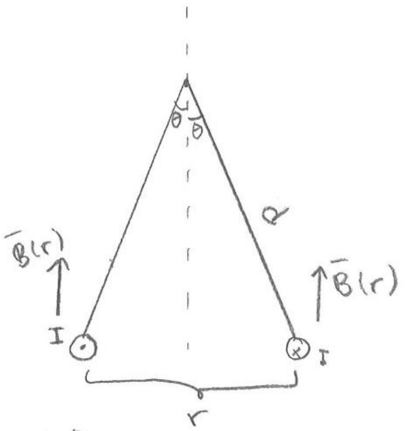
Sähkömagnetismi 1, kevät 2019

Laskuharjoitus 5, ratkaisut

1.

$\theta = 6^\circ$
$d = 4\,cm$ (narun pituus)
$\rho_l = 0{,}0125 \frac{kg}{m}$

Vakiot:
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$
$g = 9{,}81 \,m/s^2$



- Lasketaan aluksi johtimien välinen etäisyys:
$$\sin\theta = \frac{r/2}{d} \iff r = 2d \cdot \sin\theta$$

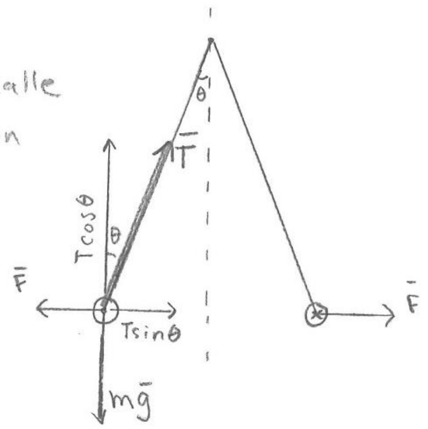
- Suoran johtimen aiheuttama magneettikenttä:
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot 2d\sin\theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d \sin\theta}$$

Eli kuvassa vasemmanpuoleinen johdin tuottaa kyseisen suuruisen magneettikentän oikeanpuoleisen johtimen kohdalla, sekä päinvastoin. Oikean käden säännön avulla voidaan päätellä, että molemmissa kohdissa magneettikenttä osoittaa ylöspäin.

- Magneettikentän aiheuttama voima virtajohtimeen:
$$\bar{F} = I\bar{l} \times \bar{B}$$ (luentomoniste, kaava 27.19)
($\bar{l}$ osoittaa virran suuntaan)

Oikean käden säännöllä (*) saadaan voiman suunnaksi suoraan vasemmalle vasemmanpuoleiselle johtimelle ja suoraan oikealle oikeanpuoleiselle johtimelle.
Jos johtimen pituus on l, voiman suuruus on

$$F = IlB = Il \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi d \sin\theta} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi d \sin\theta}.$$



- Voimadiagrammista nähdään muut johtimeen vaikuttavat voimat. Koska johdin pysyy paikoillaan, näiden voimien summan tulee olla 0 Newtonin 1. lain mukaan. (T on langan tukivoima, $m\bar{g}$ on paino)

Voimat pystysuunnassa:
$$T\cos\theta - mg = 0 \iff T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Voimat vaakasuunnassa:
$$T\sin\theta - F = 0$$

(*) Oikean käden sääntö ristitulolle:
$$\bar{A} \times \bar{B} = \bar{C}$$
$\bar{C}$ – keskisormi
$\bar{A}$ – peukalon suunta
$\bar{B}$ – etusormi

sijoitetaan T:n ja F:n lausekkeet:

$$\frac{mg}{\cos\theta}\cdot\sin\theta - \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi d\sin\theta} = 0$$

Johtimen, jonka pituus on l, massa $m = \rho_l \cdot l$

$$\frac{\rho_l l g}{\cos\theta}\sin\theta = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi d \sin\theta}$$

l supistuu pois molemmilta puolilta. $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan(\theta)$

$$\rho_l g \tan\theta = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d\sin\theta}$$

Ratkaistaan virta I:

$$I^2 = 4\pi d\sin\theta \cdot \rho_l g\tan\theta \cdot \frac{1}{\mu_0}$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0} d\sin\theta\, \rho_l g \tan\theta} = \sqrt{\frac{4\pi}{4\pi\cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}}\cdot 0{,}04\,m\cdot\sin 6^\circ\cdot 0{,}0125\frac{kg}{m}\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot\tan 6^\circ}$$

$$\underline{\underline{I = 23{,}2\,A}}$$

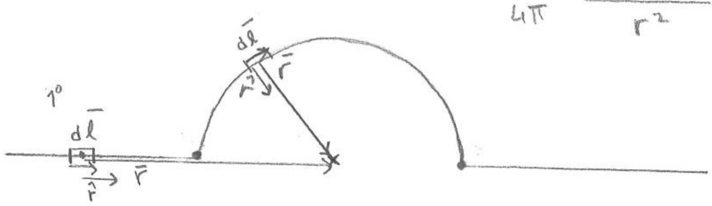
Yksikkötarkastelu

$$\sqrt{\frac{1}{Vs/Am}\cdot \cancel{m}\cdot\frac{kg}{\cancel{m}}\cdot\frac{m}{s^2}} = \sqrt{\frac{Am}{Vs}\cdot\frac{kgm}{s^2}}$$

$\cdot\ N = \frac{kgm}{s^2}$; $W = A\cdot V \Rightarrow V = \frac{W}{A}$; $W = \frac{J}{S} = \frac{Nm}{S}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{Am}{Ws/A}\cdot N} = \sqrt{\frac{A^2\cdot m\cdot N}{\frac{Nm}{s}\cdot s}} = \sqrt{A^2} = A.$$

2. Biot-Savartin laki: $d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\, d\bar{l}\times\hat{r}}{r^2}$



Huom! $\hat{r}$ on paikkavektorin $\bar{r}$ suuntainen yksikkövektori (eli sen pituus on 1).

1° Suorissa pätkissä $d\bar{l} \parallel \hat{r}$, joten $d\bar{l}\times\hat{r} = 0$.

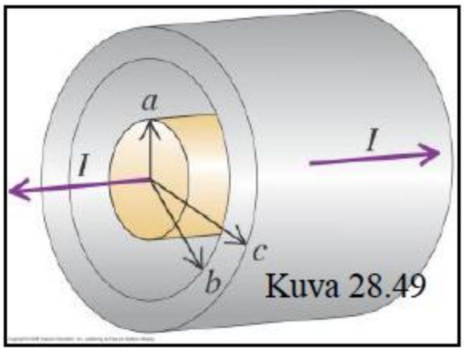
2° Puoliympyrän kehällä $d\bar{l}\perp\hat{r}$, joten $|d\bar{l}\times\hat{r}| = dl$, suunta paperiin päin.

r = puoliympyrän säde = R.

$$\Rightarrow B = \int dB = \int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\underbrace{\int dl}_{= \text{puoliympyrän kaaren pituus} = \frac{2\pi R}{2} = \pi R}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{R^2}\cdot\pi R = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I}{4R}}}$$, suunta paperiin päin

3.



Kuva 28.49

a) Lasketaan B-kentän lauseke johdinten välissä, jossa $a < r < b$.

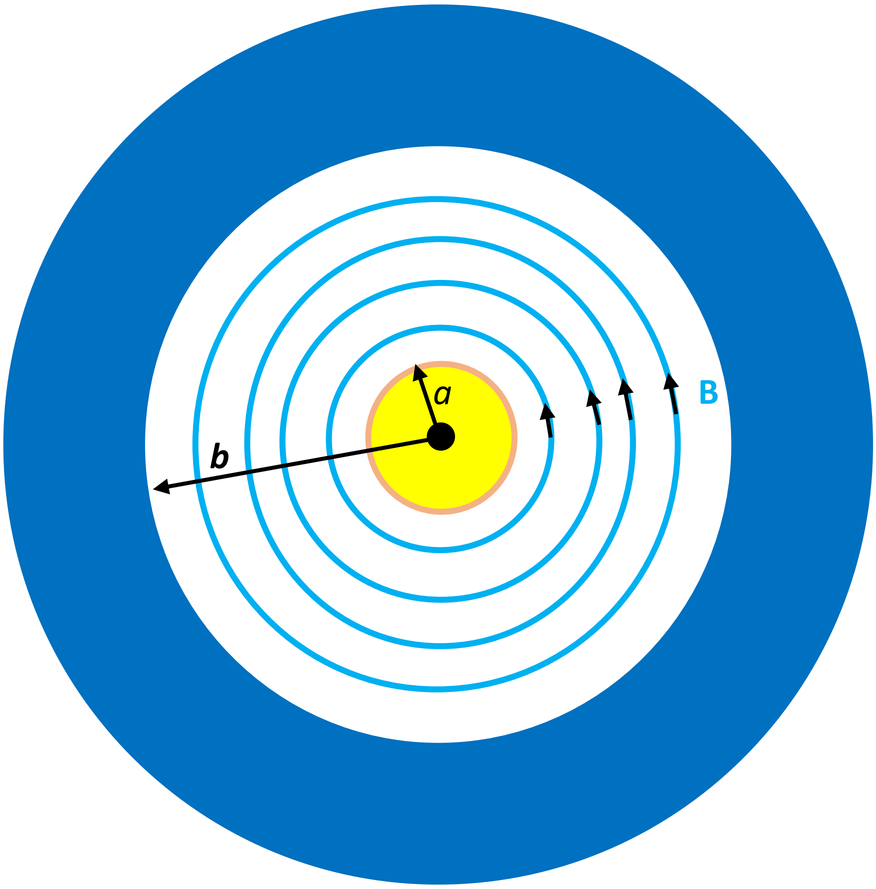
Käytetään Ampèren lakia

$$\oint_C \overline{B} \cdot d\overline{l} = \mu_0 I_{sis}$$

$\overline{B}$ = magneettivuon tiheys Ampèren silmukan kohdalla
$d\overline{l}$ = pituusalkiovektori Ampèren silmukassa
I_{SIS} = suljetun silmukan läpi kulkevat virrat
C = Ampèren silmukan pituus

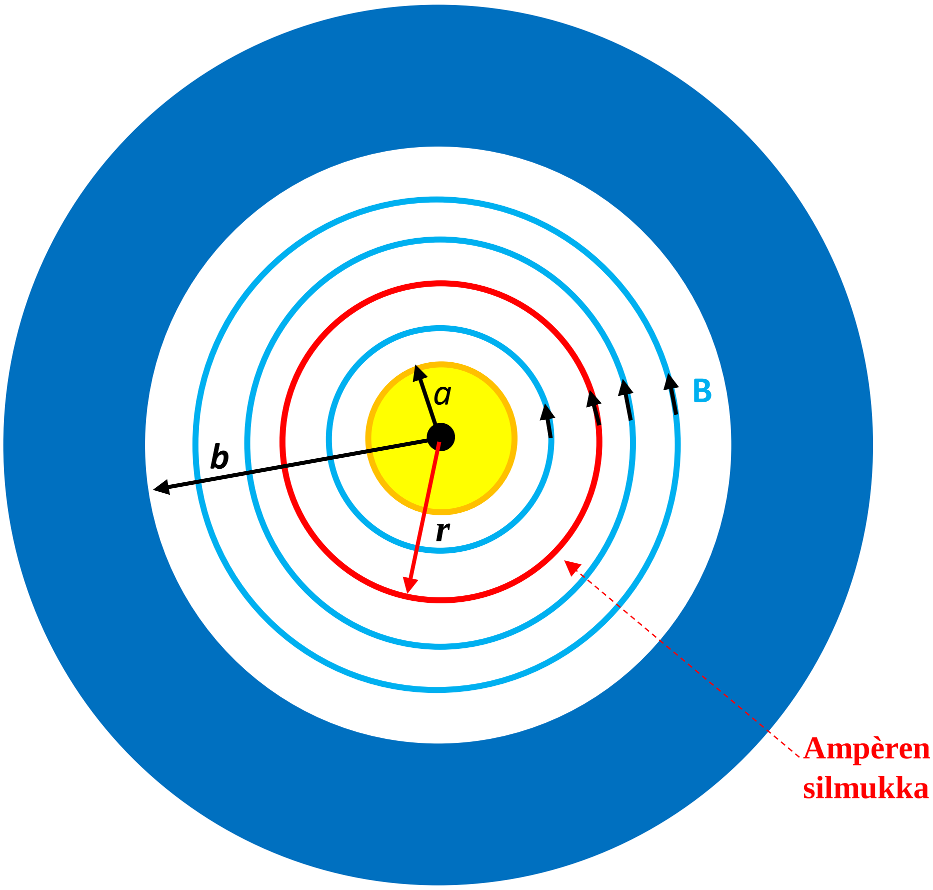
B-kentän kenttäviivojen piirtäminen

Alla olevassa kuvassa on pitkän suoran sisäjohtimen aiheuttamia *B*-kenttäviivoja. *B*-kentän suunta on määritetty oikean käden ”nyrkkisäännön” avulla: Kun puristetaan johdinta oikealla kädellä ja peukalo osoittaa virran suuntaan, muut sormet osoittavat magneettikentän suuntaan. (Sisäjohtimessa virta kulkee katsojaan päin.)



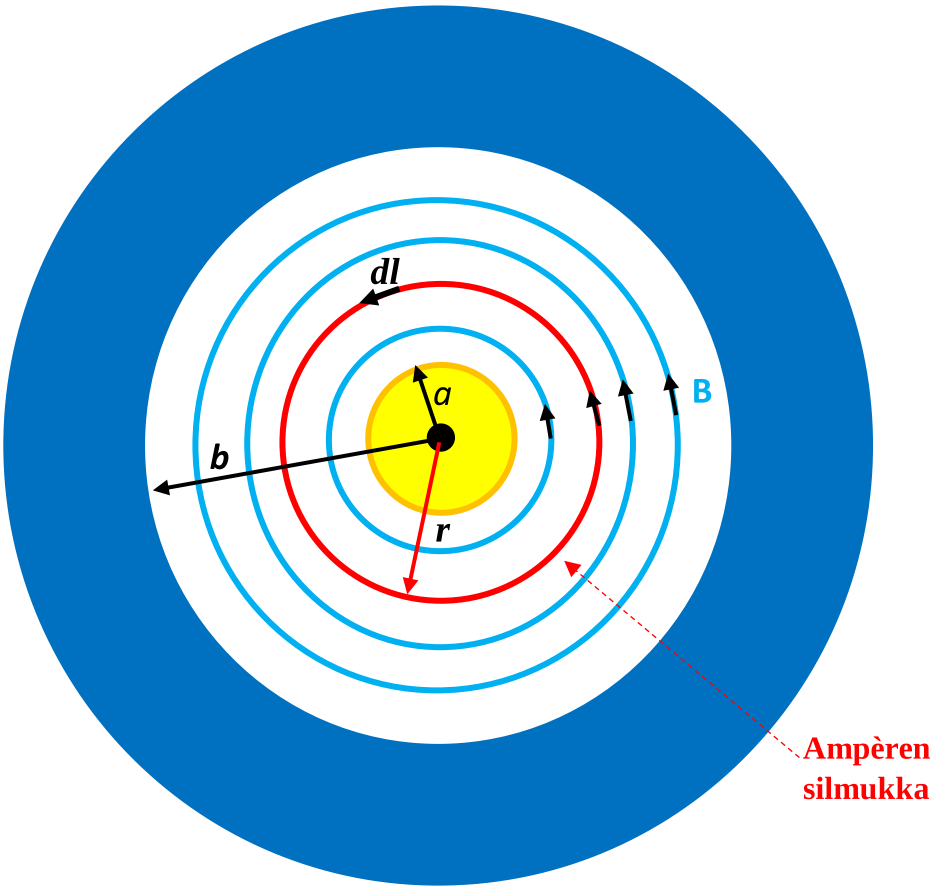
Ampéren silmukan valinta ja piirtäminen kuvaan.

Pitkille suorille johtimille ja ympyräpohjaisille sylintereille valitaan suljetuksi Ampéren silmukaksi ympyrä. Alla olevassa kuvassa on edellä esitettyyn kuvaan lisätty Ampéren silmukka, joka on r-säteinen ympyrä.



Pituusalkiovektoreiden piirtäminen Ampèren silmukkaan.

Pituusalkiovektorit ovat Ampèren silmukan suuntaisia. Alla olevassa kuvassa on edellinen kuva, johon on lisätty pituusalkiovektori ***dl***.



Huomataan, että pituusalkiovektorit ovat Ampèren silmukan joka kohdassa samansuuntaisia *B*-kenttävektoreiden kanssa.

Ampèren lain vasemman puolen laskeminen.

Ampèren lain vasen puoli lasketaan seuraavasti:

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \oint_C B dl = B \oint_C dl = B \cdot 2\pi r$$

Ampèren silmukan kohdalla *B*-kenttä ja *dl* yhdensuuntaisia.

Ampèren silmukan kohdalla *B* on vakio.

Tuo integraali tarkoittaa pelkkää Ampèren silmukan pituutta.

Ampèren lain oikean puolen laskeminen.

Ampèren lain oikealla puolella oleva I_{SIS} tarkoittaa Ampèren silmukan läpi kulkevia virtoja eli tässä tapauksessa pitkän suoran sisäjohtimen virtaa *I*. Oikea puoli saadaan muotoon $\mu_0 I$

Yhdistetään Ampèren lain vasen ja oikea puoli ja ratkaistaan yhtälöstä *B*-kenttä.

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

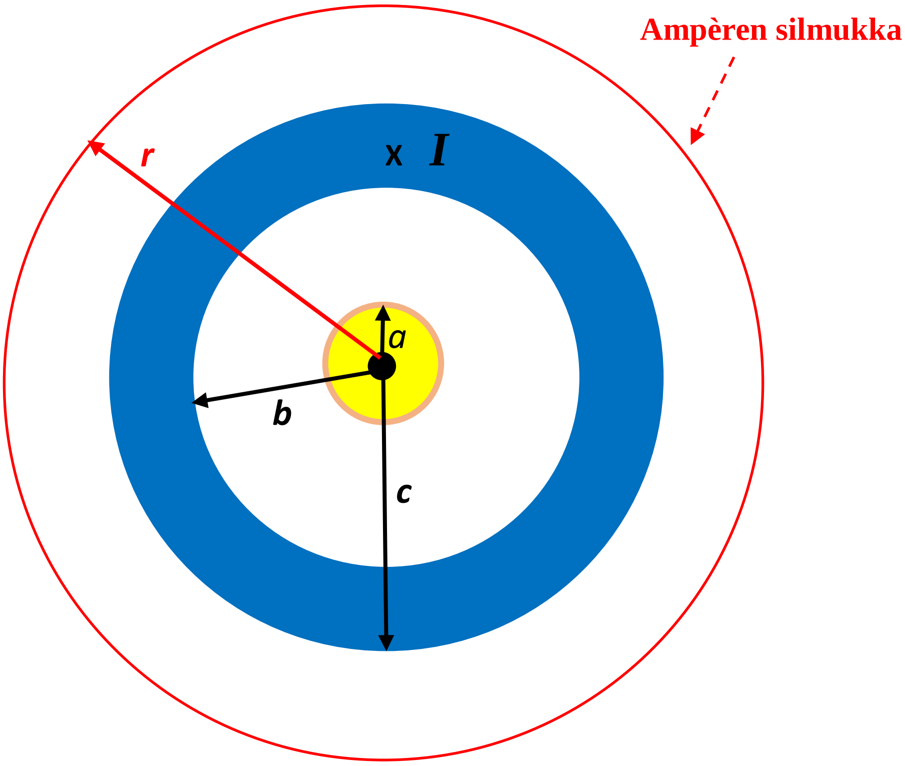
$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

b) Lasketaan B-kentän lauseke kaapelin ulkopuolella, jossa $r > c$.

Käytetään edelleen Ampèren lakia

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I_{sis}$$

Piirretään Ampèren silmukka kaapelin ulkopuolelle.



Ulkojohdossa kulkee virta I paperin tasosta sisäänpäin poispäin katsojasta ja sisäjohdossa virta I paperin tasosta ulospäin katsojaa kohden. Täten Ampèren silmukan läpi kulkevien virtojen summa on nolla eli $I_{SIS} = 0$. Ampèren lain oikea puoli tulee nollaksi, joten vasemman puolenkin täytyy olla nolla. Siitä seuraa, että

$$B = 0$$

4.

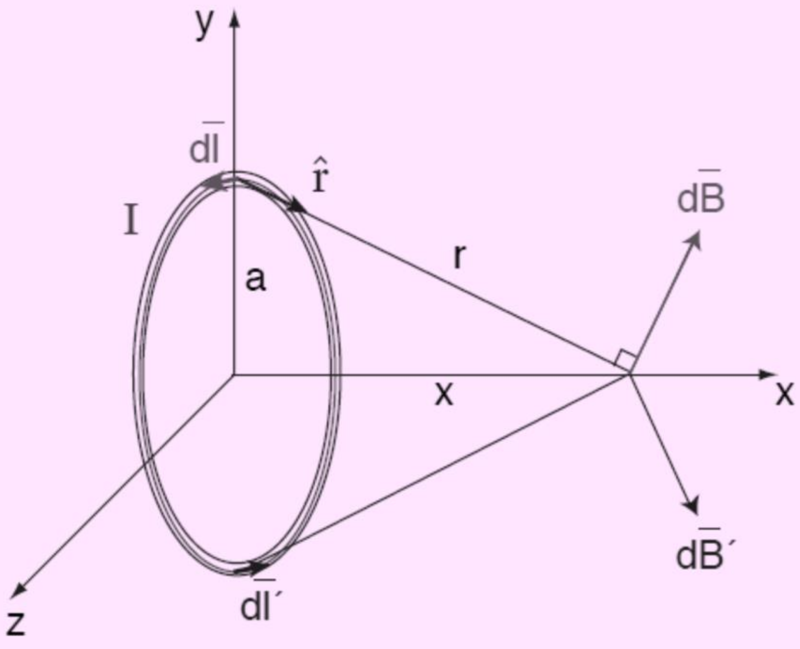
Yritetään saavuttaa hyvin voimakas magneettikenttä 37,2 T ”tavallisilla” keinoilla.

a) Käytetään pitkän suoran virtajohtimen kenttää, joka on johdettu tehtävässä 5:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \rightarrow I = \frac{2B\pi r}{\mu_0} = \frac{2 \cdot 37{,}2\ T \cdot \pi \cdot 0{,}02\ m}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}} = \mathbf{3,72 \cdot 10^{6} A}$$

b) Magneettikenttä ympyränmuotoisen johdinsilmukan keskipisteessä saadaan laskettua Biot-Savartin lain avulla. Haetaan tähän tietoa Anita Aikion luentomateriaalista:

Useat sähköiset laitteet sisältävät osia, joissa on pyöreitä virtasilmukoita tai keloja, joiden virtajohdin on kiedottu niin tiiviisti, että sitä voidaan approksimoida usealla vierekkäisellä virtasilmukalla. Biot-Savartin lain avulla voidaan laskea virtasilmukan synnyttämä magneettikenttä silmukan akselilla.



Pyöreän virtasilmukan tuottama magneettikenttä silmukan akselilla etäisyydellä x silmukasta, kun silmukan säde on a ja silmukassa kulkee virta I on siten

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \,. \qquad (28.15)$$

Tässä tapauksessa eli ympyrän keskipisteessä $x = 0$, joten yllä oleva kaava typistyy muotoon: $= \frac{\mu_0 I}{2a}$

Koska silmukassa on N johdinkierrosta, kerrotaan B-kenttä N:llä ja ratkaistaan yhtälöstä virta;

$$B = N\frac{\mu_0 I}{2a} \rightarrow I = \frac{2Ba}{N\mu_0} = \frac{2 \cdot 37{,}2\ T \cdot 0{,}420\ m}{100 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am}} = \mathbf{2{,}49 \cdot 10^5 A}$$

c) Käytetään solenoidin kenttää. Sen yhtälö löytyy Anita Aikion materiaalista:

Ampèren lakia soveltaen. Tulos on

$$B = \mu_0 n I \,, \qquad (28.23)$$

missä n on kierrosten lukumäärä pituusyksikköä kohti.

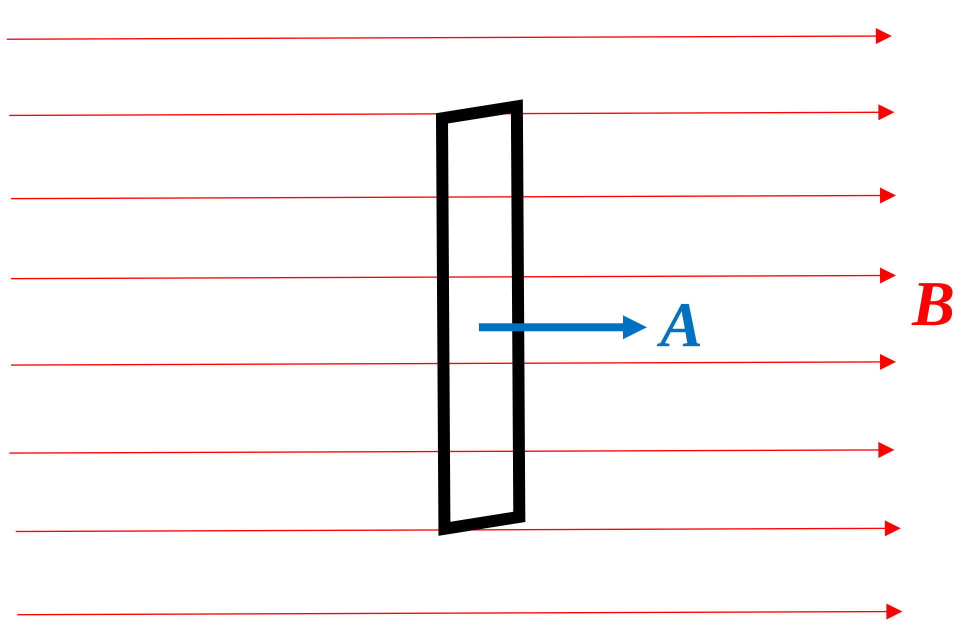
Nyt ei anneta kierrosten lukumäärää pituusyksikköä kohden vaan kierrokset N ja solenoidin pituus L. Näistä saamme kierrokset pituusyksikköä kohden

$$n = N/L$$

Ratkaisemme yllä olevasta yhtälöstä virran:

$$I = \frac{B}{n\mu_0} = \frac{BL}{N\mu_0} = \frac{37{,}2\ T \cdot 0{,}320\ m}{40\,000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am}} = \mathbf{237\ A}$$

5.

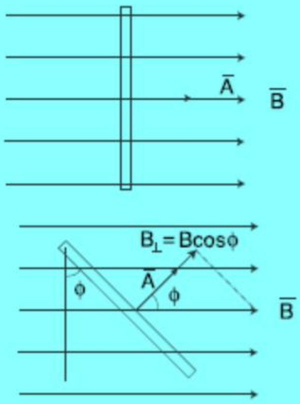


a) Lasketaan kelan läpi menevä kokonaismagneettivuo yllä olevan kuvan mukaisessa tilanteessa. Anita Aikion monisteesta:

Samoin kuin määriteltiin sähkökentän vuo kappaleessa 23.3, voidaan määritellä **magneettivuo** (*magnetic flux*) Φ_B, kun pinta on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan

$$\Phi_B = BA\,.$$

Kentän vuon yksikkö SI-järjestelmässä on 1 Tm^2=1 Vs=1 Wb, Weber. Mikäli pinta ei ole kohtisuorassa kenttää vastaan, eli $\vec{\mathbf{A}}$ ei ole yhdensuuntainen vektorin $\vec{\mathbf{B}}$ kanssa, on vuota määrättäessä tarkasteltava kentän projektiota kohtisuoraan pintaa vastaan. Kentän kohtisuora projektio on $B_\perp = B\cos\phi$, missä ϕ on $\vec{\mathbf{A}}$:n ja $\vec{\mathbf{B}}$:n välinen kulma.



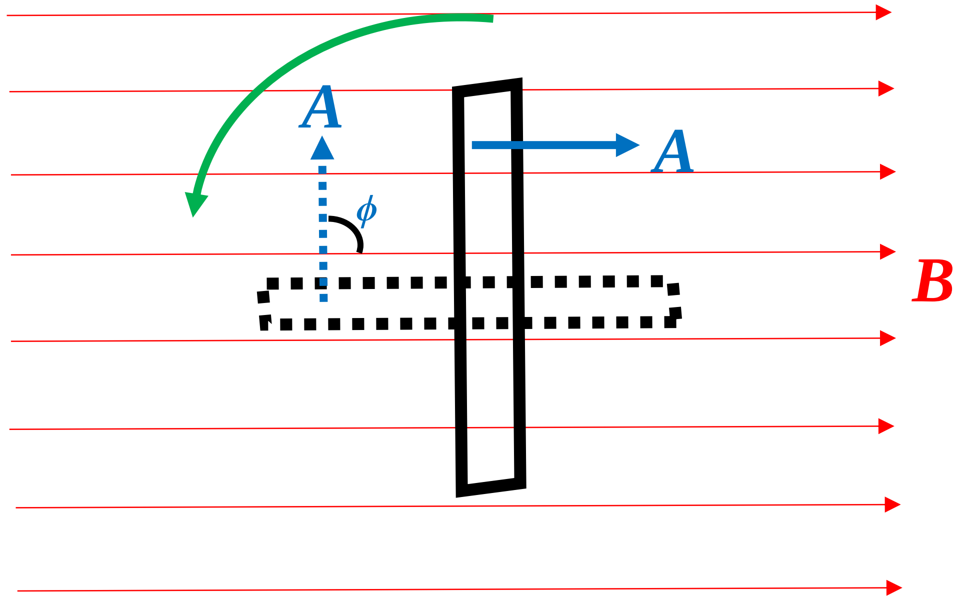
Nyt $\Phi_B = \bar{B} \cdot \bar{A} = BAcos\phi = BAcos0 = BA = 60 \cdot 10^{-6}\, T \cdot 12 \cdot 10^{-4}\, m^2$

$\rightarrow \boldsymbol{\Phi_B = 7,2 \cdot 10^{-8}\, Vs}$ $\quad\quad$ $\left[Tm^2 = \frac{Vs}{m^2} m^2 = Vs\right]$

b) Lasketaan kelaan indusoituva jännite. Anita Aikion monisteesta:

Jos kelassa on N kierrosta, kuhunkin kierrokseen indusoituu yhtäsuuri lähdejännite ja kokonaisjännite ("sarjaankytkentä") on

$$\boxed{\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt}}, \qquad (29.4)$$

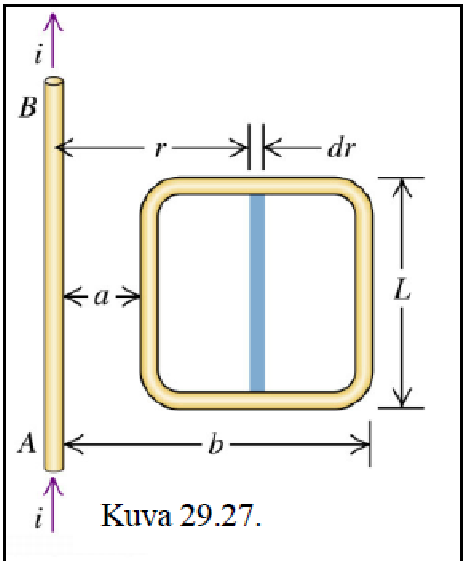


$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \approx -N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -N\frac{\Delta\Phi_{B2} - \Delta\Phi_{B1}}{\Delta t} = -N\frac{BAcos90° - BAcos0°}{\Delta t}$$

$$= -N\frac{BA(0-1)}{\Delta t} = N\frac{BA}{\Delta t} = 200 \cdot \frac{60 \cdot 10^{-6}\,T \cdot 12 \cdot 10^{-4}\,m^2}{0{,}04\,s} = \mathbf{3{,}6 \cdot 10^{-4}\,Vs}$$

$$\left[\frac{T}{s}m^2 = \frac{Vs}{m^2 s}m^2 = V\right]$$

6.



Kuva 29.27.

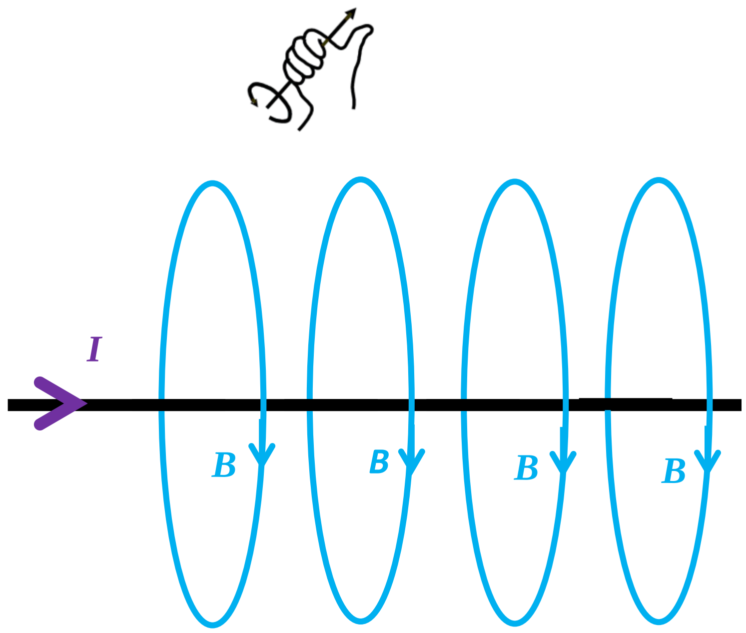
a) Johdetaan aluksi pitkän suoran virtajohtimen (virta *I*) aiheuttaman magneettikentän lauseke johtimen ulkopuolella etäisyydellä *r* johtimesta (=johtimen keskiakselista) käyttämällä Ampèren lakia

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I_{sis}$$

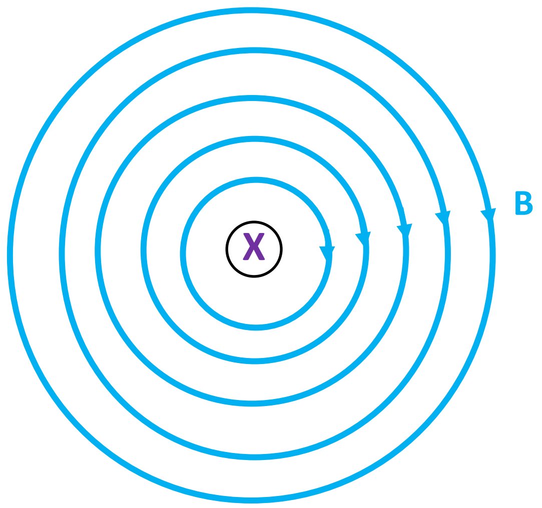
$\bar{B}$ = magneettivuon tiheys Ampèren silmukan kohdalla
$d\bar{l}$ = pituusalkiovektori Ampèren silmukassa
I_{SIS} = suljetun silmukan läpi kulkevat virrat
C = Ampèren silmukan pituus

B-kentän kenttäviivojen piirtäminen

Alla olevassa kuvassa on pitkän suoran virtajohtimen aiheuttamia *B*-kenttäviivoja. *B*-kentän suunta on määritetty oikean käden "nyrkkisäännön" avulla: Kun puristetaan johdinta oikealla kädellä ja peukalo osoittaa virran suuntaan, muut sormet osoittavat magneettikentän suuntaan.

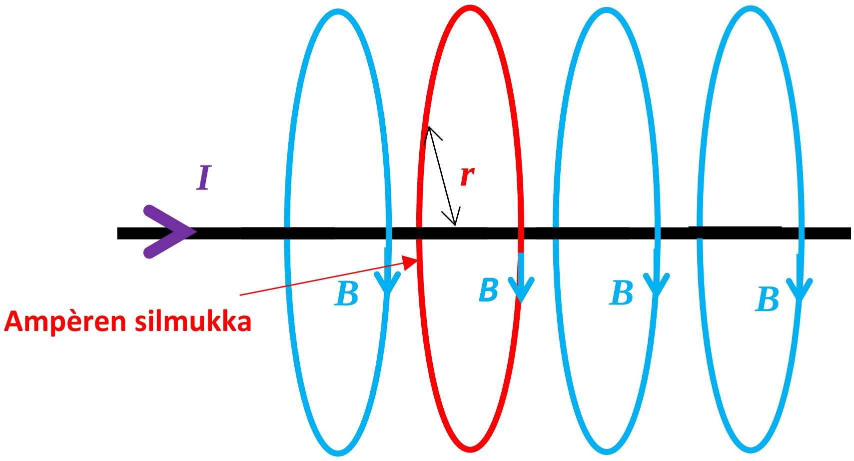


Sivusta katsottuna *B*-kenttäviivat "näyttävät" tältä:



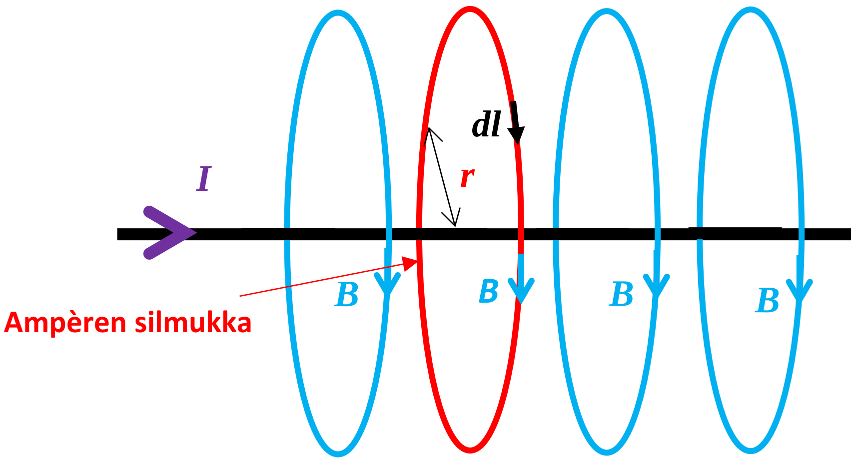
Ampéren silmukan valinta ja piirtäminen kuvaan.

Pitkille suorille johtimille valitaan suljetuksi Ampéren silmukaksi ympyrä. Alla olevassa kuvassa on edellä esitettyyn kuvaan lisätty Ampéren silmukka, jonka on *r*-säteinen ympyrä.



Pituusalkiovektoreiden piirtäminen Ampèren silmukkaan.

Pituusalkiovektorit ovat (Ampèren) silmukan suuntaisia. Alla olevassa kuvassa on edellinen kuva, johon on lisätty pituusalkiovektori ***dl***.



Huomataan, että pituusalkiovektorit ovat Ampèren silmukan joka kohdassa samansuuntaisia *B*-kenttävektoreiden kanssa.

Ampèren lain vasemman puolen laskeminen.

Ampèren lain vasen puoli lasketaan seuraavasti:

$$\oint_C \overline{B} \cdot d\overline{l} = \oint_C B dl = B \oint_C dl = B \cdot 2\pi r$$

Ampèren silmukan kohdalla *B*-kenttä ja *dl* ovat yhdensuuntaisia.

Ampèren silmukan kohdalla *B* on vakio.

Tuo integraali tarkoittaa pelkkää Ampèren silmukan pituutta.

Ampèren lain oikean puolen laskeminen.

Ampèren lain oikealla puolella oleva I_{SIS} tarkoittaa Ampèren silmukan läpi kulkevia virtoja eli tässä tapauksessa pitkän suoran johtimen virtaa *i*. Oikea puoli saadaan muotoon $\mu_0 i$

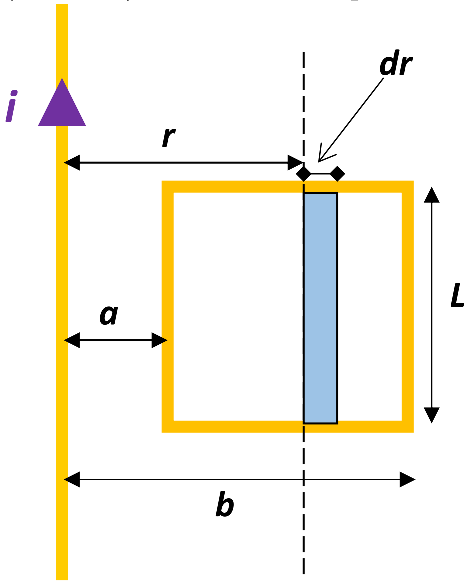
Yhdistetään Ampèren lain vasen ja oikea puoli ja ratkaistaan yhtälöstä *B*-kenttä.

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 i \rightarrow \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{\mu_0 i}}{\boldsymbol{2\pi r}}$$

Magnaattikentän suunta saadaan oikean käden ”nyrkkisäännöstä”:

Kun peukalo osoittaa virran suuntaan, muut sormet osoittavat magneettikentän suuntaan. Johtimen oikealla puolella magneettikenttä on siis katsojasta poispäin, paperin sisään.

b) Nyt pitää määrittää se magneettivuo dΦ_B, mikä menee alla olevassa kuvassa olevan ohuen (sinisen) kaistaleen läpi.

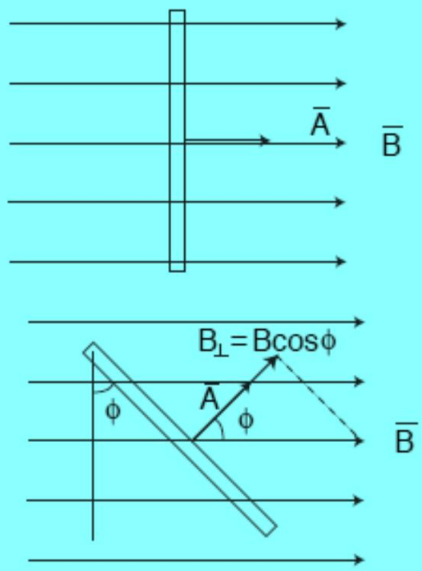


Magneettivuosta on Anita Aikion materiaalissa kerrottu seuraavaa:

Samoin kuin määriteltiin sähkökentän vuo kappaleessa 23.3, voidaan määritellä **magneettivuo** (*magnetic flux*) Φ_B, kun pinta on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan

$$\Phi_B = BA \,.$$

Kentän vuon yksikkö SI-järjestelmässä on 1 Tm^2=1 Vs=1 Wb, Weber. Mikäli pinta ei ole kohtisuorassa kenttää vastaan, eli $\vec{A}$ ei ole yhdensuuntainen vektorin $\vec{B}$ kanssa, on vuota määrättäessä tarkasteltava kentän projektiota kohtisuoraan pintaa vastaan. Kentän kohtisuora projektio on $B_\perp = B\cos\phi$, missä ϕ on $\vec{A}$:n ja $\vec{B}$:n välinen kulma.



Koska $\vec{B}$:n suuruus ja suunta voi muuttua pisteestä toiseen, on pintaelementin $d\vec{A}$ läpi kulkeva vuo

$$d\Phi_B = B_\perp dA = B\cos\phi dA = \vec{B}\cdot d\vec{A} \qquad (27.5)$$

Kokonaisvuo pinnan läpi on

$$\boxed{\Phi_B = \int B_\perp dA = \int B\cos\phi dA = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}} \; . \qquad (27.6)$$

Sininen kaistale on hyvin kapea (äärettömän kapea), joten voimme olettaa, että B -kenttä on vakio kaistaleen alueella. Lisäksi B –kenttä ja kaistale ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten pinta(-alkio)vektori on yhdensuuntainen B –kentän kanssa. Kaistaleen pinta-ala dA = Ldr. Nyt voimme kirjoittaa:

$$d\Phi_B = B_\perp dA = BLdr = \boldsymbol{\frac{\mu_0 iLdr}{2\pi r}}$$

c) Koko silmukan läpi menevä vuo saadaan integroimalla yllä oleva lauseke (ainoan) paikkamuuttujan r suhteen, joka muuttuu a:sta b:hen:

$$\Phi_B = \int_a^b \frac{\mu_0 iLdr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 iL}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 iL}{2\pi}[lnb - lna] = \boldsymbol{\frac{\mu_0 iL}{2\pi} ln\frac{b}{a}}$$

d) Indusoituvasta lähdejännitteestä kerrotaan Anita Aikion monisteessa näin:

Faradayn lain mukaan **suljettuun virtasilmukkaan indusoitunut lähdejännite on yhtäsuuri ja vastakkaismerkkinen kuin silmukan läpi kulkevan magneettivuon muutos.**

Sama voidaan esittää kaavana

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}} \; , \qquad (29.3)$$

Tässä tapauksessa vuon lausekkeessa ainoa aikamuuttuja on i:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\boldsymbol{\frac{\mu_0 L}{2\pi} ln\left[\frac{b}{a}\right]\frac{di}{dt}}$$

e) Lasketaan vielä lukuarvo edellä esitetylle lähdejännitteelle:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 L}{2\pi} ln\left[\frac{b}{a}\right]\frac{di}{dt} = -\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}\cdot 0{,}240\ m}{2\pi} ln\left[\frac{0{,}360\ m}{0{,}120\ m}\right]\cdot 9{,}60\ \frac{A}{s}$$

$$= \boldsymbol{-5{,}06\cdot 10^{-7}\ V}$$

7.

a) Anita Aikion luentomateriaalista:

29.4 Liikkeen synnyttämä lähdejännite

Esimerkissä 29.6 tutkittiin metallisauvaa, joka liikkui kohtisuorassa magneettikentässä $\vec{B}$ olevan U-muotoiseen johteen päällä nopeudella $\vec{v}$. Tällöin sauvaan indusoitui lähdejännite ε

$$\varepsilon = vBL\ , \qquad (29.6)$$

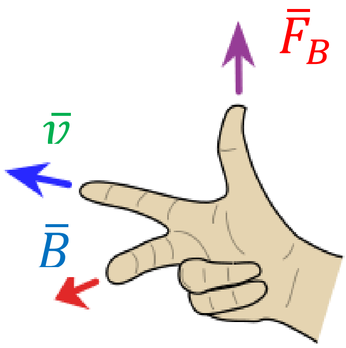
missä L on sauvan pituus. Kyseessä on generaattori, joka muuttaa mekaanista energiaa (voima, joka pitää sauvan liikkeessä) sähköiseksi energiaksi. Lähdejännite syntyy sauvaan, vaikka se ei olisikaan osa suljettua virtapiiriä.

$$\varepsilon = vBL = 7{,}50\,\frac{m}{s}\cdot 0{,}800\,\frac{Vs}{m^2}\cdot 0{,}50\,m = \mathbf{3{,}00\ V}$$

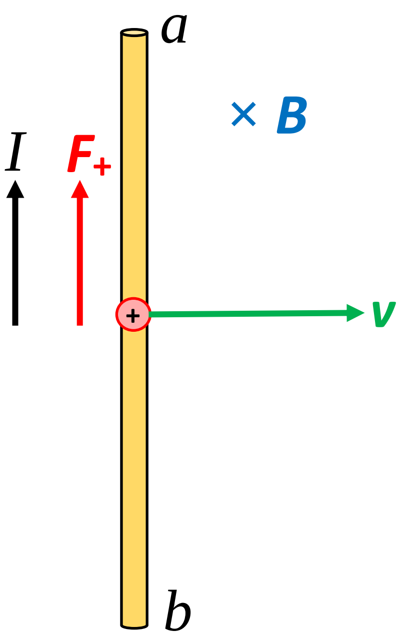
b) Syntyvän virran suunta on sama kuin positiivisten varausten kulkusuunta. Magneettikentässä liikkuvaan varaukseen vaikuttaa voima

$$\bar{F} = q\bar{v}\times\bar{B}$$

Johde sisältää tunnetusti vapaita varauksia, joihin siis vaikuttaa voima, joka noudattaa yllä olevaa yhtälöä. Voiman suunta saadaan oikean käden kolmisormisäännöstä:



Kolmisormisäännön perusteella positiiviseen varaukseen vaikuttava voima on alla olevan kuvan mukainen. Virran suunta on sama kuin positiivisen varauksen suunta.



VASTAUS: Virta kulkee kuvassa ylöspäin eli b:stä a:han.

c) Kun virtajohdin on magneettikentässä, siihen vaikuttaa voima

$$\bar{F} = I\bar{l} \times \bar{B}$$

Nyt johdin eli liikkuva sauva on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan, jolloin voiman suuruudeksi saamme $F = ILB sin 90° = ILB$

Laskemme liikkuvassa metallisauvassa kulkevan virran I tutulla kaavalla

$$V = RI \rightarrow I = \frac{V}{R}$$

$$\rightarrow F = \frac{V}{R}LB = \frac{\varepsilon}{R}LB = \frac{vLB}{R}LB = \frac{v(LB)^2}{R} = \frac{7{,}50\,\frac{m}{s} \cdot \left(0{,}50\,m \cdot 0{,}800\,\frac{Vs}{m^2}\right)^2}{1{,}50\,\Omega}$$

$\boldsymbol{F = 0,800\ N}$ $\left[\frac{\frac{m}{s}\left(m\frac{Vs}{m^2}\right)^2}{\Omega} = \frac{\frac{m}{s}\left(\frac{Vs}{m}\right)^2}{\frac{V}{A}} = \frac{VAs}{m} = \frac{J}{m} = \frac{Nm}{m} = N\right]$

d) Lämmöksi muuttuva teho

$$P = VI = V\frac{V}{R} = \frac{V^2}{R} = \frac{(vLB)^2}{R} = \frac{\left(7{,}50\,\frac{m}{s} \cdot 0{,}50\,m \cdot 0{,}800\,\frac{Vs}{m^2}\right)^2}{1{,}50\,\Omega} = \boldsymbol{6,00\ W}$$

Voiman teho

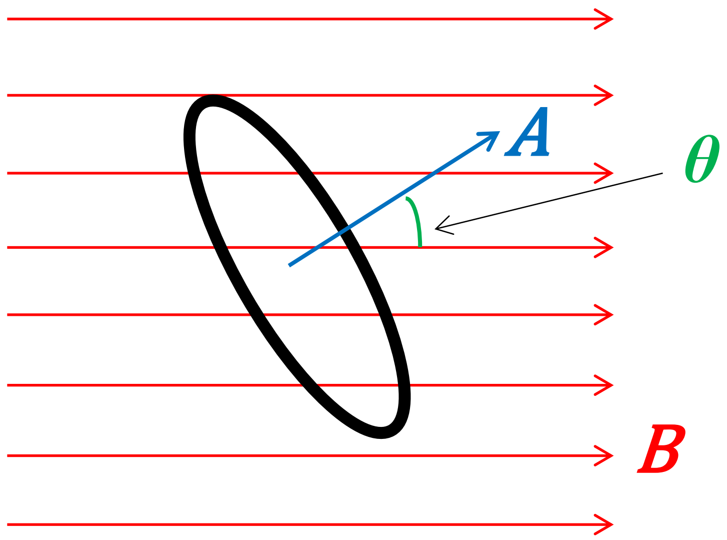
$$P = Fv = 0{,}800\ N \cdot 7{,}50\ \frac{m}{s} = \boldsymbol{6{,}00\ W}$$

Tehot ovat samat.

8.

Käytät sähkömagneettista induktiota 9 voltin jännitteen aikaansaamiseksi. Mukana autiolla saarella sattuu jostain syystä olemaan todella pitkästi johdinta, josta teet 2000 kierroksen kelan. Kun pyörität kelaa maan vakiomagneettikentässä, silmukkaan indusoituu lähdejännite. Helppoa ja kätevää! (Tai sitten ei.)

Lähdejännite syntyy johdinsilmukkaan, kun silmukan läpi menevä magneettikentän vuo muuttuu. Tässä tehtävässä vuon muutos saadaan aikaan pyörittämällä silmukkaa.



Magneettikentän vuo lasketaan ulkoisesta magneettikentästä ja silmukan (silmukoiden) pinta-alasta seuraavasti:

$$\Phi_B = \bar{B} \cdot \bar{A} = BAcos\theta$$

Tässä vektori $\bar{A}$ on pinta-alavektori, jonka suunta on kohtisuorassa silmukan pintaa vastaan. Nyt kulma θ muuttuu ajan funktiona, kun pyörität kelaa, jossa on N silmukkaa.

Lähdejännite syntyy seuraavan yhtälön mukaisesti:

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Derivoidaan lauseketta θ:n suhteen, joka on ainoa muuttuja:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -N\frac{d(BAcos\theta)}{dt} = -NBA\frac{d(cos\theta)}{dt}$$

$$= NBAsin\theta\frac{d\theta}{dt} = NBAsin\theta\omega$$

Pyörität johdinsilmukoista rakennettua kelaa 30 kierrosta minuutissa. Kulmanopeus ω on tällöin:

$$\omega = \frac{30 \cdot 2\pi\, rad}{60\, s} = \pi\, rad/s$$

a) Tehtävässä kysytään kelan pinta-alaa. Ratkaistaan se yllä olevasta yhtälöstä:

$$\varepsilon = NBAsin\theta\omega \ \rightarrow A = \frac{\varepsilon}{NBsin\theta\omega}$$

Lähdejännite muuttuu koko ajan, koska kulma θ muuttuu. Käytetään lähdejännitteen maksimiarvoa, joka saadaan silloin, kun sin$\theta = 1$. Nyt voidaan laskea pinta-alalle numeroarvo:

$$A = \frac{\varepsilon}{NB\omega} = \frac{9\,V}{2000 \cdot 8 \cdot 10^{-5}\,T \cdot \pi\, rad/s} = \mathbf{17,9\ m^2}$$

Muista, että T = Vs/m^2 ja radiaani käytännössä = 1.

b) Oletetaan kela ympyränmuotoiseksi. Jotta yllä laskettu pinta-ala saavutettaisiin, ympyrän säteen tulee olla

$$A = \pi r^2 \rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2{,}39\ m$$

Ympyrän kehällä olevan pisteen vauhti, kun kulmanopeus on ω, saadaan muistelemalla (perus)mekaniikan kurssia:

$$v = \omega r = \mathbf{7,5\ m/s}$$

KOVASTI VAIKUTTAA HANKALALTA. SILMUKKA ON SUURI JA NOPEUS KOVA. EI LIENE KÄYTÄNNÖSSÄ MAHDOLLISTA. VÄLTTÄKÄÄMME SIIS HAAKSIRIKKOJA!