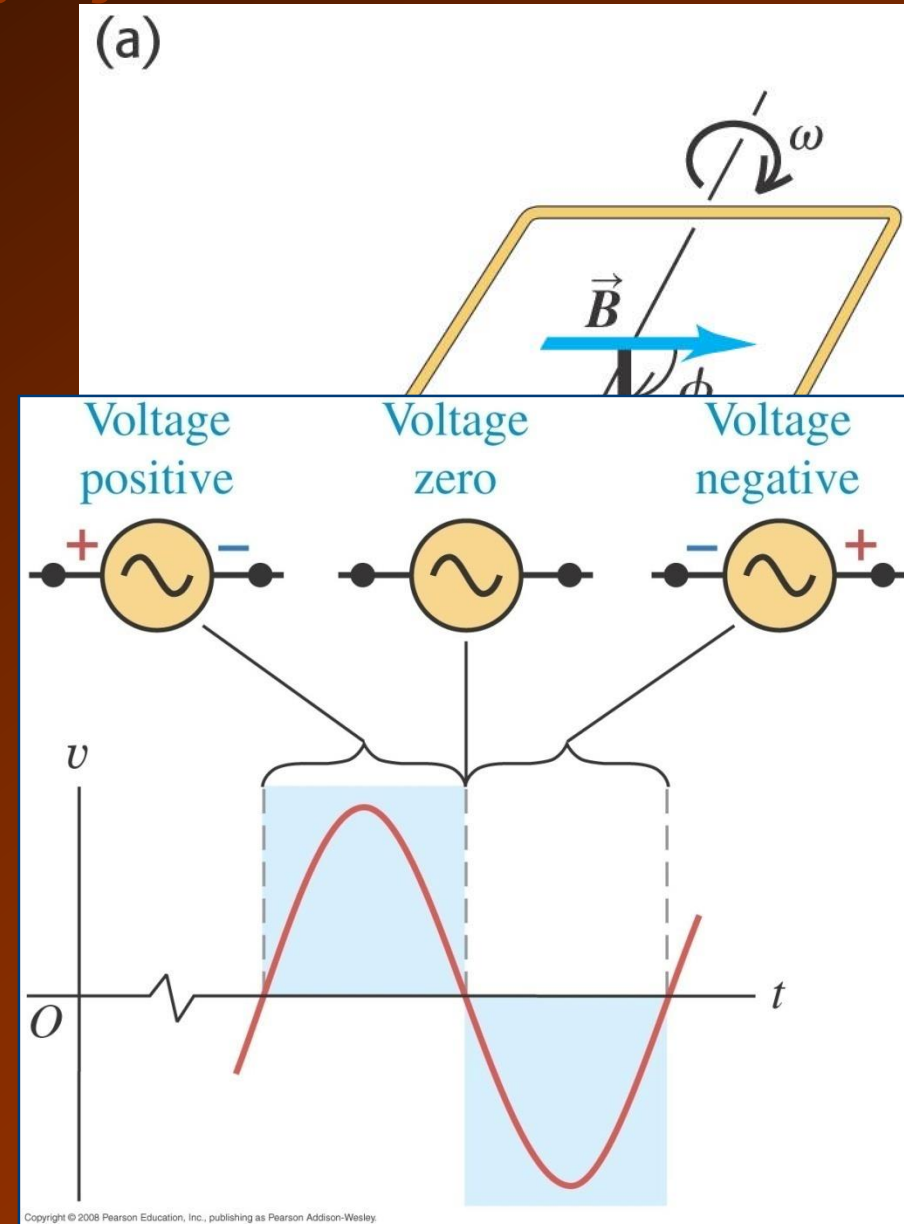
**VIIMEINEN LUENTO:
Vaihtovirtapiirit**

ESIMERKKEJÄ

Vaihtovirta ja jännite

- Sähkövoimalat yms. tuottavat vaihtovirtaa ja jännitettä, jotka vaihtelevat jaksollisesti.
- Suomessa jännitteen taajuus on 50 Hz.
- Matemaattisesti generaattorin tuottama virta ja jännite voidaan esim. kirjoittaa:

$$i = I \cos(\omega t)$$
$$v = V \cos(\omega t)$$



Teholliset arvot

- Eräs kätevä tapa kuvata vaihtuvia suureita on ns. teholliset arvot (tai rms-arvo, root-mean-squared)

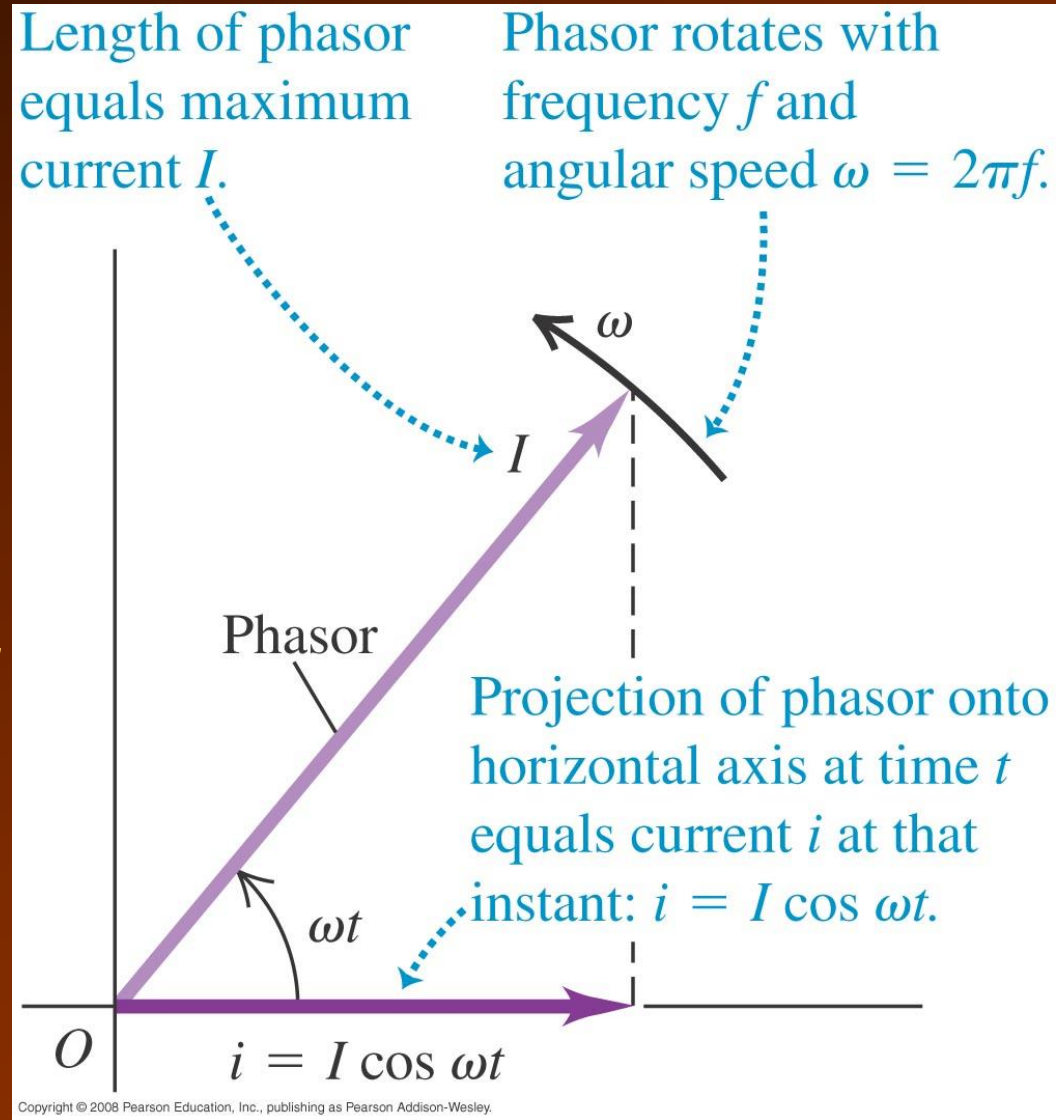
- Tehollinen arvo lasketaan
 - korottamalla suure toiseen potenssiin,
 - laskemalla keskiarvo ja
 - ottamalla sen neliöjuuri.
- $$i^2 = I^2 \cos^2(\omega t) = I^2 \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t))$$
- $$\Rightarrow I_{rms} = \sqrt{\frac{I^2}{2}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

- Virran ja jännitteen teholliset arvot ovat (kosini/sini muotoiselle jännitteelle)

$$I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

Osoitindiagrammi

- Vaihtojännitteitä ja virtoja on kätevä kuvata geometrisesti ns. osoitindiagrammilla.
- *Tässä virta ja jännite ovat vektoreita, jotka pyörivät origon ympäri virran taajuudella.*
- *Hetkellinen piirissä oleva virta tai jännite on vektorin projektio x-akselille.*



Vastus vaihtovirtapiirissä

- Ohmin lain mukaan jännitehäviö vastuksen yli vaihtovirran tapauksessakin on:

$$v = Ri = RI \cos(\omega t)$$

- Jännitteen amplitudi on:

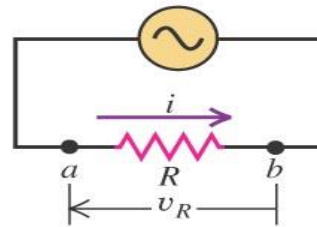
$$V_R = RI$$

- Ja hetkellinen jännite:

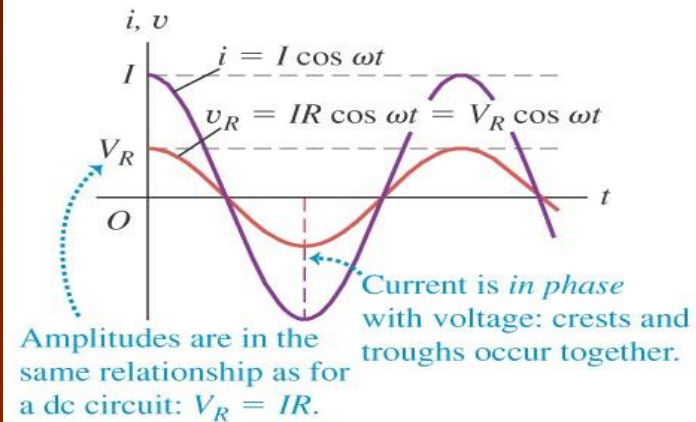
$$v_R = V_R \cos(\omega t)$$

- → virta ja jännite samassa vaiheessa!!

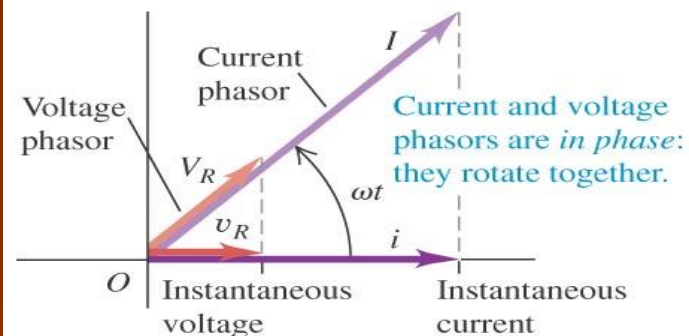
(a) Circuit with ac source and resistor



(b) Graphs of current and voltage versus time



(c) Phasor diagram



Kela vaihtovirtapiirissä

- Kelassa päiden välinen jännitehäviö on:

$$v_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} (I \cos(\omega t))$$

$$v_L = -\omega L I \sin(\omega t)$$

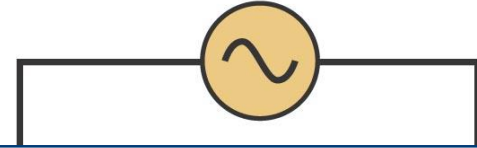
- Jännitteen amplitudi on nyt

$$v_L = \omega L I \cos(\omega t + 90^\circ)$$

- Jännite on 90° virtaa edellä!!

$$V_L = \omega L I$$

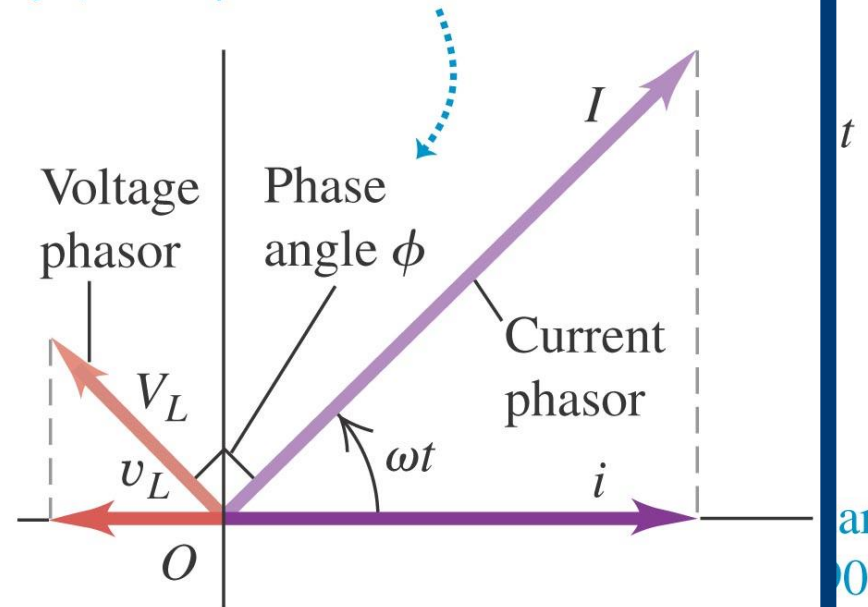
(a) Circuit with ac source and inductor



(b) Graphs of current and voltage versus time

(c) Phasor diagram

Voltage phasor *leads* current phasor by $\phi = \pi/2 \text{ rad} = 90^\circ$.



Induktiivinen reaktanssi

- Jännitteen amplitudi on nyt

$$V_L = \omega LI$$

- Tämä on samaa muotoa kuin Ohmin laki ($V=RI$)



$$V_L = X_L I$$

- missä $X_L = \omega L$ on

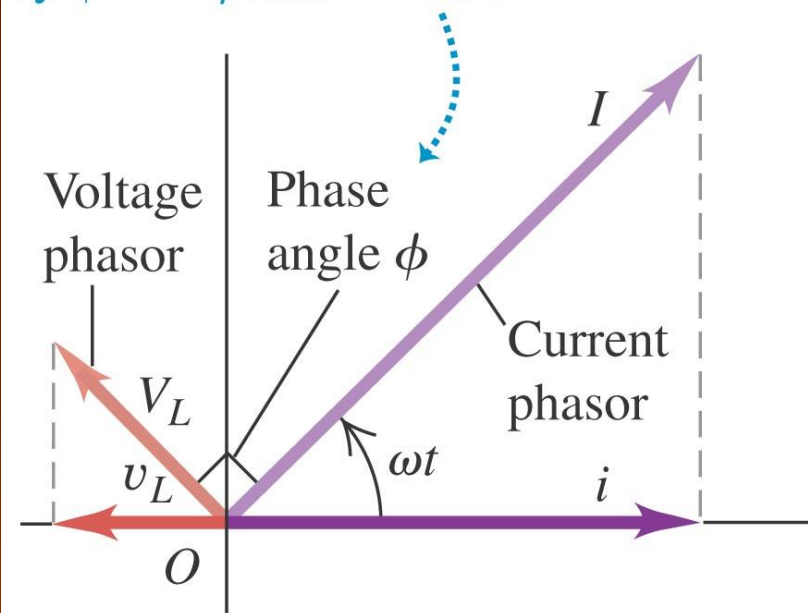
ns. induktiivinen reaktanssi

(sen yksikkö on $1 \Omega = \text{ohm}$)

- *Vaikuttaa jännitteeseen sitä enemmän mitä suurempi taajuus!*

(c) Phasor diagram

Voltage phasor *leads* current phasor by $\phi = \pi/2 \text{ rad} = 90^\circ$.



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

Kondensaattori vaihtovirtapiirissä

- Kondensaattorille:

$$i = \frac{dq}{dt} = I \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow q = \frac{I}{\omega} \sin(\omega t) = \frac{I}{\omega} \cos(\omega t - 90^\circ)$$

- Kondensaattorin jännite on nyt:

$$v_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{\omega C} I \cos(\omega t - 90^\circ)$$

- Amplitudi on:

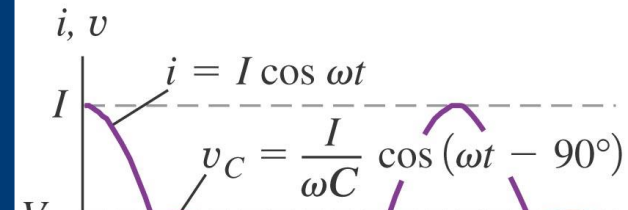
$$V_C = \frac{1}{\omega C} I$$

- Jännite on 90° virtaa jäljessä!!

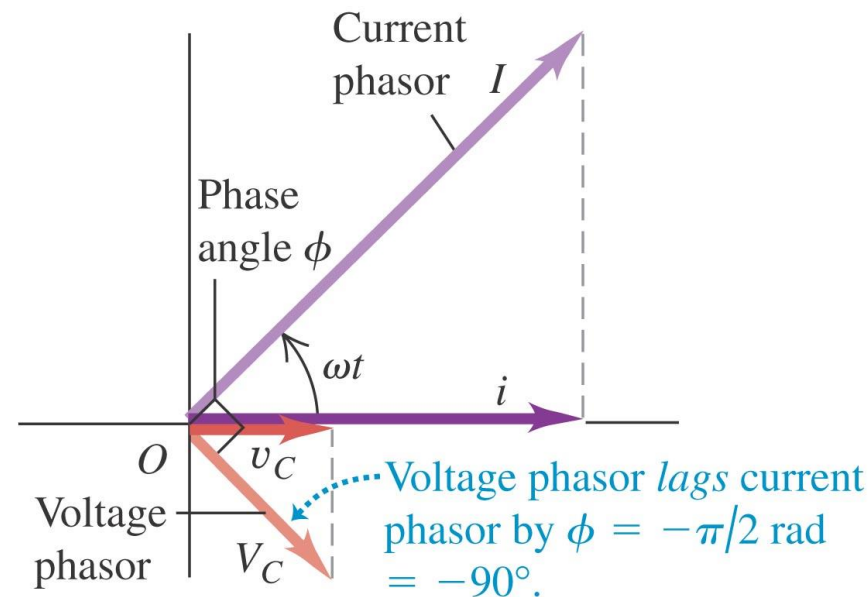
(a) Circuit with ac source and capacitor



(b) Graphs of current and voltage versus time



(c) Phasor diagram



Kapasitiivinen reaktanssi

- Samoin kuin kelalle voimme kirjoittaa jännitteen Ohmin lain muotoon:

$$V_C = X_C I$$

- missä

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

- on *kapasitiivinen reaktanssi*
- → *Kondensaattori vaikuttaa jännitteeseen sitä enemmän mitä pienempi taajuus!*

ESIMERKKEJÄ

L-R-C Sarjapiiri

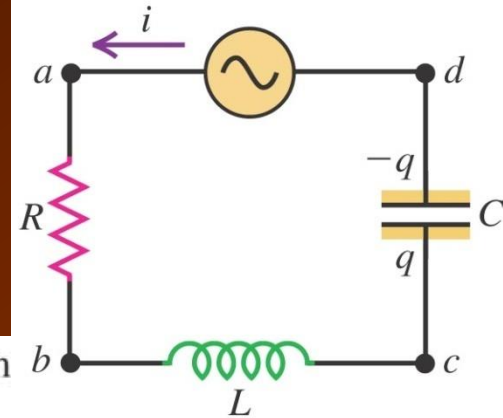
- LRC-sarjapiirissä kokonaisjännite osoitindiagrammin mukaan on

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

$$V = \sqrt{R^2 I^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 I^2}$$

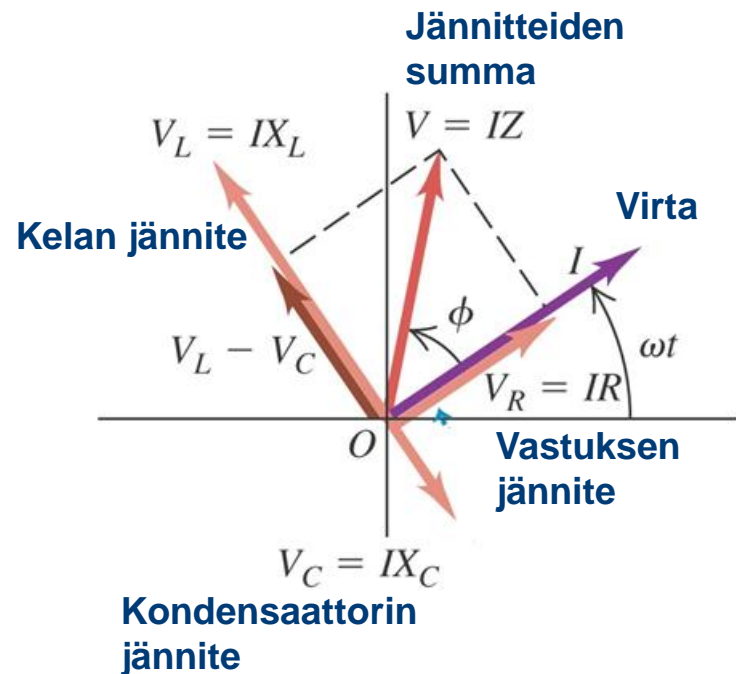
$$V = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

(a) Series R-L-C circuit



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

(b) Phasor diagram



L-R-C Sarjapiiri

- Kokonaisjännite voidaan kirjoittaa kätevään muotoon

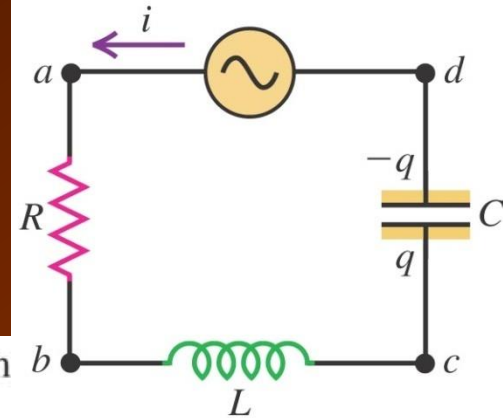
$$V = ZI$$

- Missä Z on piirin impedanssi ja tälle kyseiselle piirille

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

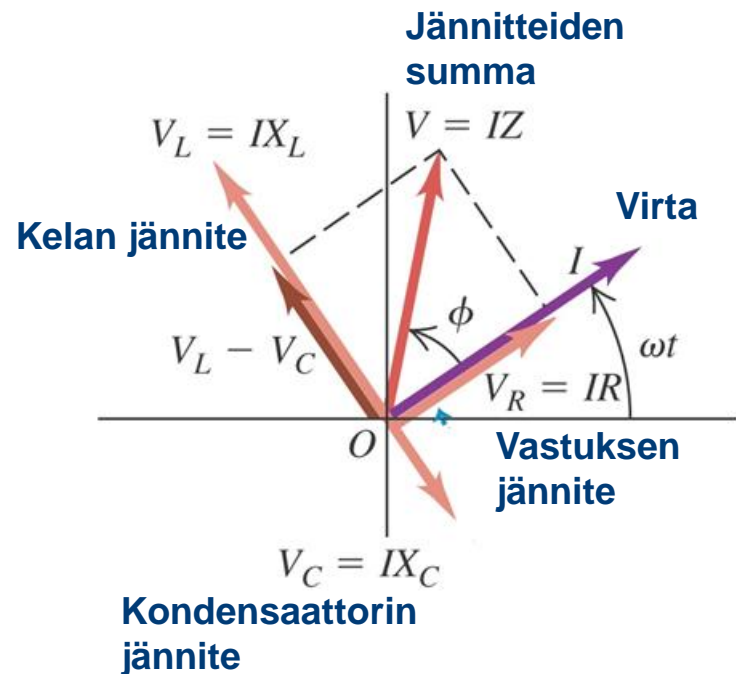
- Impedanssi kuvaa vaihtovirran vastustuskykyä (vrt. resistanssi) ja yksikkö on 1 ohm

(a) Series $R-L-C$ circuit



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

(b) Phasor diagram



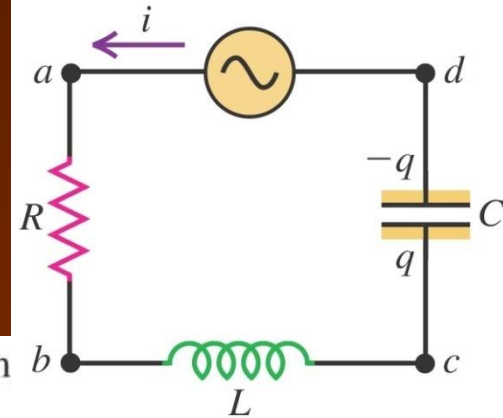
L-R-C Sarjapiiri

- Jännite ja virta LRC piirissä eivät ole samassa vaiheessa, vaan niiden vaiheero osoitindiagrammin perusteella on

$$\phi = \arctan\left(\frac{V_L - V_C}{V_R}\right)$$

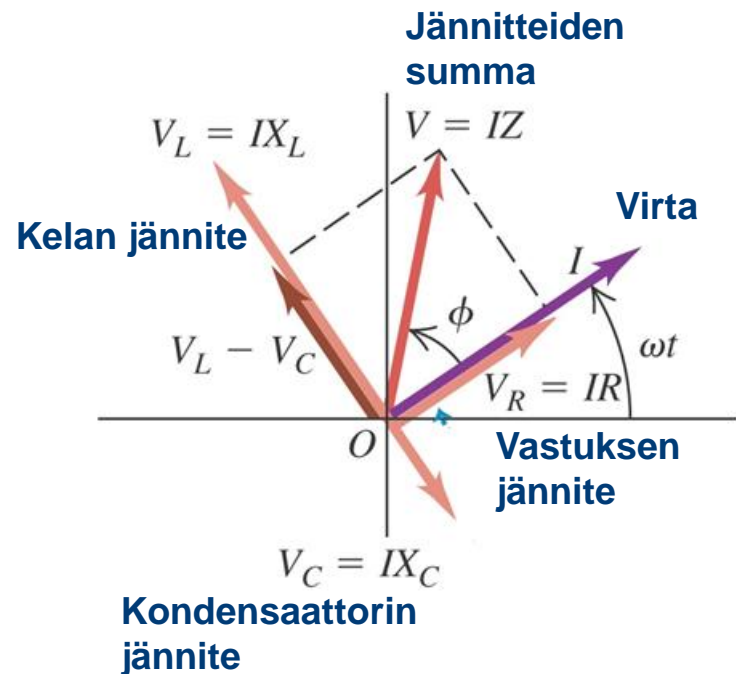
$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

(a) Series *R-L-C* circuit



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

(b) Phasor diagram



Resonanssi LRC piirissä

- Impedanssi riippuu käytettävän virran taajuudesta!!!

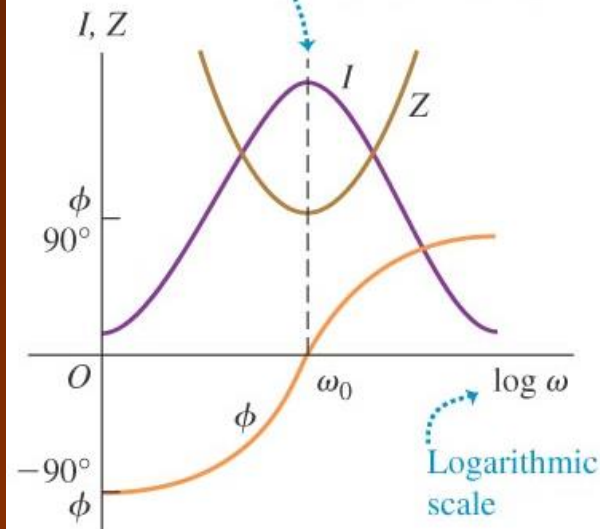
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

- Piirin sanotaan olevan resonanssissa, kun impedanssi on mahd. pieni. Tällöin virta on mahd. suuri.
- LRC-sarjapiirille tämä tapahtuu kulmataajuudella

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

(b) Impedance, current, and phase angle as functions of angular frequency

Current peaks at the angular frequency at which impedance is least. This is the resonance angular frequency ω_0 .



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

Teho vaihtovirtapiirissä

- Vaihtovirtapiirin **hetkellinen teho** on $p = vi$

$$p = V \cos(\omega t + \phi) I \cos(\omega t)$$

$$p = VI (\cos(\omega t) \cos \phi - \sin(\omega t) \sin \phi) \cos(\omega t)$$

$$p = VI \cos \phi \underbrace{\cos^2(\omega t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{keskiarvo } \frac{1}{2}}} - VI \sin \phi \underbrace{\sin(\omega t) \cos(\omega t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{keskiarvo}=0}}$$

- Keskimääräinen teho** on siis

$$P = \frac{1}{2} VI \cos \phi$$

Kosinitekijä on piirin **tehokerroin**, Esim. jos $R=0$ tehokerroin=0 ja piiri ei keskimäärin kuluta tehoa!

Esimerkkejä