761119P Sähkömagnetismi 1
2. laskuharjoitus, kevät 2019

1. Pistevaraus, varaukseltaan $Q = +5{,}50\ \mu C$, pidetään paikallaan origossa. Toinen pistevaraus, varaukseltaan $q = +2{,}20\ \mu C$ ja massaltaan $m = 2{,}80 \cdot 10^{-5}$ kg, sijoitetaan x-akselille 0,200 m etäisyydelle origosta.

a) Mikä on varausparin sähköinen potentiaalienergia U? (Oleta U nollaksi, kun varaukset ovat äärettömän kaukana toisistaan.)

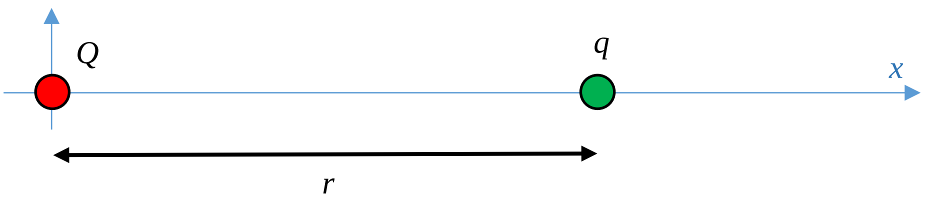
b) Pistevaraus q päästetään irti. Mikä on sen nopeus, kun sen etäisyys origosta on i) 0,500 m? ii) 10,00 m? iii) 50,0 m?

a) Anita Aikion monisteesta saadaan yhtälö kahden varauksen väliselle potentiaalienergialle:

Kaavojen (23.2) ja (23.8) perusteella havaitsemme, että pistevarauksen potentiaalienergian on oltava muotoa

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r}}\ . \tag{23.9}$$

Potentiaalienergia on positiivinen, jos varaukset ovat samanmerkkisiä ja negatiivinen, jos erimerkkisiä.



Nyt

$q = +2{,}20 \cdot 10^{-6} C$

$q_0 = Q = +5{,}50 \cdot 10^{-6} C$

$r = 0{,}200\ m$

$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\ As/Vm$ **Muista: VAs = J ja C = As**

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+2{,}20 \cdot 10^{-6} C \cdot +5{,}50 \cdot 10^{-6} C}{0{,}200\ m} \approx \mathbf{0{,}544\ J}$$

b) Perusmekaniikan kurssilla esitettiin energian säilymisyhtälö tilanteessa, jossa mukana on vain konservatiivisia voimia:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

Tässä yhtälössä U_1 on potentiaalienergia alussa, K_1 kineettinen energia alussa, U_2 potentiaalienergia lopussa ja K_2 kineettinen energia lopussa. Konservatiivisia voimia ovat sellaiset, joihin liittyy potentiaalienergia, esimerkiksi sähköinen voima, ideaalisen jousen voima, maan vetovoima ja niin edelleen.

Nyt $K_1 = 0$, koska molemmat varaukset olivat aluksi paikallaan. Kun varaus q siirtyy alkuperäisestä paikasta r_1 paikkaan r_2, potentiaalienergian muutos siirtyy varauksen kineettiseksi energiaksi.

$$\rightarrow K_2 = U_1 - U_2 \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_2}$$

$$\rightarrow v = \left[\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right]^{1/2} \qquad m = 2{,}80 \cdot 10^{-5}\,kg$$

i) $r_2 = 0{,}500$ m $\longrightarrow$ v = <u>153 m/s</u>

ii) $r_2 = 10{,}00$ m $\longrightarrow$ v = <u>195 m/s</u>

iii) $r_2 = 50{,}00$ m $\longrightarrow$ v = <u>197 m/s</u>

Yksikkötarkastelu: $\frac{AsAs}{\frac{As}{Vm}kgm} = \frac{VAs}{kg} = \frac{J}{kg} = \frac{Nm}{kg} = \frac{kgm^2}{kgs^2} = \frac{m^2}{s^2}$

VINKKI: Älä sekoita käsitteitä potentiaali ja potentiaalienergia. Potentiaali on olemassa, vaikka alueella ei olisi varausta, johon kyseinen potentiaali vaikuttaa.

2. Kahden paikallaan olevan pistevarauksen, +4,00 nC ja -2,00 nC, välinen etäisyys on 50,0 cm. Elektroni päästetään vapaaksi keskellä varausten välistä yhdysjanaa, jolloin se lähtee liikkeelle pitkin kyseistä janaa. Mikä on elektronin nopeus silloin, kun sen etäisyys +4,00 nC:n varauksesta on 10,0 cm?

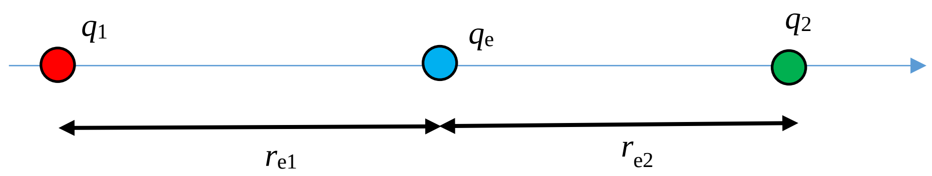
Usean varauksen systeemin potentiaalienergia Anita Aikion luentomonisteesta:

Kun varausten q_i ja q_j välinen etäisyys on r_{ij}, varausjakauman kokonaispotentiaalienergia on

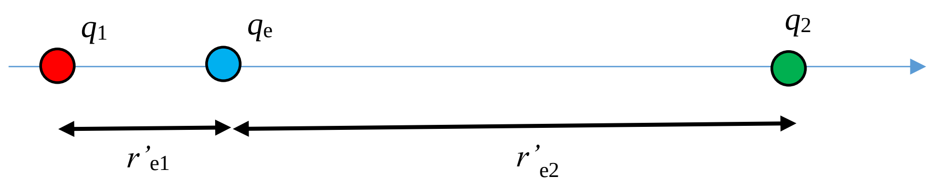
$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}} . \qquad (23.11)$$

Summa ulottuu yli kaikkien varausparejen, mutta mitään paria ei lasketa kahdesti eikä varaus voi myöskään vuorovaikuttaa itsensä kanssa, tämän vuoksi $i < j$.

Alussa:



Lopussa:



Näiden kolmen pistevarauksen muodostaman systeemin potentiaalienergia on alussa

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_e}{r_{e1}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_e}{r_{e2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

ja lopussa

Tämä termi pysyy samana, joten tämä ei vaikuta lopputulokseen.

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_e}{r'_{e1}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_e}{r'_{e2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Perusmekaniikan kurssilla esitettiin energian säilymisyhtälö tilanteessa, jossa mukana on vain konservatiivisia voimia:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

Tässä yhtälössä U_1 on potentiaalienergia alussa, K_1 kineettinen energia alussa, U_2 potentiaalienergia lopussa ja K_2 kineettinen energia lopussa. Nyt $K_1 = 0$, koska kaikki varaukset olivat aluksi paikallaan. Kun elektroni q_e liikkuu alkuperäisestä paikasta lähemmäksi varausta q_1, potentiaalienergian muutos siirtyy elektronin kineettiseksi energiaksi.

$$\rightarrow K_2 = U_1 - U_2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_e}{r_{e1}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_e}{r_{e2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

$$-\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_e}{r'_{e1}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_e}{r'_{e2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{e1}} + \frac{q_2}{r_{e2}} - \frac{q_1}{r'_{e1}} - \frac{q_2}{r'_{e2}}\right)$$

$$\rightarrow v = \left[\frac{q_e}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{q_1}{r_{e1}} + \frac{q_2}{r_{e2}} - \frac{q_1}{r'_{e1}} - \frac{q_2}{r'_{e2}}\right)\right]^2 = \mathbf{9{,}24 \cdot 10^6 \, m/s}$$

Lukuarvoja:

$q_e = -1{,}6022 \cdot 10^{-19} C$
$q_1 = +4{,}00 \cdot 10^{-6} C$
$q_2 = -2{,}00 \cdot 10^{-6} C$
$r_{e1} = 0{,}25\, m$
$r_{e2} = 0{,}25\, m$
$r'_{e1} = 0{,}10\, m$
$r'_{e2} = 0{,}40\, m$
$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\, C/Vm$
$m_e = 9{,}10939 \cdot 10^{-31}\, kg$

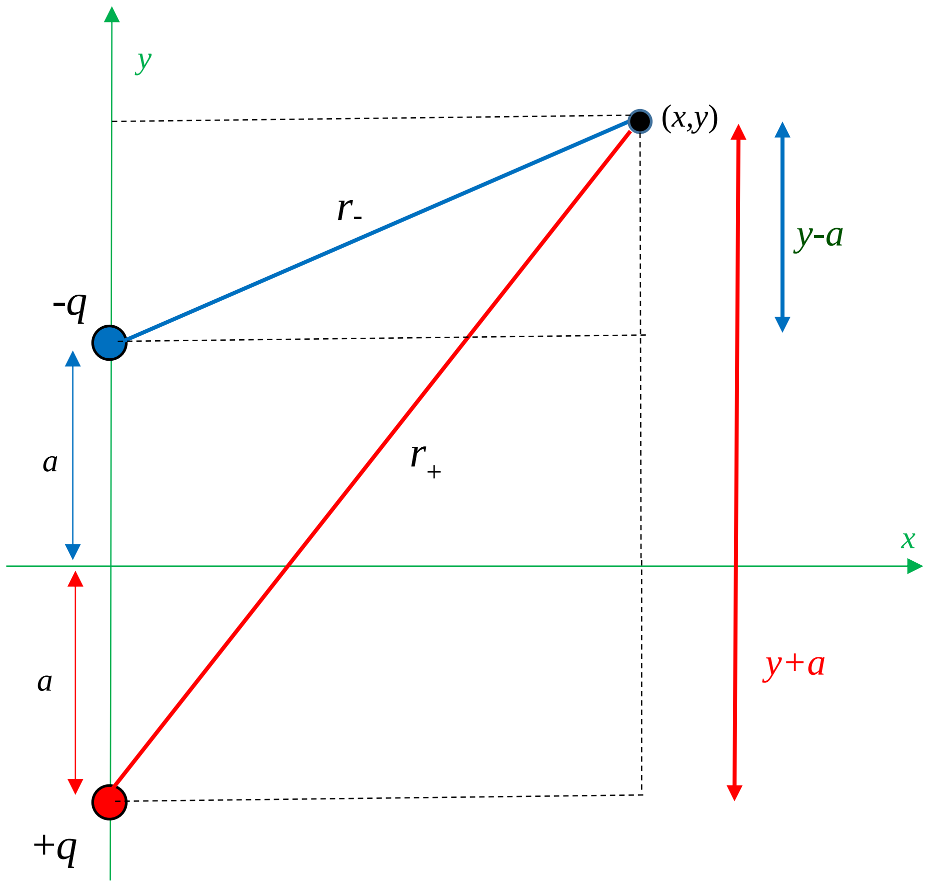
Yksikkötarkastelu: $\frac{AsAs}{\frac{As}{Vm}kgm} = \frac{VAs}{kg} = \frac{J}{kg} = \frac{Nm}{kg} = \frac{kgm^2}{kgs^2} = \frac{m^2}{s^2}$

3. Varaus $+q$ laitetaan kohtaan $x=0$, $y=-a$ ja varaus $-q$ kohtaan $x=0$, $y=a$.
a) Johda varausten aiheuttama kokonaispotentiaali $V(x,y)$ x:n ja y:n funktiona.
b) Piirrä potentiaalin kuvaaja x-akselilla välillä x=[-4a, 4a] ja y-akselilla välillä y=[-4a, 4a].
c) Osoita, että jos $y>>a$ potentiaali y-akselilla on $V=-(1/4\pi\varepsilon_0)2qa/y^2$

Anita Aikion monisteesta:

Pistevarauksen q potentiaalin saamme jakamalla kaavasta (23.9) potentiaalienergian varauksella q_0

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}}, \qquad (23.14)$$



$r_- = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}$ $\quad$ $r_+ = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}$

a) Määritetään kahden varauksen aiheuttama kokonaispotentiaali pisteessä (*x*,*y*)

Negatiivisen varauksen aiheuttama potentiaali pisteessä (*x*,*y*):

$$V_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}$$

Positiivisen varauksen aiheuttama potentiaali pisteessä (*x*,*y*):

$$V_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{r_+} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}$$

Kokonaispotentiaali pisteessä (*x*,*y*):

$$V = V_- + V_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}\right)$$

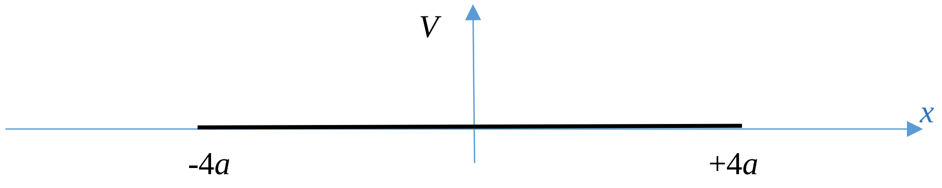
b) Määritetään potentiaali *x*-akselilla ja potentiaali *y*-akselilla

x-akselilla *y* = 0.

$$\rightarrow V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) = 0$$

Kuvaaja:



y-akselilla $x = 0$.

$$\rightarrow V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}\right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(y+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(y-a)^2}}\right)$$

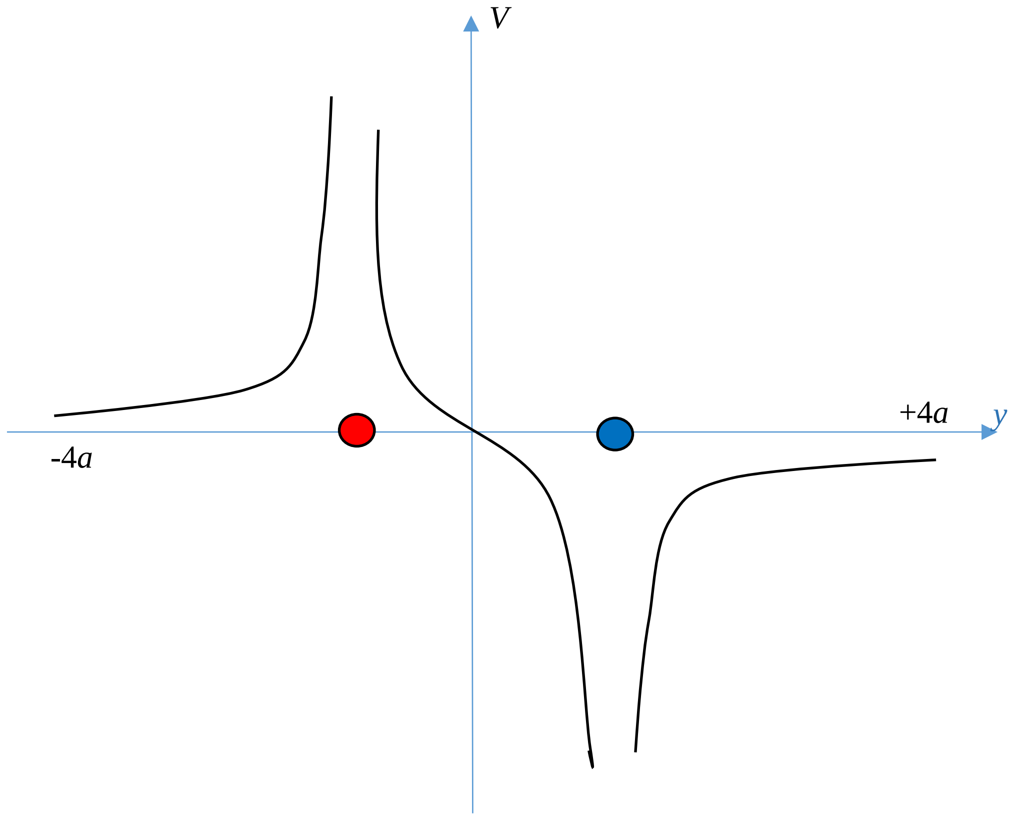
Kuvaajan hahmotteleminen:

1. Etsitään epäjatkuvuuskohdat:
   - Kun $y \rightarrow a, V \rightarrow -\infty$ (eli sulkujen sisällä oikeanpuoleisen termi lähestyy miinus ääretöntä, koska sen nimittäjä lähestyy nollaa. Tämä käy järkeen, koska negatiivinen varaus on kohdassa $y = a$.)
   - Vastaavasti, kun $y \rightarrow -a, V \rightarrow \infty$. (Positiivinen varaus on kohdassa $y = a$, joten siinä potentiaali lähestyy plus ääretöntä)
2. Mietitään mikä on potentiaalin raja-arvo, kun y lähestyy plus ja miinus ääretöntä:
   - Jos y kasvaa suureksi (riippumatta merkistä), sulkujen sisällä oleva lauseke lähenee nollaa. Potentiaalin raja-arvo äärettömyydessä on siis 0.
3. Voit laskea myös muutamia piste-arvoja potentiaalille eri y:n arvoilla.
   - Lasketaan potentiaali, kun $y = 0$:

$$V(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(0+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(0-a)^2}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 0$$

Nyt meillä on riittävästi tietoa funktion käyttäytymisestä. Origossa sen arvo on 0; äärettömyydessä se lähenee asymptoottisesti nollaa; kun y lähestyy a:ta, potentiaali lähestyy miinus ääretöntä; ja kun y lähestyy $-a$:ta, potentiaali lähestyy plus ääretöntä.

Huom! Yleisessä tapauksessa, jos haluat hahmotella kuvaajaa, voit laskea esimerkiksi enemmän pistearvoja ja etsiä sekä funktion että sen ensimmäisen derivaatan nollakohdat.



c) Tarkastellaan potentiaalia *y*-akselilla, kun *y* >> *a*.

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(y+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(y-a)^2}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{y+a} - \frac{1}{y-a}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y-a}{(y+a)(y-a)} - \frac{y+a}{(y-a)(y+a)}\right]$$

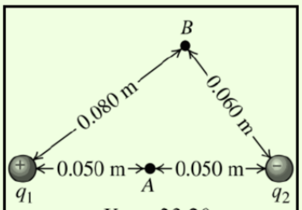
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y-a-y-a}{(y+a)(y-a)}\right] = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2a}{y^2-a^2}\right] \approx -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2a}{y^2} = -\frac{qa}{2\pi\varepsilon_0 y^2}$$

4. Kaksi pistevarausta, $q_1 = +3{,}50$ nC ja $q_2 = -5{,}50$ nC, ovat 0,100 metrin etäisyydellä toisistaan. Piste A on niiden puolivälissä ja piste B on etäisyydellä 0,080 m varauksesta q_1 ja etäisyydellä 0,060 m varauksesta q_2 (ks. kuva 23.29). Oletetaan potentiaalin äärettömän kaukana olevan nolla. Määritä

a) potentiaali pisteessä A;

b) potentiaali pisteessä B;

c) sähkökentän varaukseen 4,50 nC tekemä työ, kun se siirtyy pisteestä B pisteeseen A.



Kuva 23.29

a) Anita Aikion monisteesta:

Pistevarauksen q potentiaalin saamme jakamalla kaavasta (23.9) potentiaalienergian varauksella q_0

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}}, \qquad (23.14)$$

missä r on etäisyys pistevarauksesta q pisteeseen, jossa potentiaali lasketaan. Jos $q > 0$, $V > 0$ ja jos $q < 0$, $V < 0$ kaikkialla. Pistevarauksen potentiaali on nolla, kun $r = \infty$.

Pistevarausten joukolle saamme vastaavasti kaavasta (23.10)

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}}. \qquad (23.15)$$

Nyt r_i on etäisyys varauksesta q_i pisteeseen, jossa V lasketaan.

a) Nyt potentiaali pisteessä A on

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} = \mathbf{-360\ V}$$

b) Potentiaali pisteessä B on

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2'} = \mathbf{-431\ V}$$

Käytetyt lukuarvot on lueteltu tämän tehtävän lopussa.

c) Nyt kysytään sähkökentän tekemää työtä.

Anita Aikion monisteesta:

$$W = -\Delta U = -U_2 + U_1,$$

Potentiaalin avulla lausuttuna tämä on

Hyödyllinen muoto kaavasta (23.13) on

$$\boxed{\Delta U = q\Delta V}, \qquad (23.13)'$$

mikä antaa potentiaalienergian muutoksen ΔU, kun pistevaraus liikkuu potentiaalieron ΔV yli.

Sähkökentän tekemä työ on

$$W_{B\to A} = -(U_A - U_B) = q_0(V_B - V_A) = \mathbf{-3{,}20 \cdot 10^{-7} J}$$

Tässä tehtävässä on käytetty lukuarvoja

$r_1 = r_2 = 0{,}05\ m$

$r_1' = 0{,}08\ m$

$r_2' = 0{,}06\ m$

$q_1 = +3{,}50 \cdot 10^{-9} C$

$q_2 = -5{,}50 \cdot 10^{-9} C$

$q_0 = +4{,}50 \cdot 10^{-9} C$

$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\ C/Vm$

MUISTA EDELLEEN: Älä sekoita käsitteitä potentiaali ja potentiaalienergia.

5. Ohuen, äärettömän pitkän varatun langan pituusvaraustiheys on $6{,}00 \cdot 10^{-12}$ C/m. Protoni (massa $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, varaus $+1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C) on 50,0 cm etäisyydellä langasta ja se liikkuu kohti lankaa nopeudella $1{,}50 \cdot 10^{3}$ m/s. Kuinka lähelle lankaa protoni pääsee?

Lasketaan varatun langan aiheuttama sähkökenttä, josta saamme potentiaalin. Potentiaalin (tai paremminkin potentiaalieron) avulla saamme protonin kineettisen energian.

Gaussin laki löytyy Anita Aikion monisteesta:

$$\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}}, \qquad (22.8)$$

$\overline{E}$ = sähkökenttä Gaussin pinnan kohdalla

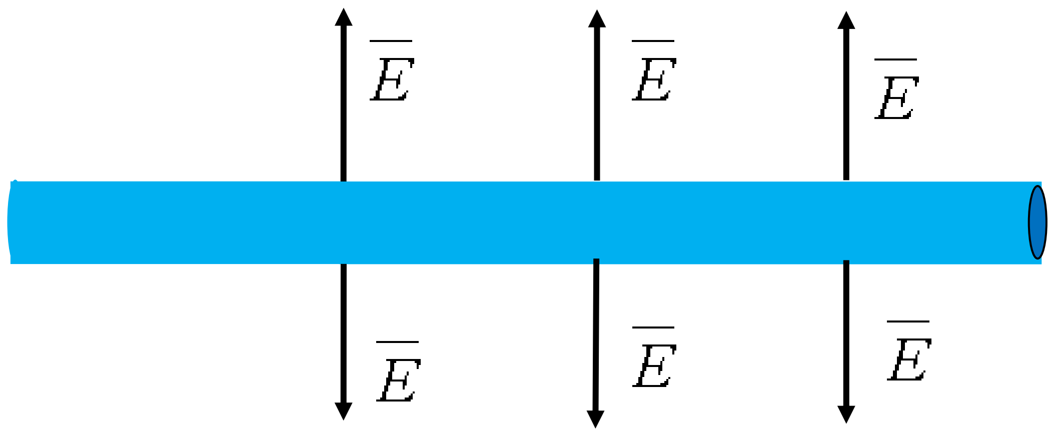
$d\overline{A}$ = pinta-alkiovektori Gaussin pinnalla

Q = suljetun Gaussin pinnan sisään jäävä varaus

$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}$ As/Vm

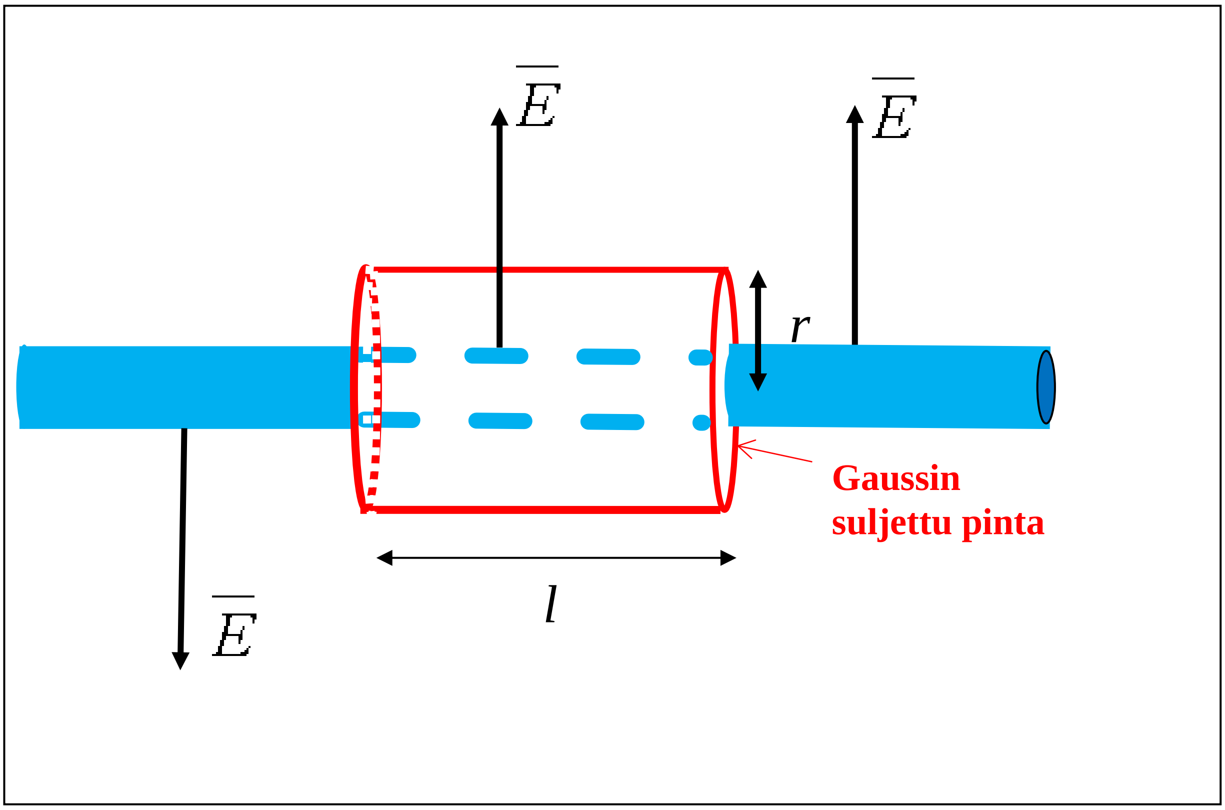
Piirretään sähkökentän kenttäviivat

Alla olevaan kuvaan on piirretty varatun langan aiheuttaman sähkökentän kenttäviivoja.



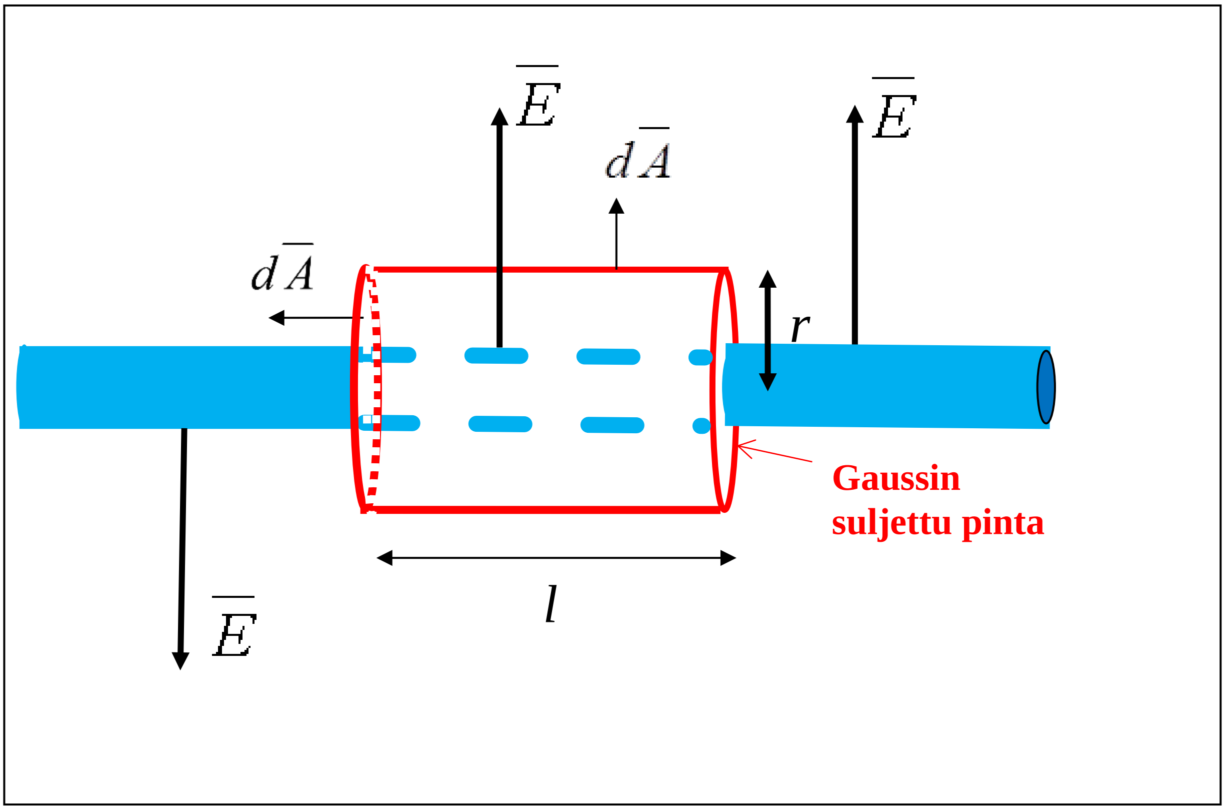
Piirretään kuvaan Gaussin pinta.

Sylinterisymmetrisille varausjakaumille valitaan suljetuksi Gaussin pinnaksi sylinteri. Alla olevassa kuvassa on systeemiin lisätty Gaussin suljettu pinta, joka on ympyräpohjainen sylinteri, jonka pituus on *l* ja pohjan säde *r*.



Piirretään pinta-alkiovektorit Gaussin pinnalle.

Pinta-alkiovektorit d***A*** ovat kohtisuorassa pintaa vastaan. Alla on edellinen kuva, johon on lisätty muutamaan kohtaan Gaussin pinnalle pinta-alkiovektorit.



Kuvasta nähdään, että Gaussin pintana toimivan sylinterin vaipalla $\overline{E}$ ja $d\overline{A}$ ovat yhdensuuntaisia. Gaussin sylinterin päissä sen sijaan $\overline{E}$ ja $d\overline{A}$ ovat kohtisuorassa. Kun vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niiden välinen pistetulo tulee nollaksi. Näin käy Gaussin sylinterin päissä. Kun vektorit ovat yhdensuuntaisia, niiden välinen pistetulo tulee pelkäksi itseisarvojen tuloksi eli tässä tapauksessa *EdA*:ksi. Näin käy vaipalla.

(Edellä on sovellettu kaavaa: $\overline{A}\cdot\overline{B} = |\overline{A}||\overline{B}|\cos\alpha$, missä α on vektoreiden $\overline{A}$ ja $\overline{B}$ välinen kulma.)

Lasketaan Gaussin lain vasen puoli.

Gaussin lain vasen puoli saadaan laskettua jakamalla Gaussin sylinterin pinnat kahteen osaan:

$$\oint_A \overline{E}\cdot d\overline{A} = \int_{vaippa} \overline{E}\cdot d\overline{A} + \int_{päät} \overline{E}\cdot d\overline{A} = \int_{vaippa} EdA + 0$$

$$= \int_{vaippa} EdA = E\int_{vaippa} dA = E\cdot 2\pi rL$$

$\overline{E}$ ja $d\overline{A}$ ovat yhdensuuntaisia vaipalla.

Sylinterin päissä $\overline{E}$ ja $d\overline{A}$ ovat kohtisuorassa.

E saatiin ottaa pois integraalimerkin sisältä, sillä sähkökentän itseisarvo *E* on vakio vaipan alueella, koska vaippa on vakioetäisyydellä *r* varatusta langasta. Tällöin integraali

$$\int_{vaippa} dA$$

kuvaa pelkkää Gaussin sylinterin vaipan alaa, joka on $2\pi rl$. Gaussin lain vasen puoli saatiin kuntoon.

Lasketaan Gaussin lain oikea puoli.

Q Gaussin lain oikealla puolella tarkoittaa Gaussin pinnan sisään jäävää varausta. Gaussin sylinterin pituus on l. Varatussa langassa on varaus pituusyksikköä kohden λ.

Anita Aikion monisteesta:

Jossain tapauksessa tasaisesti jakautunut varaus voidaan ilmoittaa ns. **viivavarauksena** (*linear charge density*) eli varauksena pituusyksikköä kohti λ ("lambda")

$$\lambda = \frac{Q}{l},$$

jolloin kappaleen kokonaispituus on l ja yksiköksi tulee C/m.

Tässä tapauksessa Gaussin sylinterin sisään jää $Q = l\lambda$.

Yhdistetään Gaussin lain vasen ja oikea puoli ja ratkaistaan yhtälöstä E-kenttä.

Nyt saadaan Gaussin laki muotoon:

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \underline{\underline{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}}.$$

Sähkökentän suunta on säteen suunta $\hat{u}_r$. Suuntaa ei saada Gaussin lain integraalimuodosta. Se päätellään.

Lasketaan seuraavaksi varatun langan aiheuttama potentiaaliero kahden pisteen välillä

Anita Aikion luentomonisteesta:

$$\boxed{V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}}\,. \qquad (23.17)'$$

Nyt sylinterin keskiakselista lasketun kahden eri etäisyyden välinen potentiaaliero on

$$V_a - V_b = -\int_b^a \bar{E} \cdot d\bar{r} = \int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = -\Big|_b^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} lnr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(lna - lnb) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(lnb - lna) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{b}{a}$$

Edellä lasketusta potentiaalierosta saadaan potentiaalienergiaero, josta taas päästään käsiksi kineettisen energian muutokseen.

Anita Aikion luentomonisteesta:

Jos kappaleeseen vaikuttaa vain konservatiivisia voimia, systeemin mekaaninen energia säilyy

$$K_a + U_a = K_b + U_b \, , \qquad (23.3)$$

missä K on kineettinen energia.

Hyödyllinen muoto kaavasta (23.13) on

$$\boxed{\Delta U = q\Delta V} \, , \qquad (23.13)'$$

mikä antaa potentiaalienergian muutoksen ΔU, kun pistevaraus liikkuu potentiaalieron ΔV yli.

Aloitetaan energian säilymisyhtälöstä

$$K_a + U_a = K_b + U_b$$

$$\rightarrow K_a - K_b = U_b - U_a = q\,(V_b - V_a) = q\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{b}{a}$$

Nyt $K_a - K_b = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = q\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}ln\frac{b}{a} \rightarrow ln\frac{b}{a} = -\frac{\pi\varepsilon_0 mv^2}{q\lambda}$$

$$\rightarrow e^{ln\frac{b}{a}} = e^{-\frac{\pi\varepsilon_0 mv^2}{q\lambda}} \rightarrow \frac{b}{a} = e^{-\frac{\pi\varepsilon_0 mv^2}{q\lambda}}$$

$$\rightarrow b = ae^{-\frac{\pi\varepsilon_0 mv^2}{q\lambda}} = 0{,}4484\,m = \mathbf{44{,}8\ cm}$$

Tässä tehtävässä on käytetty lukuarvoja

$q = +1{,}60 \cdot 10^{-19} C$

$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg$

$\lambda = +6{,}00 \cdot 10^{-12} C/m$

$v = 1{,}50 \cdot 10^3\,m/s$

$a = 0{,}500\,m$

$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,C/Vm$

Yksikkötarkastelu: $\frac{\frac{As}{Vm}kg\left(\frac{m}{s}\right)^2}{As\frac{As}{m}} = \frac{kgm^2}{VAss^2} = \frac{1}{VAs}\frac{kgm^2}{s^2} = \frac{Nm}{J} = \frac{J}{J} = 1$

Muista: C = As ja VAs = J

6. Määritellään potentiaali seuraavasti: $V = 0$, kun $z < 0$, $V = Cz$, kun $0 < z < d$ ja $V = Cd$, kun $z > d$. C ja d ovat positiivisia vakioita. Potentiaali ei ole riippuvainen x:stä ja y:stä.
a) Määritä sähkökenttä (suunta ja suuruus) kaikissa pisteissä.
b) Millainen varausjakauma voisi synnyttää tällaisen kentän? Perustele vastauksesi.

a) Anita Aikion luentomonisteesta:

Vastaava voidaan osoittaa muille komponenteille, joten

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}\ . \qquad (23.19)$$

Vektorimuodossa

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathrm{i}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathrm{j}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathrm{k}}\right) = -\nabla V}\ , \qquad (23.20)$$

missä ∇ ("nabla") on operaattori nimeltään gradientti,

$$\nabla = \hat{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathrm{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathrm{k}}\frac{\partial}{\partial z}\ .$$

Sähkökenttä on potentiaalin negatiivinen gradientti.

Nyt potentiaali saa eri alueissa saa seuraavat arvot

$z < 0$	$V = 0$
$0 < z < d$	$V = Cz$
$z > d$	$V = Cd$

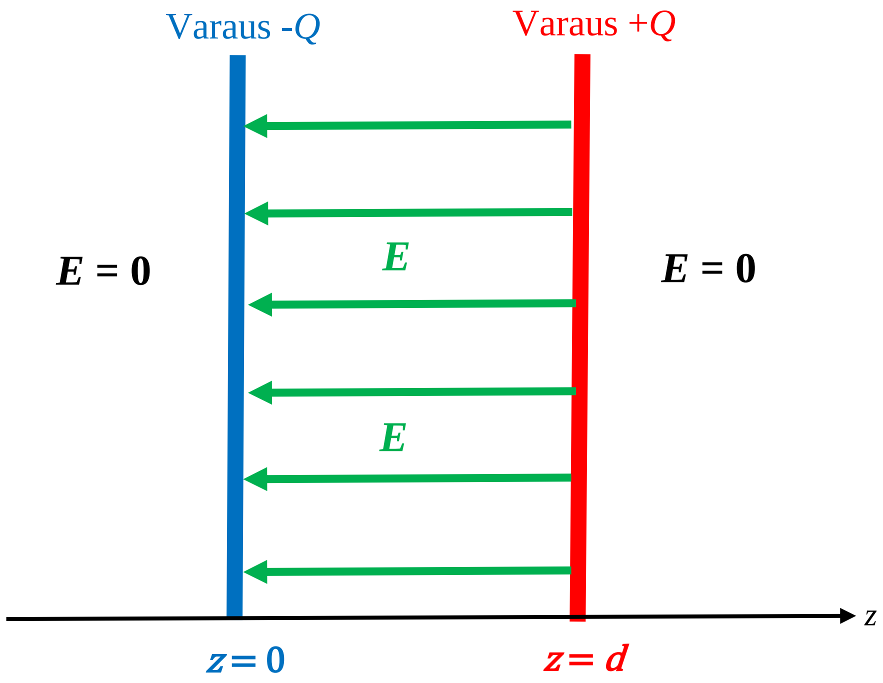
Potentiaali ei riipu x:stä eikä y:stä, joten voimme käyttää seuraavaa yhtälöä:

$$\bar{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

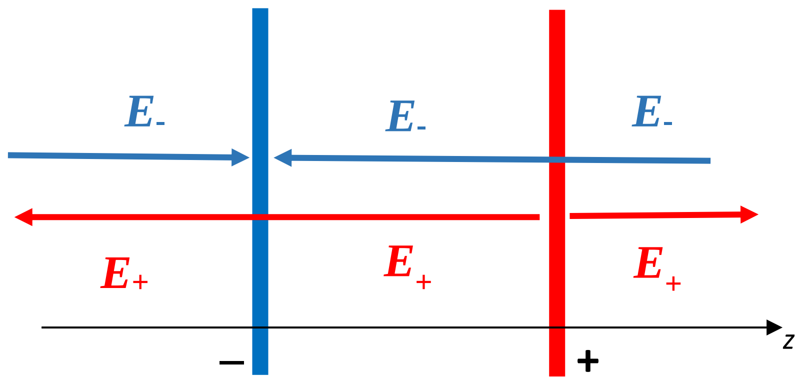
$z < 0$	$V = 0$	$\bar{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = 0$
$0 < z < d$	$V = Cz$	$\bar{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = -C\hat{k}$
$z > d$	$V = Cd$	$\bar{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = 0$

b) Edellä laskettu sähkökenttä on mahdollinen esimerkiksi kahden laajan erimerkkisesti varatun yhdensuuntaisen tason välillä. Käytännön esimerkiksi voi ottaa kondensaattorin.

Alla olevassa kuvassa on piirretty *E*-kenttäviivat kahden tasaisesti varatun tason väliin. Tasojen varaukset ovat samansuuruiset mutta vastakkaismerkkiset.



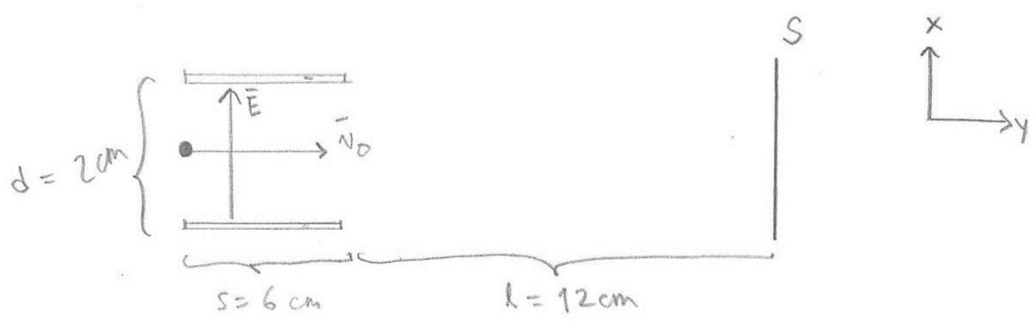
Miksi *E*-kenttää on ainoastaan levyjen välissä mutta ei ulkopuolella? Alla oleva kuva selittänee asiaa. Tasaisesti varattujen laajojen tasojen *E*-kentät ovat kohtisuorassa tasoja vastaan ja niiden suuruus on vakio. Kenttien suunnat ovat positiivisesti varatusta levystä poispäin ja negatiivisesti varattua levyä kohden. Tasojen välissä plus-levyn ja miinus-levyn aiheuttamat kentät vahvistavat toisiaan. Tasojen ulkopuolella kyseiset kentät kumoavat toisensa.



7.

$v_0 = 6{,}5 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$

$E = 1{,}1 \cdot 10^3$ V/m



a) Sähkökentän aiheuttama voima: $\bar{F} = q\bar{E}$

Elektronin varaus: $q = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

$\Rightarrow F = -1{,}602 \cdot 10^{-19} C \cdot 1{,}1 \cdot 10^3 \frac{V}{m} = \underline{-1{,}76 \cdot 10^{-16} \text{ N}}$

Suunta alaspäin.

Yksikkötarkastelu:
$[q]\cdot[E] = C \cdot \frac{V}{m} = As \cdot \frac{W/A}{m}$
$= s \cdot \frac{J/s}{m} = \frac{Nm}{m}$
$= N = [F]$

b) Newtonin 2. laki: $\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow a = \frac{F}{m}$

$\frac{[F]}{[m]} = \frac{N}{kg} = \frac{kg\, m/s^2}{kg}$
$= \frac{m}{s^2} = [a]$

Elektronin massa: $m = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg

$\Rightarrow a = \frac{-1{,}76 \cdot 10^{-16} N}{9{,}109 \cdot 10^{-31} kg} = \underline{-1{,}93 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2}$, suunta alaspäin.

c) Elektronilla on vakiokiihtyvyys pystysuorassa suunnassa. Mekaniikan kurssilla on opittu vakiokiihtyvyydellä liikkuvan kappaleen kulkema matka:

$$\boxed{\Delta x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

Tässä voidaan asettaa $x_0 = 0$ (elektronin lähtökorkeus).
$v_0 = 0$ pystysuunnassa (huom! ei vaakasuunnassa!)

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{2}at^2.}$$

t eli aika saadaan laskettua vaakasuuntaisen liikkeen avulla:

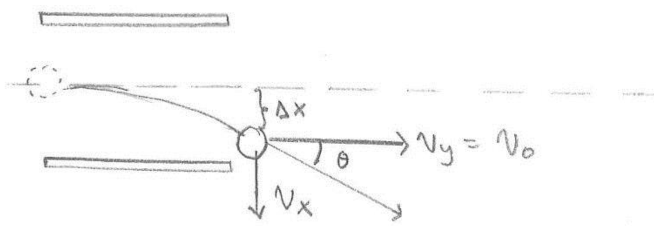
$\Delta y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Asetetaan $y_0 = 0$, ja tässä $a = 0$, koska elektronilla ei ole kiihtyvyyttä vaakasuunnassa. $\Delta y = s = 6$ cm, $v_0 = 6{,}5 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$.

$s = v_0 t$

$\Rightarrow t = \frac{s}{v_0} = \frac{0{,}06 \text{ m}}{6{,}5 \cdot 10^6 \frac{m}{s}} = 9{,}23 \cdot 10^{-9}$ s

$\Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} \cdot (-1{,}93 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2) \cdot (9{,}23 \cdot 10^{-9} s)^2 = -8{,}24 \cdot 10^{-3}$ m

V: Elektroni on 8,24mm katkoviivan alapuolella d)



Lasketaan elektronin pystysuuntainen nopeus sen poistuessa levyjen välistä:

$v_x(t) = at = -1{,}93 \cdot 10^{14} \frac{m}{s^2} \cdot 9{,}23 \cdot 10^{-9} s = -1{,}78 \cdot 10^{6} \frac{m}{s}$

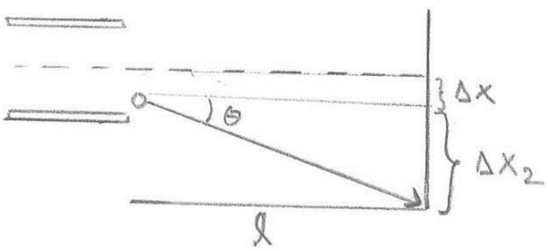
Vaakasuuntainen nopeus on sama kuin alussa, koska vaakasuunnassa elektronilla ei ole kiihtyvyyttä.

$v_y(t) = v_0 = 6{,}5 \cdot 10^{6}$ m/s.

Vektoreiden välinen kulma: $\theta = \arctan \frac{v_x}{v_y}$

$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{-1{,}80 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{6{,}5 \cdot 10^6 \text{ m/s}}\right) = (-)\ \underline{\underline{15{,}4°}}$

e)



Elektroni on jo valmiiksi Δx = 8,24 mm katkoviivan alapuolella. Poistuttuaan levyjen välistä se kulkee suoraviivaisesti levylle θ = 15,4° kulmassa vaakasuuntaan nähden.

$\tan\theta = \frac{\Delta x_2}{l} \Rightarrow \Delta x_2 = l \cdot \tan\theta = 0{,}12\,m \cdot \tan 15{,}4° = 3{,}30 \cdot 10^{-2}\,m$

Elektroni on siis $8{,}24 \cdot 10^{-3}\,m + 3{,}30 \cdot 10^{-2}\,m = 4{,}121 \cdot 10^{-2}\,m$

$\approx \underline{\underline{4{,}1\text{ cm}}}$ katkoviivan alapuolella osuessaan näyttöruudulle.

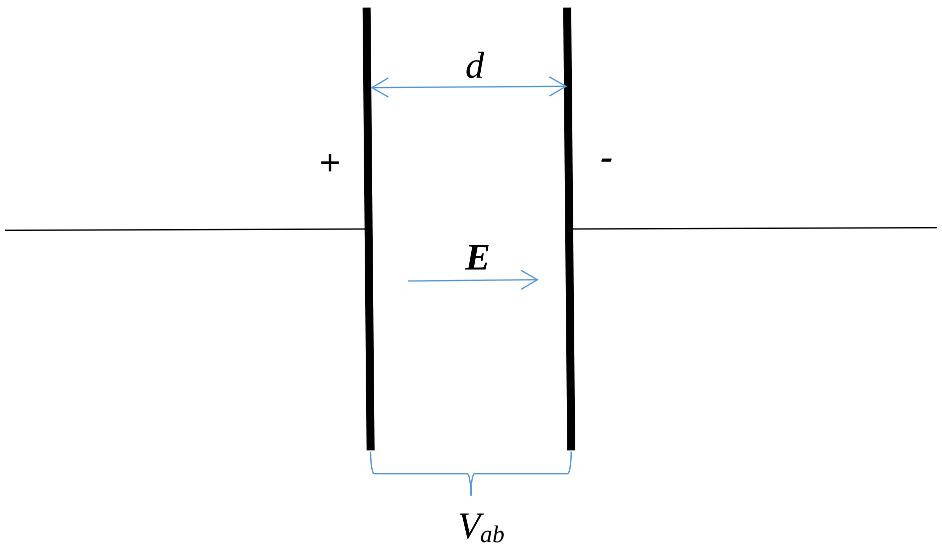
8. Ilmatäytteisen levykondensaattorin kapasitanssi on 440 μF ja kummankin levyn varaus on 0,15 μC. Levyjen välinen etäisyys on 0,5 mm.

a) Mikä on levyjen välinen potentiaaliero?
b) Mikä on kummankin yksittäisen levyn pinta-ala?
c) Mikä on sähkökentän voimakkuus levyjen välissä?
d) Mikä on kummankin yksittäisen levyn pintavaraustiheys?

Tasolevykondensaattoreille pätevät seuraavat Anita Aikion luentomaterialin kaavat:

$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Qd}{A} .$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{ab}}} , \qquad \boxed{C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}} , \qquad \sigma = \frac{Q}{A} ,$$



a) $C = \frac{Q}{V_{ab}} \rightarrow V_{ab} = \frac{Q}{C} = \frac{0{,}15 \cdot 10^{-6} C}{440 \cdot 10^{-6} F} = \mathbf{0{,}341\ mV}$

b) $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow A = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = \frac{440 \cdot 10^{-6} F \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} m}{8{,}8542 \cdot 10^{-12}\ C/Vm} = \mathbf{2{,}48 \cdot 10^4\ m^2}$

c) $V_{ab} = Ed \rightarrow E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{0{,}341 \cdot 10^{-3}\ V}{0{,}5 \cdot 10^{-3} m} = \mathbf{0{,}682\ \frac{V}{m}}$

d) Plus-levy $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}15 \cdot 10^{-6} C}{2{,}4847 \cdot 10^4 m^2} = \mathbf{6{,}04 \cdot 10^{-12}\ \frac{C}{m^2}}$

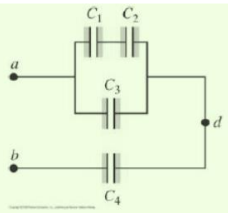
Miinus-levy $= \frac{-Q}{A} = \frac{-0{,}15 \cdot 10^{-6} C}{2{,}4847 \cdot 10^4 m^2} = \mathbf{-6{,}04 \cdot 10^{-12}\ \frac{C}{m^2}}$

9. Viereisessä kuvassa C_1=6.00 µF, C_2=3.00 µF, C_3=5.00 µF ja C_4=8.00 µF Kondensaattoripiiri kytketään jännitteeseen V_{ab}. Kun kondensaattorien varaukset ovat asettuneet lopullisiin arvoihinsa C_4:n varaus on 40.0 µC.

a) Mikä on pisteiden a ja b välinen kokonaiskapasitanssi?

b) Mitkä ovat C_1:n, C_2:n ja C_3:n varaukset?

c) Mitkä ovat jännitteet V_{ab} ja V_{ad}?



Anita Aikion laatimasta luentomateriaalista löytyy seuraavanlaista teoriaa kondensaattorikytkennöistä:

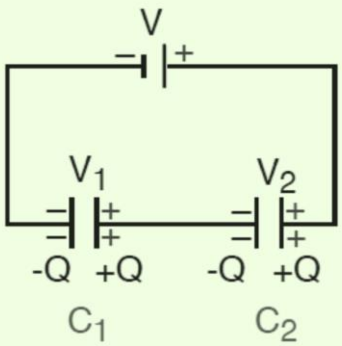
SARJAANKYTKENTÄ

Kun kaksi kondensaattoria C_1 ja C_2 kytketään sarjaan ja yhdistetään ulkoiseen jännitteeseen V, varaukset siirtyvät siten, että

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

ja jännitteet summautuvat sarjaankytkennässä

$$V = V_1 + V_2 \ .$$



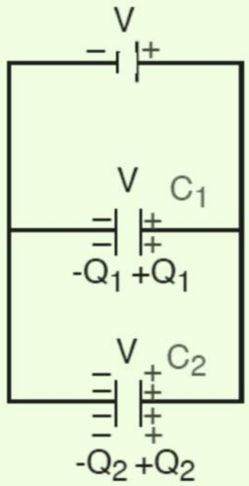
RINNANKYTKENTÄ

Kun kaksi kondensaattoria yhdistetään rinnan toistensa ja jännitelähteen kanssa, jonka jännite on V,

$$V = V_1 = V_2 \ .$$

Varaukset jakautuvat kondensaattoreihin siten, että

$$Q_1 = C_1 V \ ja \ Q_2 = C_2 V \ .$$



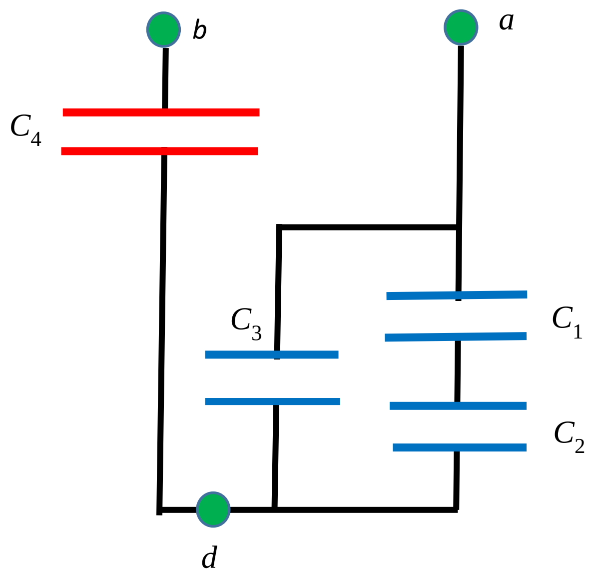
Kokonaisvaraus on tällöin

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V \ .$$

Kapasitanssin määritelmä on

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{ab}}} \ ,$$

a)



Tämä tiedetään:
C_1 = 6,00 µF
C_2 = 3,00 µF
C_3 = 5,00 µF
C_4 = 8,00 µF
Q_4 = 40,0 µC

Kondensaattorit C_1 ja C_2 ovat sarjassa. Niiden yhteiskapasitanssi on siis

$$C_{12} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

Kondensaattori C_3 on kytketty kondensaattorikombinaation C_{12} rinnalle. Näiden kolmen kondensaattorin yhteiskapasitanssi on

$$C_{123} = C_3 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

Tämä kolmen kopla on sarjassa kondensaattorin C_4 kanssa. Nyt saadaan kokonaiskapasitanssi

$$C_{KOK} = \left[\frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_3 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}}\right]^{-1} = \mathbf{3,73}\ \mu\boldsymbol{F}$$

b) Potentiaaliero V_{ad} voidaan ilmaista kahdella tavalla: $V_{ad} = V_1 + V_2 = V_3$
Kirjoitetaan potentiaalit varauksen ja kapasitanssin avulla:

$$V_1 + V_2 = V_3 \leftrightarrow \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}$$

Peräkkäisissä (sarjaan kytketyissä) kondensaattoreissa on sama varaus. Siksi

$Q_1 = Q_2$ ja $Q_3 + Q_2 = Q_4 \rightarrow Q_3 = Q_4 - Q_2$

Sijoitetaan nämä edellä olevaan yhtälöön:

$$\frac{Q_2}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_4 - Q_2}{C_3} \rightarrow \frac{Q_2}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_2}{C_3} = \frac{Q_4}{C_3}$$

$$\rightarrow Q_2\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{Q_4}{C_3} \rightarrow \boldsymbol{Q_2 = 11,4\ \mu C = \ Q_1}$$

Tämä tiedetään edelleen:
$C_1 = 6{,}00\ \mu F$
$C_2 = 3{,}00\ \mu F$
$C_3 = 5{,}00\ \mu F$
$C_4 = 8{,}00\ \mu F$
$Q_4 = 40{,}0\ \mu C$

$$\boldsymbol{Q_3} = Q_4 - Q_2 = \boldsymbol{28,6\ \mu C}$$

c) Potentiaalieroille pätee:

$$\boldsymbol{V_{ad} = \frac{Q_3}{C_3} = 5,71\ V}$$

$$\boldsymbol{V_{ab}} = V_{ad} + V_4 = \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4} = \boldsymbol{10,7\ V}$$