761103P Sähkö- ja magnetismioppi

Induktanssi, magneettinen energia ja LR, LC ja LRC piirit

ESIMERKKEJÄ

Keskinäisinduktanssi (1)

- Kaksi virtapiiriä ovat toisiinsa aina kytköksissä magneettikentän välityksellä!
- Jos toisessa piirissä virta muuttuu, toisen piirin kokema magneettivuo muuttuu ja siihen indusoituu jännite.
- Indusoitunut jännite on

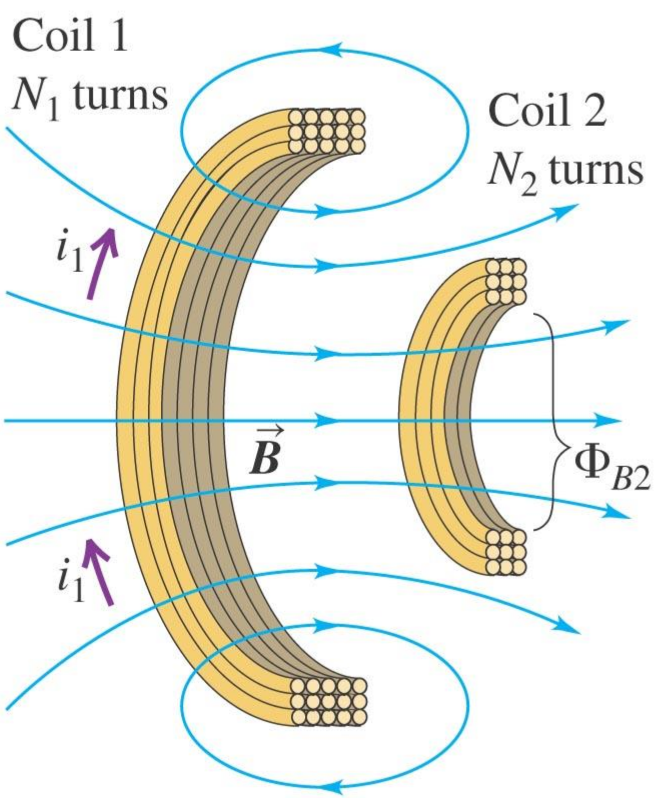
$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt}$$

- Magneettivuo riippuu toisessa kelassa kulkevasta virrasta

$$N_2\Phi_{B2} = M_{21} i_1$$

- Tässä kelojen välistä kytkentää kuvaa keskinäisinduktanssi M_{21}

Jos virta kelassa 1 muuttuu, kelan 2 menevä magneettivuo muuttuu ➔ kelaan 2 indusoituu jännite!



Keskinäisinduktanssi (2)

$$N_2 \Phi_{B2} = M_{21} i_1$$

- Tämän avulla voimme kirjoittaa indusoituneeksi jännitteeksi kelassa 2

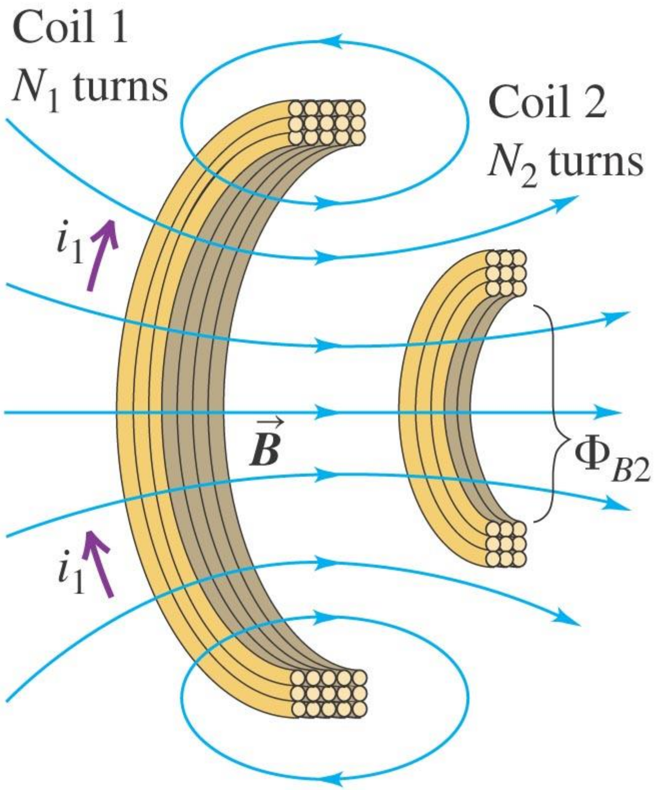
$$\varepsilon_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

- Samoin kelaan 1 indusoitunut jännite voidaan kirjoittaa

$$\varepsilon_1 = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

- Osoittautuu, että AINA M_{12}=M_{21} !!!!!

Jos virta kelassa 1 muuttuu, kelan 2 menevä magneettivuo muuttuu ➔ kelaan 2 indusoituu jännite!



Keskinäisinduktanssi (3)

- Voimme nyt kirjoittaa kelojen jännitteet yhden keskinäisinduktanssin avulla

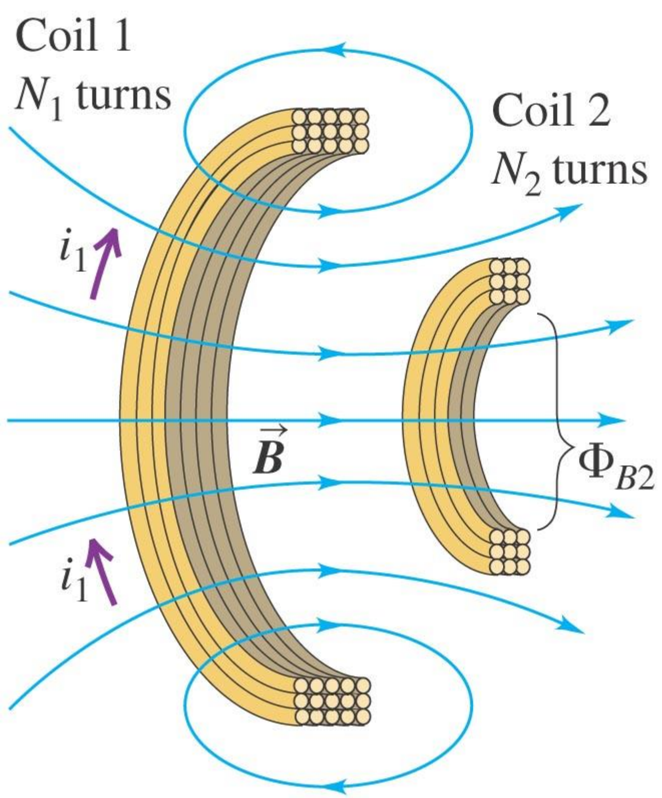
$$\boxed{\varepsilon_1 = -M\frac{di_2}{dt}} \qquad \boxed{\varepsilon_2 = -M\frac{di_1}{dt}}$$

- Keskinäisinduktanssi kertoo kuinka suuren jännitteen toisessa piirissä muuttuva virta indusoi piiriin.
- Keskinäisinduktanssi voidaan laskea määritelmästä

$$\boxed{M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2}}$$

- Sen yksikkö on 1 H = 1 Wb/A (henry)

Jos virta kelassa 1 muuttuu, kelan 2 menevä magneettivuo muuttuu ➔ kelaan 2 indusoituu jännite!



ESIMERKKEJÄ

Itseinduktanssi

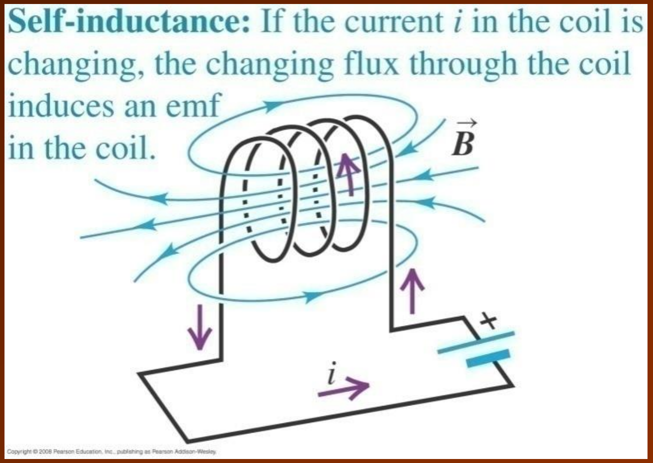
- Kelassa kulkeva muuttuva virta vaikuttaa myös ITSEENSÄ!
- Kelan itsensä läpi menevä magneettivuo riippuu sen omasta virrasta

$$N\Phi_B = Li$$

- Jos virta muuttuu, magneettivuo muuttuu ja kelaan indusoituu jännite

$$\boxed{\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{di}{dt}}$$

- Missä L on kelan itseinduktanssi (yksikkö 1 H)

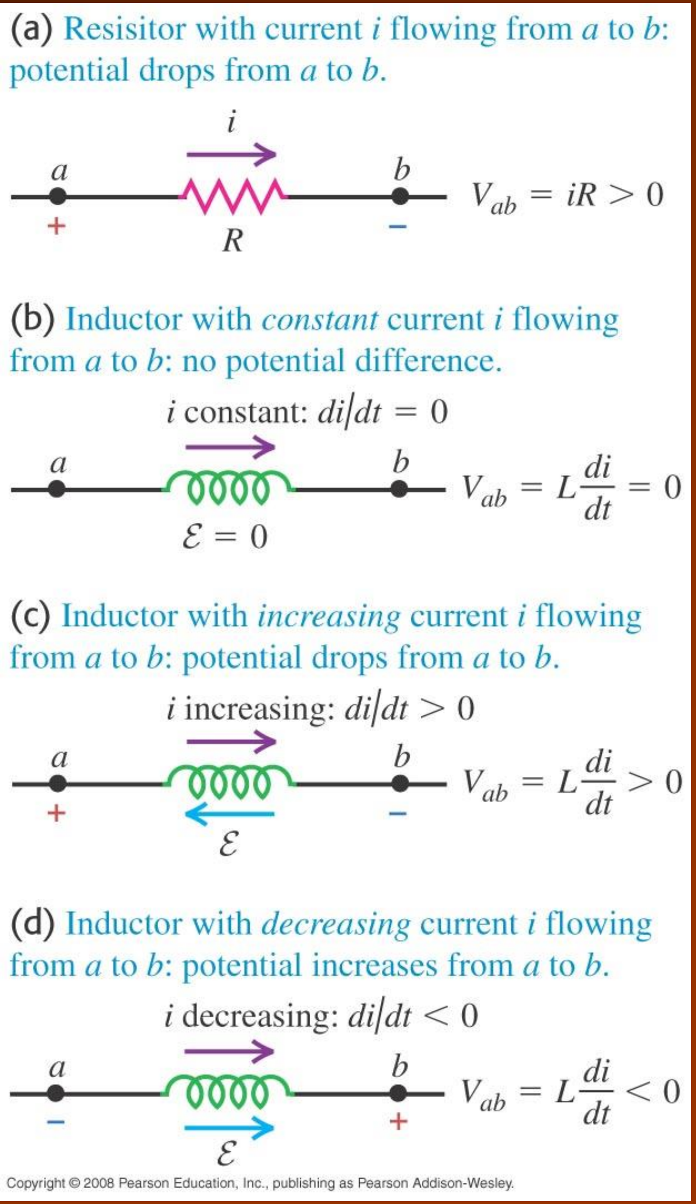


Kela sähköpiirissä

- Keloja käytetään sähköpiireissä niiden induktanssin vuoksi
- Jos piirin virta muuttuu, kelan päiden välille indusoituva jännite pyrkii ESTÄMÄÄN muutoksen!
- Tällöin liikuttaessa piirissä virran suuntaan kelan yli potentiaalin muutos on

$$V_{ab} = -L\frac{di}{dt}$$

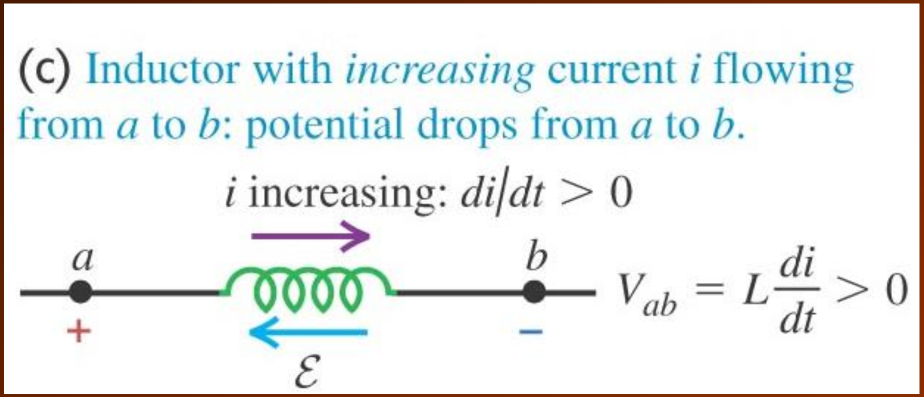
- Tämä aiheutuu siitä, että induktanssin takia kelan päihin kerääntyy hetkellisesti varausta. Jos virta kasvaa kela pyrkii 'jarruttamaan' virtaa, jos virta pienenee kela taas 'kiihdyttää' virtaa ➔ varaus pakkautuu kelan päihin.



ESIMERKKEJÄ

Kelaan varastoitunut energia

- Kun kelan virtaa kasvatetaan nollasta ylöspäin, virta kulkee kelassa kohti pienempää potentiaalia (kelan päiden välille on indusoitunut jännite)



- ➔ Potentiaalienergia varastoituu kelan energiaksi teholla

$$P = V_{ab} i = Li\frac{di}{dt}$$

- Kelaan varastoitunut energia ajassa *dt* on

$$dU = Pdt = Lidi$$

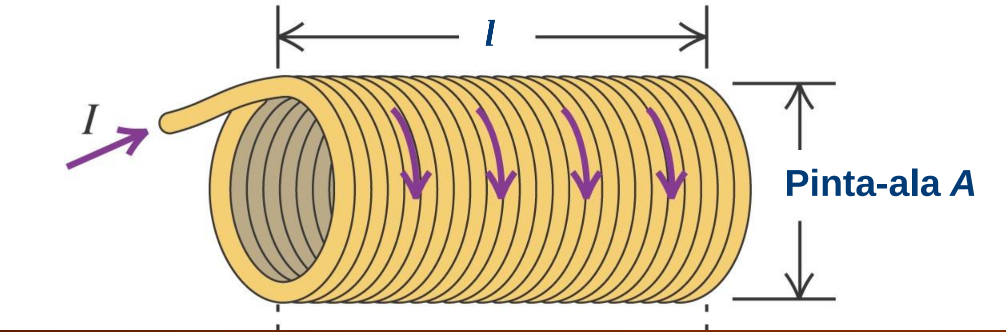
- Kun virta on kasvanut arvoon *I* on kelaan varastoitunut energia

$$U = \int_0^I Lidi = L\int_0^I idi = \frac{1}{2}LI^2$$

➔ Kelan energia on $\boxed{U = \frac{1}{2}LI^2}$

Magneettikentän energia

- Itseasiassa, kelaan varastoitunut energia on magneettikentän energiaa (vrt. kondensaattori, jossa energia on sähkökentässä)



- Kelan magneettikentäksi on edellä saatu

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} \Rightarrow I = \frac{Bl}{\mu_0 N}$$

- Kelan induktanssi tämän perusteella on

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

- Kelan energia on täten

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 A}{l}\frac{B^2 l^2}{\mu_0^2 N^2} = \frac{B^2}{2\mu_0}Al$$

- Kelan energiatiheys on

$$\boxed{u_B = \frac{U}{Al} = \frac{1}{2\mu_0}B^2}$$

ESIMERKKEJÄ

LR-piiri

- LR-piiri on piiri, jossa on induktanssia ja resistanssia (kaikissa oikeissa piireissä on molempia!)
- Kuvan piirille Kirchoffin toinen laki antaa

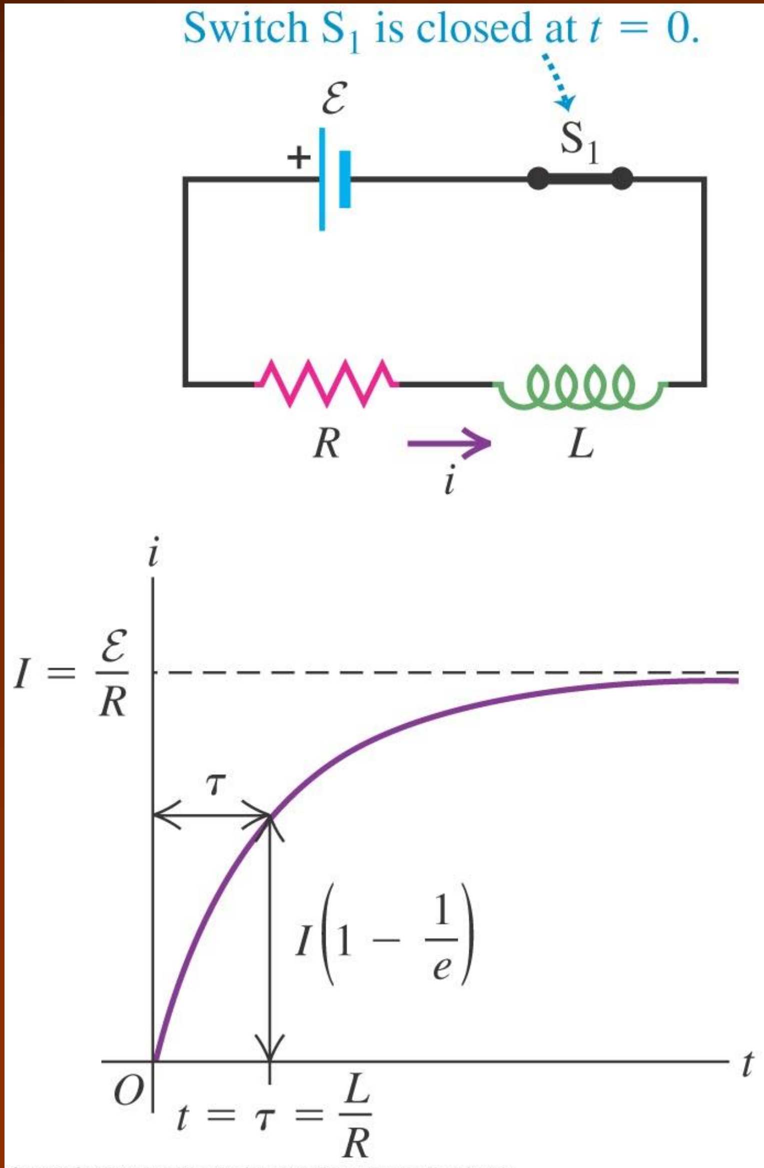
$$\varepsilon - Ri - L\frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} - \frac{R}{L}i(t)$$

- Tämä on differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu on funktio

$$\boxed{i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)}$$

- Virta siis kasvaa eksponentiaalisesti huippuarvoon ja kasvunopeuden määrää aikavakio

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$



LC-piiri

- LC-piiri on piiri, jossa on induktanssia ja kapasitanssia
- Kuvan piirille Kirchoffin toinen laki antaa

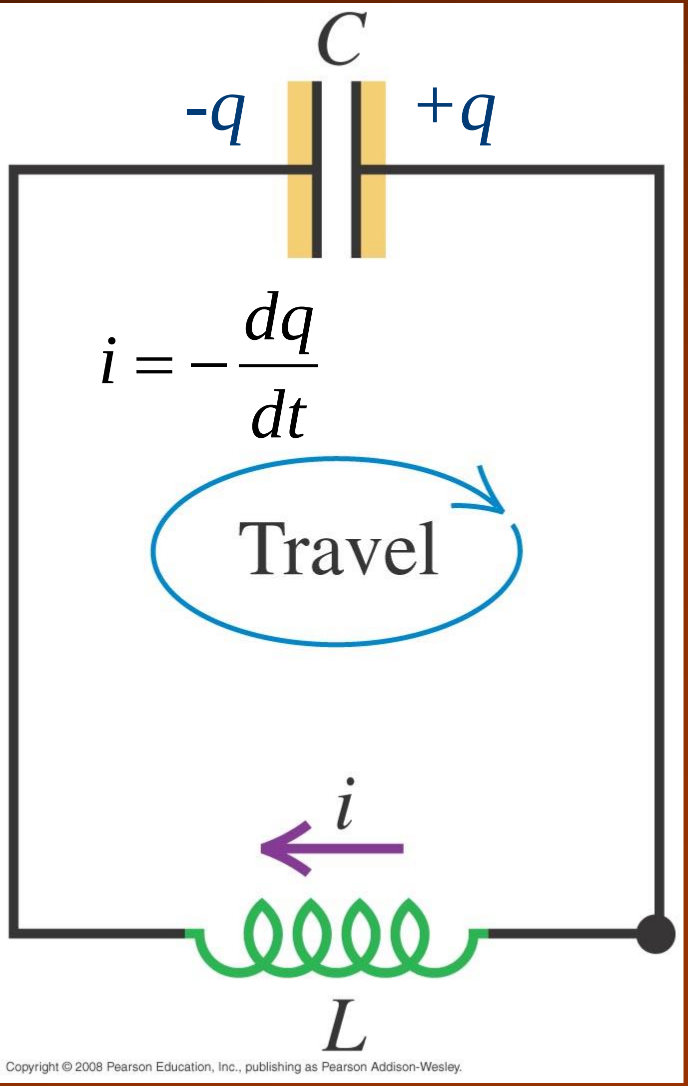
$$-L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0 \Leftrightarrow \frac{d^2q(t)}{dt^2}+\frac{1}{LC}q(t)=0$$

- Tämä on harmoninen 2. asteen differentiaali-yhtälö, jonka ratkaisun tiedetään olevan

$$q(t)=Q_0\cos(\omega t+\phi)$$

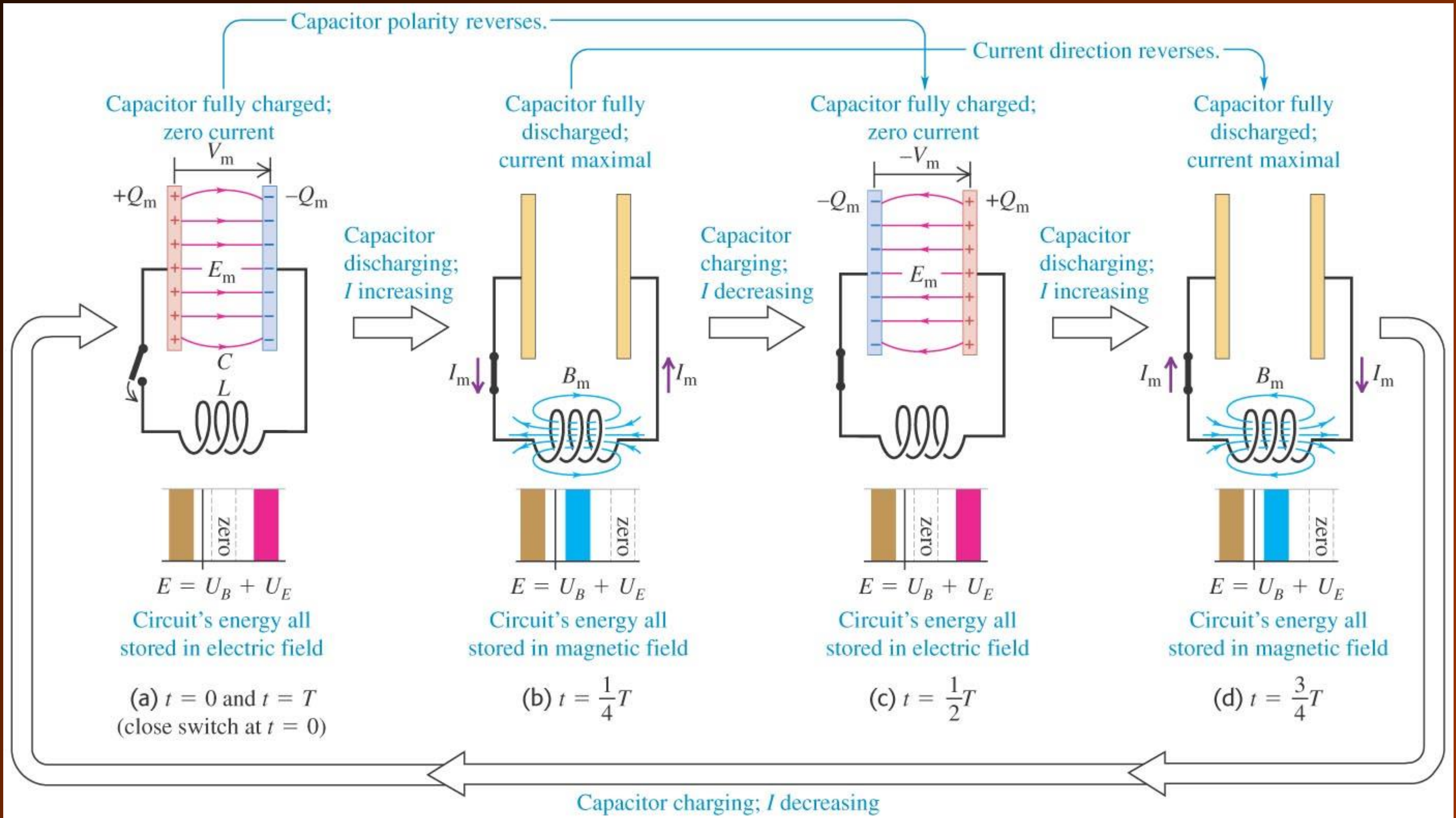
- Missä värähtelyn kulmataajuus on

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$



LC-piiri

- LC-piirissä kondensaattorin sähköinen energia ja kelan magneettinen energia vuorottelevat ➔ energia on vuoroin kondensaattorissa ja vuoroin kelassa. Vuorottelu tapahtuu edellä olevalla taajuudella.



LRC-piiri

- LRC-piirissä on induktanssia, kapasitanssia ja resistanssia.
- Tällaiselle sarjapiirille Kirchoffin II laki antaa

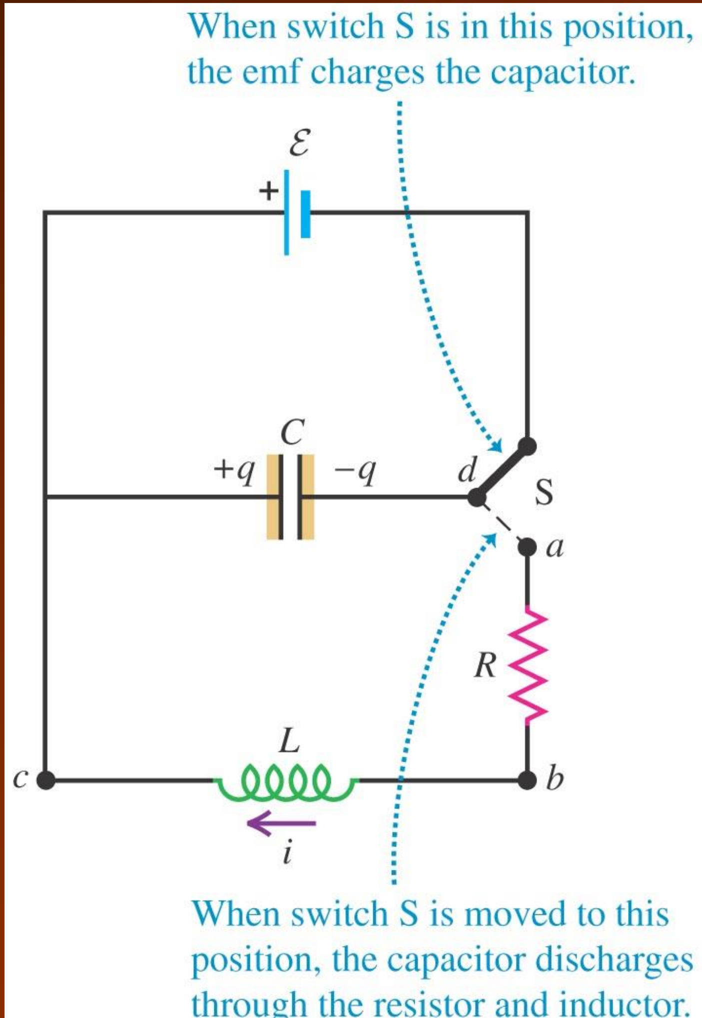
$$-Ri - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

- Tämän differentiaaliyhtälön ERÄS ratkaisu on

$$q(t) = Q_0 e^{-(R/2L)t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t + \phi\right)$$

- Tässä värähtely on VAIMENEVAA ja taajuus on

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$



LRC-piiri

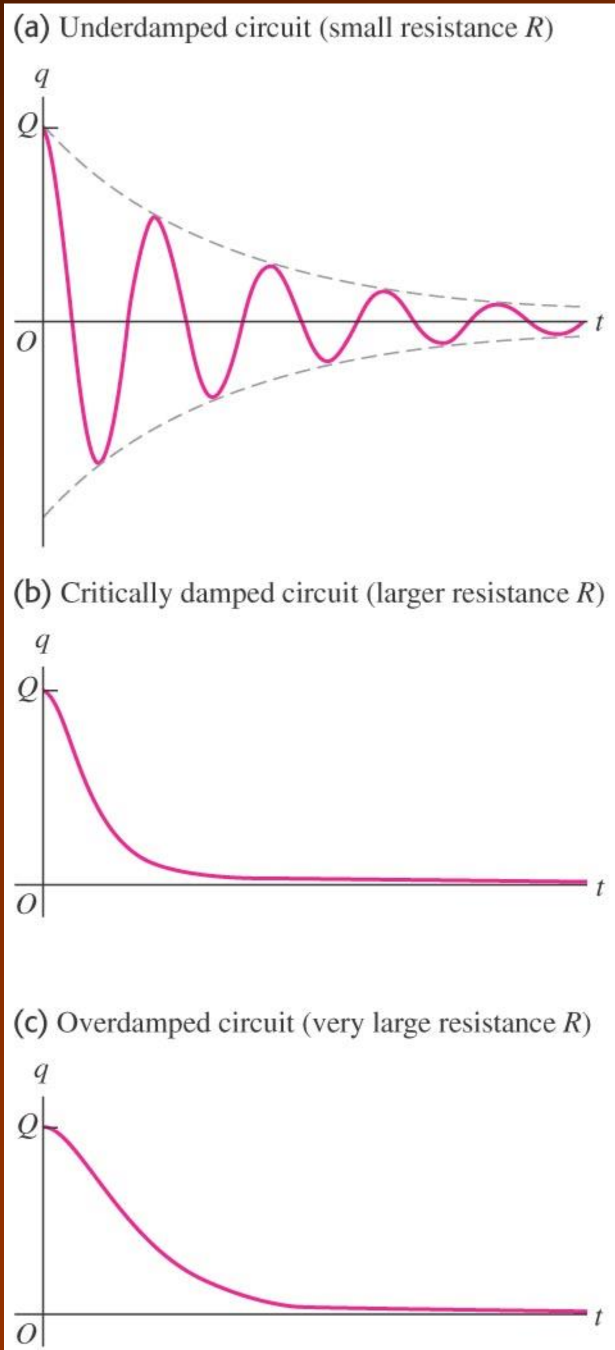
- Jos resistanssi on hyvin pieni, täsmällisesti

$$R < \sqrt{4\frac{L}{C}}$$

- Piiri värähtelee vaimenevasti (alivaimennettu)

- Jos $R = \sqrt{4\frac{L}{C}}$ piiri on kriittisesti vaimennettu ja värähtelyä ei tapahdu

- Jos $R > \sqrt{4\frac{L}{C}}$ piiri on ylivaimennettu ja värähtelyä ei tälläinkään tapahdu



ESIMERKKEJÄ