

# 761119P Sähkömagnetismi 1

## 1. laskuharjoitus, kevät 2019

Tehtävät ovat kirjasta H. D. Young and R. A. Freedman: UNIVERSITY PHYSICS, 11. painos:  
Ex. 21.26, 21.46, 21.60, Pr. 21.68, Ex. 22.1, 22.6, Pr. 22.38, 22.48

1. (21.26) Homogeenisessa sähkökentässä oleva elektroni lähtee liikkeelle levosta ja liikkuu kasvavalla nopeudella suoraan ylöspäin. Ensimmäisen 3,00 mikrosekunnin aikana se liikkuu 4,50 m.

a) Mikä on sähkökentän voimakkuus ja suunta?

b) Onko oikeutettua jättää painovoiman vaikutus elektroniin huomiotta? Perustele vastauksesi tekemällä vertailevia laskelmia.

a) Anita Aikion luentomateriaalista:

Sähkökentän voimakkuus eli lyhyesti sähkökenttä (electric field)  $\vec{E}$  määritellään

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} . \quad (21.3)$$

Sähkökentän SI-yksikkö on N/C (eli V/m).

Tarvitsemme siis voiman  $F$ . Tiedämme elektronin tietyssä ajassa kulkeman matkan. Tästä saamme kiihtyvyyden, jonka voimme olettaa vakioksi. Perusmekaniikan kurssilla on esitetty suoraviivaisen tasaisesti kiihtyvän liikkeen perusyhtälö:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Nyt alkunopeus  $v_0 = 0$  ja valitsemme lähtöpaikan kohtaan  $x_0 = 0$ . Kiihtyvyydeksi saamme nyt

$$a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 4,5 \text{ m}}{(3,0 \cdot 10^{-6} \text{ s})^2} = 1,00 \cdot 10^{12} \text{ m/s}^2$$

Kiihtyvyydestä saamme voiman lausekkeen yhtälöllä  $F = ma$ . Tarvitsemme elektronin massan lukuarvon ja alkeisvarauksen lukuarvon. Ne näkyvät alla olevassa lausekkeessa.

Huomaa:  $J = VC$

$$E = \frac{F}{q} = \frac{ma}{e} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,00 \cdot 10^{12} \text{ m/s}^2}{1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = \underline{5,7 \text{ V/m}} \quad \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{C s}^2} = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{J}}{\text{C} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{C}}{\text{C} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

Sähkökentän suunta on se suunta, mihin positiivinen varaus kulkisi. Koska elektroni kulkee tässä tapauksessa ylöspäin, sähkökentän suunta on alaspäin.

b) Pitäisikö maan vetovoiman kiihtyvyys ottaa huomioon?

Elektronin kiihtyvyys tässä laskussa =  $1,00 \cdot 10^{12} \text{ m/s}^2$

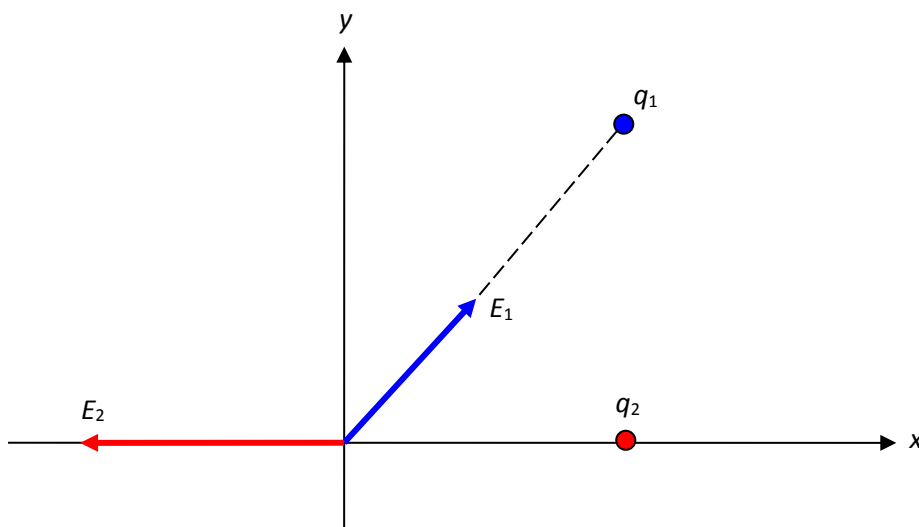
Maan vetovoiman kiihtyvyys (lähellä maan pintaa) =  $9,81 \text{ m/s}^2$  **Ei merkitystä tässä laskussa!**

2. (21.46) Pistevaraus  $q_1 = -4,00$  nC sijaitsee kohdassa  $x = 0,600$  m,  $y = 0,800$  m, ja toinen pistevaraus  $q_2 = +6,00$  nC on kohdassa  $x = 0,600$  m,  $y = 0,000$  m. Laske näiden kahden pistevarauksen aiheuttaman nettosähkökentän voimakkuus ja suunta origossa.

Tämä lasku voidaan laskea usealla erilaisella tavalla, joista kaksi esitetään tässä.

### TAPA I

Lasketaan ensin sähkökenttien suuruudet. Jaetaan sitten kentät  $x$ - ja  $y$ -akseleiden suuntaisiin komponentteihin ja lasketaan komponentit yhteen. Vastaus voidaan antaa vektorina tai lasketaan komponenteista kokonaiskenttä ja suunta.



Käytetään Anita Aikion luentomonisteessa esiintyvää pistevarauksen aiheuttaman sähkökentän lauseketta

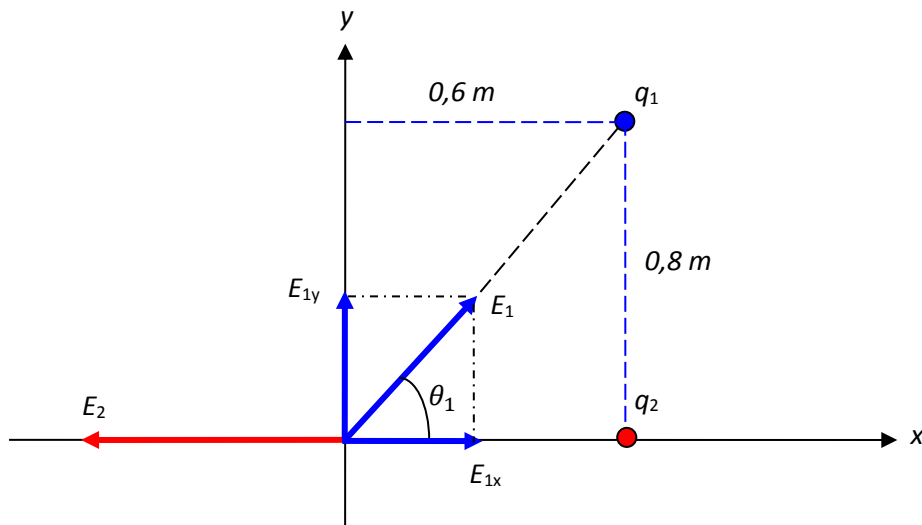
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} \quad (21.6)$$

Lasketaan molempien pistevarausten aiheuttamat kokonaiskentät erikseen:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}} \frac{4,00 \cdot 10^{-9} C}{(0,6^2 + 0,8^2)m^2} = 35,95016 \frac{V}{m}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}} \cdot \frac{6,00 \cdot 10^{-9} C}{(0,6 m)^2} = 149,792 \frac{V}{m}$$

Jaetaan sähkökentät komponentteihin:



$$\tan \theta_1 = \frac{0,8 \text{ m}}{0,6 \text{ m}} \rightarrow \theta_1 = 53,130^\circ$$

$$E_{1x} = E_1 \cos \theta_1 = 21,5701 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad \text{ja} \quad E_{1y} = E_1 \sin \theta_1 = 28,7601 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

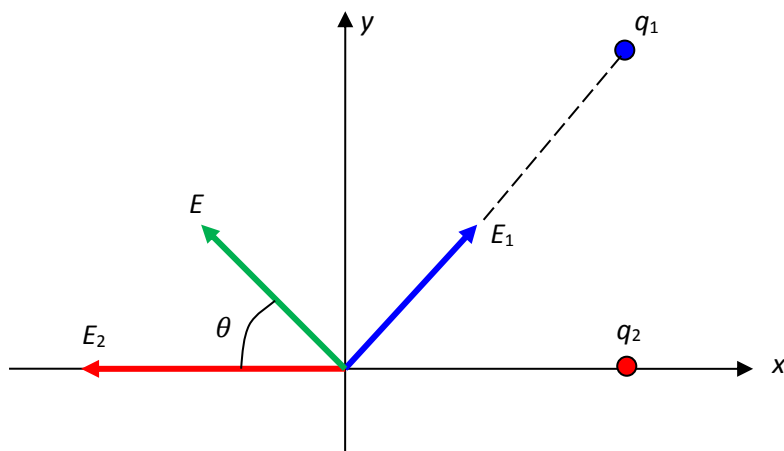
$$E_{2x} = -E_2 = -149,792 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Lasketaan kokonaiskenttä

$$\vec{E} = (E_{1x} + E_{2x})\hat{i} + E_{1y}\hat{j} = [(21,5701 - 149,792)\hat{i} + 28,7601\hat{j}] \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\text{Kentän suuruus on} = \sqrt{(E_{1x} + E_{2x})^2 + (E_{1y})^2} = \mathbf{131,4} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\text{Kentän suunta on} \quad n\theta = \frac{E_{1y}}{E_{1x} + E_{2x}} \rightarrow \theta = \mathbf{12,6}^\circ$$



## TAPA II

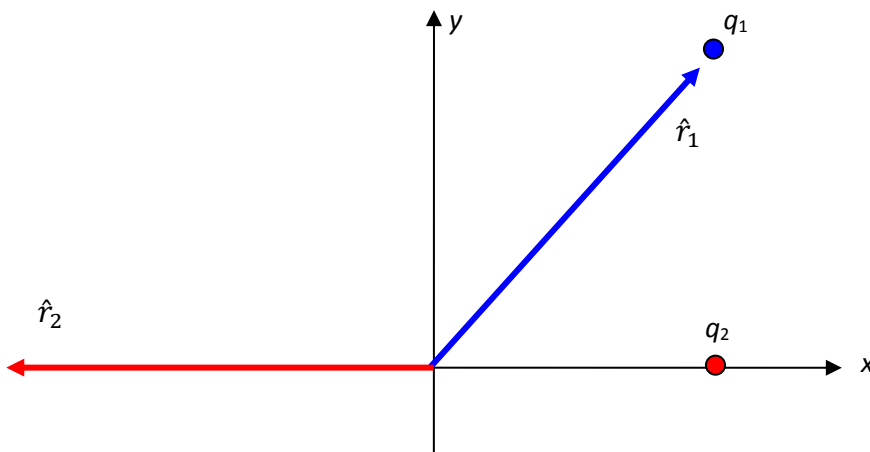
Käytetään luentomonisteen yhtälöä

Vektorimuodossa pistevarauksen synnyttämä sähkökenttä on

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} . \quad (21.7)$$

Lasketaan sähkökentät vektorimuodossa molemmille varauksille ja sen jälkeen lasketaan kentät yhteen.

Yllä olevassa yhtälössä  $\hat{r}$  on sähkökentän suuntainen yksikkövektori. Lasketaan se molempien varausten aiheuttamalle kentälle:



$$\hat{r}_1 = \frac{x_1\hat{i} + y_1\hat{j}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{0,6\hat{i} + 0,8\hat{j}}{\sqrt{0,6^2 + 0,8^2}} = \frac{0,6\hat{i} + 0,8\hat{j}}{\sqrt{1}} = 0,6\hat{i} + 0,8\hat{j}$$

$$\hat{r}_2 = -\hat{i} \quad (\text{Tämä saadaan päättelemällä})$$

**HUOMAA!** Yksikkövektoreiden suunnat on päätelty varausten etumerkin perusteella. Tämän jälkeen laskuissa käytetään varausten suuruuksia ilman etumerkkejä. (On olemassa menetelmiä, joilla voimien ja sähkökenttien suunnat saa automaattisesti, mutta niitä ei käsitellä tällä kurssilla.)

Sijoitetaan yksikkövektorit edellä laskettuihin sähkökentän suuruuden lausekkeisiin

Lasketaan molempien pistevarausten aiheuttamat kokonaiskentät erikseen:

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})^2} \frac{x_1\hat{i} + y_1\hat{j}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}} \frac{4,00 \cdot 10^{-9} C}{(0,6^2 + 0,8^2)m^2} (0,6\hat{i} + 0,8\hat{j}) \\ &= (21,5701\hat{i} + 28,7601\hat{j}) \frac{V}{m}\end{aligned}$$

$$\bar{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} \hat{r}_2 = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}} \cdot \frac{6,00 \cdot 10^{-9} C}{(0,6 m)^2} (-\hat{i}) = 149,792 (-\hat{i}) \frac{V}{m}$$

Kokonaiskentäksi saadaan

$$\bar{E} = (E_{1x} + E_{2x})\hat{i} + E_{1y}\hat{j} = [(21,5701 - 149,792)\hat{i} + 28,7601\hat{j}] \frac{V}{m}$$

$$\text{Kentän suuruus on } = \sqrt{(E_{1x} + E_{2x})^2 + (E_{1y})^2} = \mathbf{131,4} \frac{V}{m}$$

$$\text{Kentän suunta on } n\theta = \frac{E_{1y}}{E_{1x} + E_{2x}} \rightarrow \theta = \mathbf{12,6}^\circ$$

3. (21.60) Kaliumkloridimolekyylin, KCl, dipolimomentti on  $8,9 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ .

- a) Oletetaan, että tämän dipolimomentin synnyttää kaksi toisistaan etäisyydellä  $d$  olevaa varausta, joiden suuruus on  $\pm 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ . Laske etäisyys  $d$ .
- b) Mikä on suurin vääntömomentin arvo, jonka homogeeninen sähkökenttä  $6,0 \times 10^5 \text{ N/C}$  voi kohdistaa KCl-molekyyliin? Hahmottele kuvio, josta näkyy dipolimomenttivektorin  $\vec{p}$  ja sähkökenttävektorin  $\vec{E}$  suunta tilanteessa, jossa vääntömomentti on suurimmillaan.

Anita Aikion luentomonisteesta:

Määritellään

nyt **sähköinen dipolimomentti** (*electric dipole moment*),  $\vec{p}$

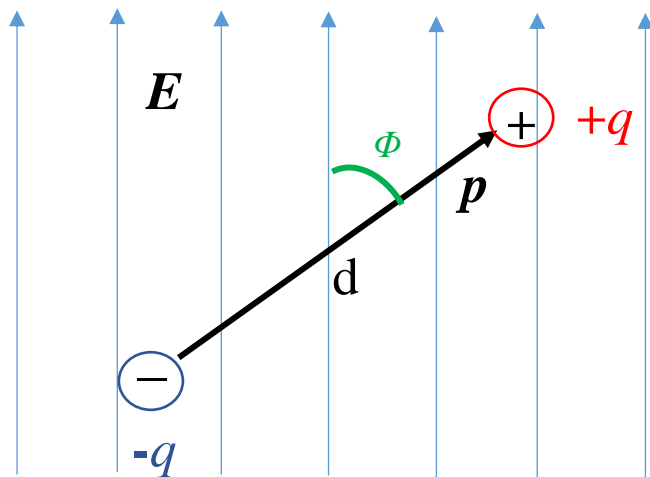
$$\vec{p} = q\vec{d}, \quad (21.14)$$

missä  $\vec{d}$  on vektori varauksesta  $-q$  varaukseen  $+q$ .

a) Tässä tehtävässä dipolimomentin suuruus on  $p = 8,9 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$ .

Varauksien suuruus on  $q = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Skalaariyhtälöstä  $p = qd$  seuraa:  $d = \frac{p}{q} = 5,5625 \cdot 10^{-11} \text{ m} \approx 56 \text{ pm}$



b) Anita Aikion luentomonisteesta löytyy yhtälö vääntömomentille  $\tau$  (eli voiman momentille).

Nyt voidaan kaava (21.13) kirjoittaa muodossa

$$\tau = pE \sin \phi . \quad (21.15)$$

Yo, yhtälö on samaa muotoa kuin vektorien ristitulo, joten vektori-  
muodossa se on

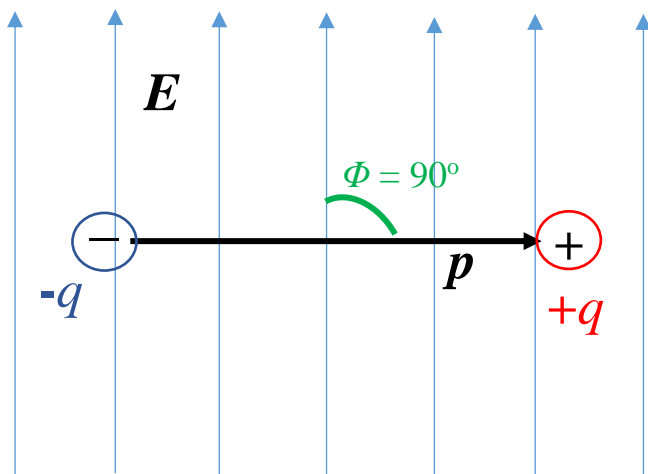
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}} . \quad (21.16)$$

Kaavasta nähdään, että vääntömomentti on suurimmillaan, kun dipoli on kohtisuorassa sähkökenttää vasten ja nolla, jos dipoli on samantai vastakkaissuuntainen kuin sähkökenttä. Kun dipoli on sähkökentän suuntainen, kyseessä on stabiili tasapainotila ja vastakkaissuuntainen, epästabiili tasapainotila. Sähkökenttä pyrkii kääntämään dipolin samansuuntaiseksi kuin sähkökenttä,  $\vec{p} \parallel \vec{E}$ .

Edellä esitetyn mukaan vääntömomentti on maksimissaan, kun dipoli on kohtisuorassa sähkökenttää vastaan. Silloin  $\Phi$  on  $90^\circ$  astetta ja  $\sin \Phi$  on 1.

$$\tau = pE \sin 90^\circ = 5,3 \cdot 10^{-24} \text{ Nm}$$

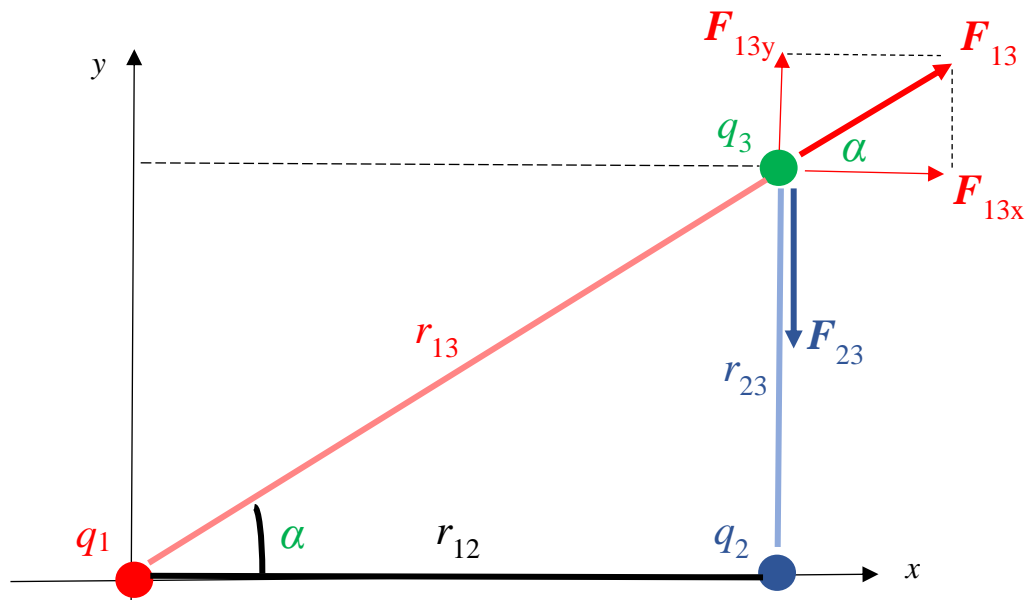
Yksikkötarkastelu:  $\text{Cm} \frac{\text{V}}{\text{m}} = \text{VC} =$  [Huomaa:  $\text{VC} = \text{VAs} = \text{J}$ ]



4. (21.68) Pistevaraus  $q_1 = +5,00 \text{ nC}$  sijaitsee  $xy$ -koordinaatiston origossa ja toinen pistevaraus  $q_2 = -2,00 \text{ nC}$  on sijoitettu positiiviselle  $x$ -akselille kohtaan  $x = 4,00 \text{ cm}$ .

a) Jos kolmas varaus,  $q_3 = +6,00 \text{ nC}$ , sijoitetaan kohtaan  $x = 4,00 \text{ cm}$ ,  $y = 3,00 \text{ cm}$ , määritä kahden muun varauksen tähän varaukseen kohdistaman kokonaisvoiman  $x$ - ja  $y$ -komponentit.

b) Määritä tämän voiman suuus ja suunta.



$$r_{13} = \sqrt{(r_{13x})^2 + (r_{13y})^2} = \sqrt{(0,04 \text{ m})^2 + (0,03 \text{ m})^2} = 0,05 \text{ m}$$

$$r_{23} = 0,03 \text{ m}$$

$$r_{12} = 0,04 \text{ m}$$

$$q_1 = +5,00 \text{ nC}$$

$$q_2 = -2,00 \text{ nC}$$

$$q_3 = +6,00 \text{ nC}$$

$$F_{13} = \frac{|q_1 q_3|}{4\pi\epsilon_0 (r_{13})^2} = 1,0785 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

$$F_{23} = \frac{|q_2 q_3|}{4\pi\epsilon_0 (r_{23})^2} = 1,1983 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$



$$F_{13x} = F_{13} \cos \alpha = F_{13} \frac{r_{12}}{r_{13}} = 8,6280 \cdot 10^{-5} N$$

$$F_{13y} = F_{13} \sin \alpha = F_{13} \frac{r_{23}}{r_{13}} = 6,4710 \cdot 10^{-5} N$$

$$F_{23x} = 0$$

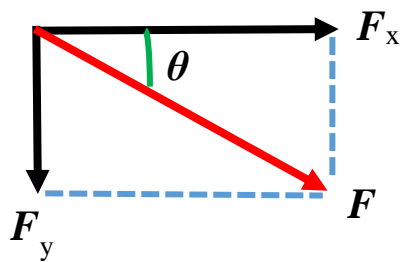
$$F_{23y} = -1,1983 \cdot 10^{-4} N$$

$$F_x = F_{13x} = \mathbf{8,63 \cdot 10^{-5} N}$$

$$F_y = F_{13y} + F_{23y} = \mathbf{-5,51 \cdot 10^{-5} N}$$

$$F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} = \mathbf{1,02 \cdot 10^{-4} N}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{F_y}{F_x} \right| \rightarrow \theta = \mathbf{32,6^\circ}$$



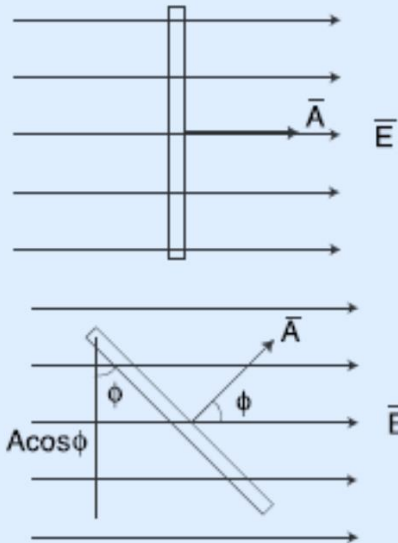
5. (22.1) Sileä paperiarkki, jonka pinta-ala on  $0,250 \text{ m}^2$ , on sijoitettu voimakkuudeltaan  $14 \text{ N/C}$  olevaan homogeeniseen sähkökenttään siten, että paperin normaali muodostaa  $60^\circ$  kulman sähkökentän suuntaan nähden.

- Määritä paperiarkin läpäisevä sähkökentän vuo.
- Onko a)-kohdan vastaus riippuvainen paperiarkin muodosta? Miksi on tai miksi ei ole?
- Millä paperin normaalin ja sähkökentän suunnan välisen kulman  $\phi$  arvolla paperin läpäisevän vuon suuruus on i) suurin?, ii) pienin? Perustele vastauksesi.

Anita Aikion luentomonisteesta:

Kentän vuon yksikkö SI-järjestelmässä on  $\text{Nm}^2/\text{C}$  tai  $\text{Vm}$ . Mikäli pinta ei ole kohtisuorassa kenttää vastaan, eli  $\vec{A}$  ei ole yhdensuuntainen vektorin  $\vec{E}$  kanssa, on vuota määrittäessä tarkasteltava pinnan projektiota kohtisuoraan kenttää vastaan. Projektion kohtisuora pinta-ala on  $A_{\perp} = A \cos \phi$ , missä  $\phi$  on  $\vec{A}$ :n ja  $\vec{E}$ :n välinen kulma. Tällöin sähkökentän vuo on

$$\Phi_E = EA \cos \phi \quad (22.1)$$



(ja se voidaan myös tulkita siten, että tarkastelemme sähkökentän pinta vastaan kohtisuoraa komponenttia  $E_{\perp} = E \cos \phi$ , joka kerrotaan pinta-alalla). Sähkökentän vuo voidaan siis määrittellä vektoreiden pistetulona

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}. \quad (22.3)$$

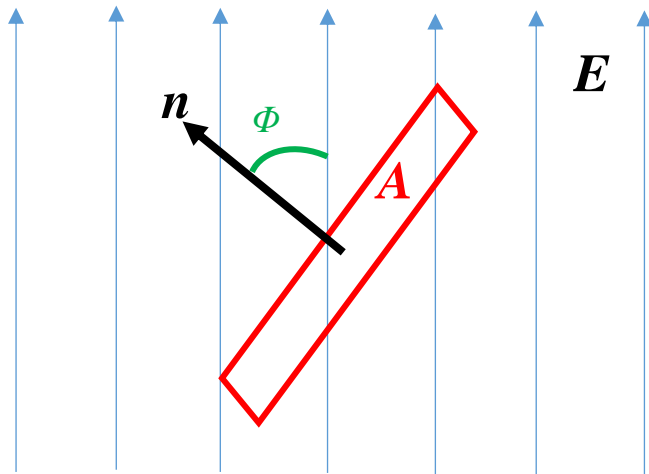
Kaava on voimassa tasaiselle pinnalle ja homogeeniselle sähkökentälle.

Yllä pinnan ala on esitetty vektorina,

$$\vec{A} = A\hat{n}, \quad (22.4)$$

jossa  $\hat{n}$  pinnan normaalin suuntainen yksikkövektori,

a) Lasketaan paperinarkin läpi menevä sähkökentän vuo  $\Phi_E$ .



$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot A\hat{n} = EA\cos\phi$$

Edellä olevassa yhtälössä  $A$ -vektori tarkoittaa pinta-alavektoria. Sen suuruus on pinta-alan suuruinen ja suunta pintaa vastaan kohtisuora.  $\mathbf{n}$ -tarkoittaa pintaa vastaan kohtisuoraa yksikkövektoria. Kulma  $\phi$  tarkoittaa  $\mathbf{n}$ -vektorin ja sähkökentän välistä kulmaa. (Varoitus: Joissakin fonteissa sähkökentän vuo  $\Phi_E$  ja kulma  $\phi$  saattavat näyttää samalta.)

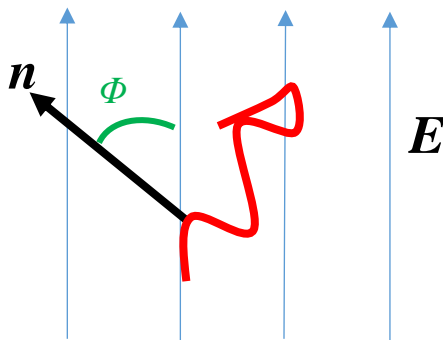
Sijoitetaan lukuarvot:

$$\Phi_E = 14 \frac{N}{C} \cdot 0,250 \text{ m}^2 \cdot \cos 60^\circ = 1,75 \frac{Nm^2}{C} = 1,75 \text{ Vm}$$

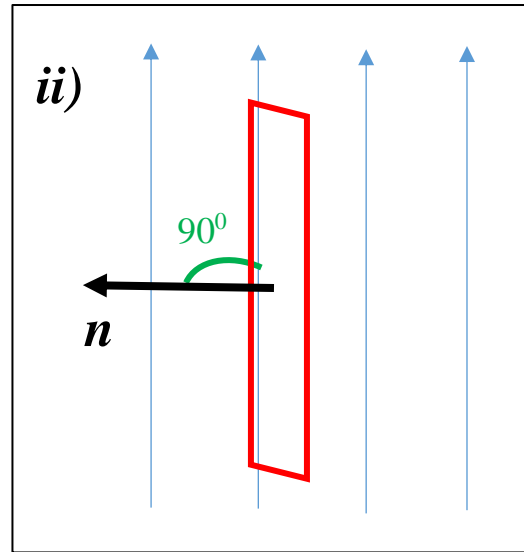
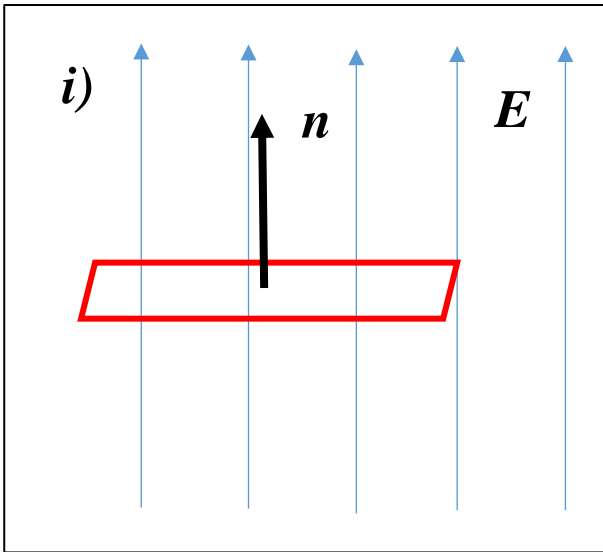
b) **Onko a-kohdan vastaus riippuvainen paperiarkin muodosta?** Tämä kysymys voidaan ymmärtää kahdella tavalla.

Paperin läpi menevä sähkökentän suuruus ei muutu, vaikka arkin muoto muuttuu (esimerkiksi ympyrälevyksi), jos paperi pysyy tasomaisena, pinta-ala pysyy samana ja paperi pysyy samassa asennossa sähkökenttään nähden. Yhtälöä  $\Phi_E = EA\cos\phi$  ei kiinnosta paperiarkin muoto.

Jos paperiarkki rutistetaan tai kääritään rullalle, sähkökentän vuo muuttuu, koska sähkökenttää menee vähemmän arkin läpi.

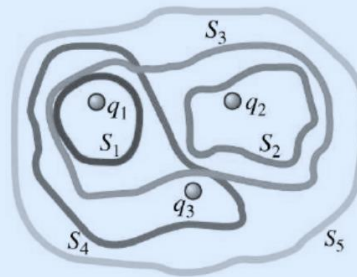


c) Katsotaan yhtälöä  $\Phi_E = EA \cos \phi$ . Vuo on suurin silloin, kun kulma  $\phi$  on  $0^\circ$  ja pienin, kun kulma  $\phi$  on  $90^\circ$ . Alla olevat kuvat voivat havainnollistaa asiaa.



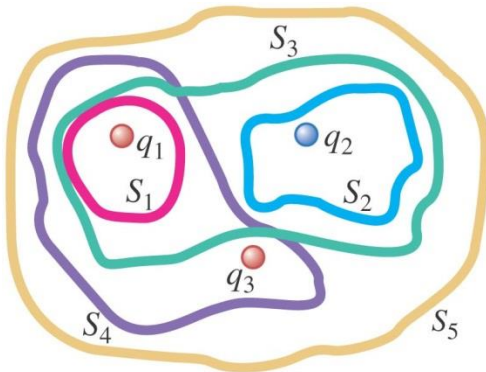
6. (22.6) Kolme pientä kuvassa 22.34 esitettyä palleroa sisältävät varaukset  $q_1 = 4,00 \text{ nC}$ ,  $q_2 = -7,80 \text{ nC}$  ja  $q_3 = 2,40 \text{ nC}$ . Määritä sähkökentän vuon nettoarvo kullekin suljetulle pinnalle, joiden halkileikkaus näkyy kuvassa.

- a)  $S_1$                       b)  $S_2$                       c)  $S_3$   
 d)  $S_4$                       e)  $S_5$   
 f) Riippuko vastauksesi kohtiin a) ... e) siitä, miten varaus on jakautunut kunkin palleron sisällä? Miksi riippuu tai miksi ei riipu?



Pinta	Varaukset, jotka pinta sulkee
$S_1$	$q_1$
$S_2$	$q_2$
$S_3$	$q_1$ ja $q_2$
$S_4$	$q_1$ ja $q_3$
$S_5$	$q_1$ ja $q_2$ ja $q_3$

Kuva 22.34



Surface	What it encloses
$S_1$	$q_1$
$S_2$	$q_2$
$S_3$	$q_1$ and $q_2$
$S_4$	$q_1$ and $q_3$
$S_5$	$q_1$ and $q_2$ and $q_3$

Sähköisen varauksen lähettämä sähkökentän vuo riippuu ainoastaan varauksen suuruudesta.

**Suljetun pinnan läpi** tulevaan sähkökentän vuohon vaikuttaa ainoastaan **pinnan sisäpuolella** oleva kokonaisvaraus. Ulkopuoliset varaukset eivät vaikuta tähän vuohon.

Suljetun pinnan läpi menevän sähkökentän vuo on  $\Phi = \frac{Q_{sis}}{\epsilon_0}$

a) Pinnan  $S_1$  läpi kulkeva vuo  $\Phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon_0} = 452 \text{ Vm}$

b) Pinnan  $S_2$  läpi kulkeva vuo  $\Phi_2 = \frac{q_2}{\epsilon_0} = -881 \text{ Vm}$

c) Pinnan  $S_3$  läpi kulkeva vuo  $\Phi_3 = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0} = -429 \text{ Vm}$

d) Pinnan  $S_4$  läpi kulkeva vuo  $\Phi_4 = \frac{q_1 + q_3}{\epsilon_0} = 723 \text{ Vm}$

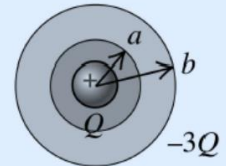
e) Pinnan  $S_5$  läpi kulkeva vuo  $\Phi_5 = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\epsilon_0} = -158 \text{ Vm}$

f) Riippuvatko edellä olevat vastaukset siitä, miten sähkövaraus on jakautunut pintojen sisällä?

Eivät riipu, sillä varaus lähettää ympärilleen tietyn vuon riippumatta varauksen paikasta, muodosta tai (geometrisesta) koosta. Ainoastaan varauksen suuruus vaikuttaa. Suljetun pinnan läpi kulkee kaikki vuo, mitä sisäpuolella olevista varauksista lähtee.

7. (22.38) Johtavasta aineesta valmistetun pallokuoren, jonka sisäsäde on  $a$  ja ulkosäde  $b$ , keskipisteessä sijaitsee positiivinen pistevaraus  $Q$ . Kuoren kokonaisvaraus on  $-3Q$ , ja kuori on eristetty ympäristöstään.

- Johda sähkökentän voimakkuuden lauseke keskipisteestä mitatun etäisyyden  $r$  avulla lausuttuna alueilla  $r < a$ ,  $a < r < b$  ja  $r > b$ .
- Mikä on pintavaraustiheys johtavan pallokuoren sisäpinnalla?
- Mikä on pintavaraustiheys johtavan pallokuoren ulkopinnalla?
- Hahmottele kuvio, joka näyttää kenttäviivat ja osoittaa kaikkien varausten sijainnin.
- Esitä graafisesti sähkökentän voimakkuus etäisyyden  $r$  funktiona.



Kuva 22.38

**Opetellaan aluksi käyttämään Gaussin lakia yleisesti pallosymmetrisissä tapauksissa. Sovelletaan tätä sitten myöhemmin tämän tehtävän tapaukseen.**

Anita Aikion monisteesta:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (22.8)$$

$\vec{E}$  = sähkökenttä Gaussin pinnan kohdalla

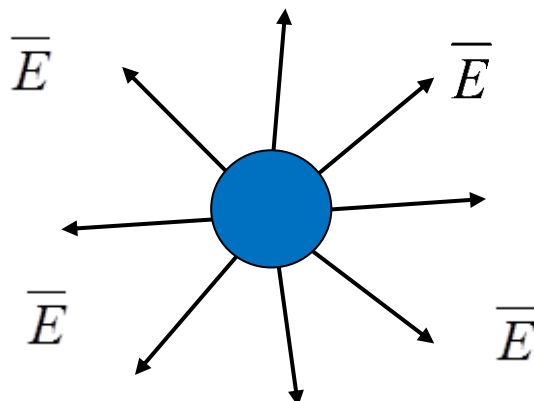
$d\vec{A}$  = pinta-alkiovektori Gaussin pinnalla

$Q$  = suljetun Gaussin pinnan sisään jäävä varaus

$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$

## Piirretään ensin sähkökentän kenttäviivat

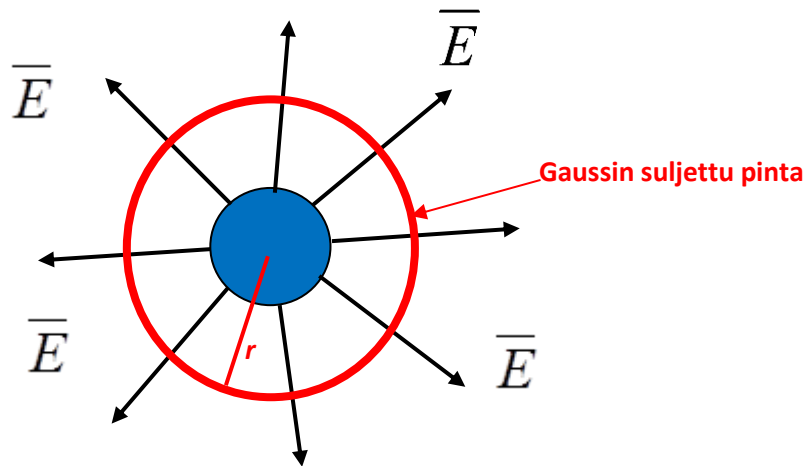
Alla olevassa kuvassa on piirretty tasaisesti varatun pallon aiheuttaman sähkökentän kenttäviivoja. Kuvassa on ajateltu, että pallon varaus on positiivinen ja siksi sähkökentän suunta on poispäin pallosta.



## Valitaan Gaussin pinta ja piirretään se kuvaan.

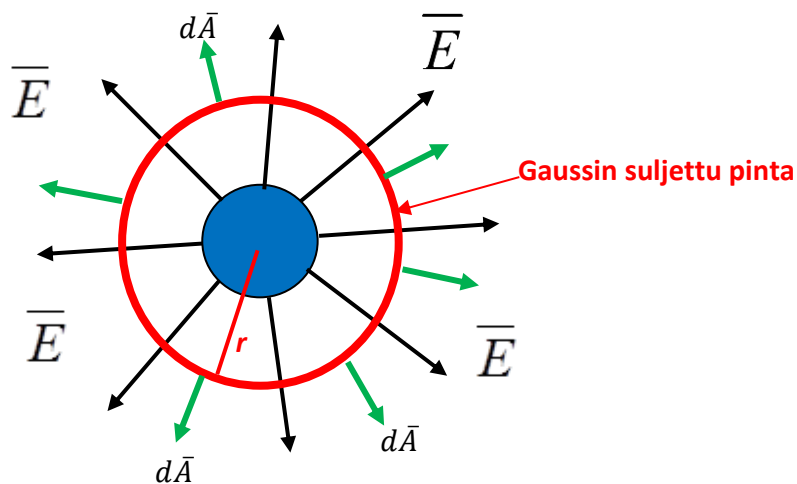
Pallosymmetrisille varausjakaumille valitaan Gaussin pinnaksi suljettu pallokuori, sylinterisymmetrisille suljettu sylinterikuori, tasoille sylinteri tai kuutio. Nyt siis valitaan pallo, jonka säde on  $r$ .

Alla olevassa kuvassa on edellinen kuva, johon on lisätty Gaussin suljettu pinta.



## Piirretään pinta-alkiovektorit Gaussin pinnalle.

Pinta-alkiovektorit ovat aina kohtisuorassa pintaa vastaan. Alla olevassa kuvassa on edellinen kuva, johon on lisätty pinta-alkiovektorit.



Huomaat, että sähkökenttävektorit ja pinta-alkiovektorit ovat yhdensuuntaisia joka kohdassa Gaussin pinnalla.

## Lasketaan Gaussin lain vasen puoli

Gaussin lain vasen puoli saadaan laskettua seuraavasti:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A E dA$$

koska  $E$ -vektorit ja  $dA$ -vektorit ovat yhdensuuntaisia. (Katso edellä oleva kuva.)

$$\oint_A E dA = E \oint_A dA$$

$E$  voidaan ottaa integraalimerkin eteen, koska se on vakio Gaussin pinnan kohdalla symmetrian vuoksi.

$$\oint_A dA$$

tarkoittaa Gaussin pinnan pinta-alaa, joka on  $r$ -säteisen pallon pinta-ala  $4\pi r^2$   
Nyt Gaussin lain vasen puoli saatiin muotoon

$$E \cdot 4\pi r^2$$

## Lasketaan Gaussin lain oikea puoli

Gaussin lain oikea puoli on

$$\frac{Q}{\epsilon_0}$$

$Q$  tarkoittaa Gaussin pinnan sisäpuolelle jääviä varauksia.  $Q$ :n suuruus vaihtelee tapauskohtaisesti. Lasketaan tämä jäljempänä, kun sovelletaan Gaussin lakia tähän tehtävään.



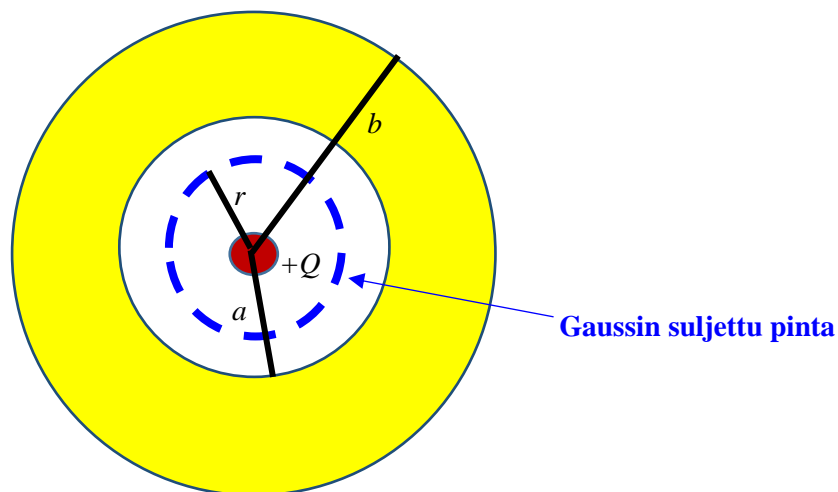
**Yhdistetään lopuksi Gaussin lain vasen ja oikea puoli ja ratkaistaan yhtälöstä sähkökenttä.**

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Sähkökentän suuruus on nyt laskettu. Suunta on  $\hat{r}$  eli säteen suunta. Suuntaa ei saada laskettua tällä menetelmällä vaan se täytyy päätellä.

**a) Sovelletaan edellä esitettyä tämän tehtävän tapaukseen.**

**Lasketaan sähkökenttä alueessa  $r < a$**



Gaussin lain vasen puoli laskettiin edellä. Se on pallosymmetrisissä tapauksissa

$$E \cdot 4\pi r^2$$

Lasketaan nyt Gaussin lain oikea puoli tässä tapauksessa. Gaussin pinnan sisään jää pelkästään varaus  $+Q$ . Oikea puoli on siis:

$$\frac{+Q}{\epsilon_0}$$

Yhdistetään oikea puoli ja vasen puoli.

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{+Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \underline{\underline{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}}$$

Lasketaan sähkökenttä alueessa  $a < r < b$

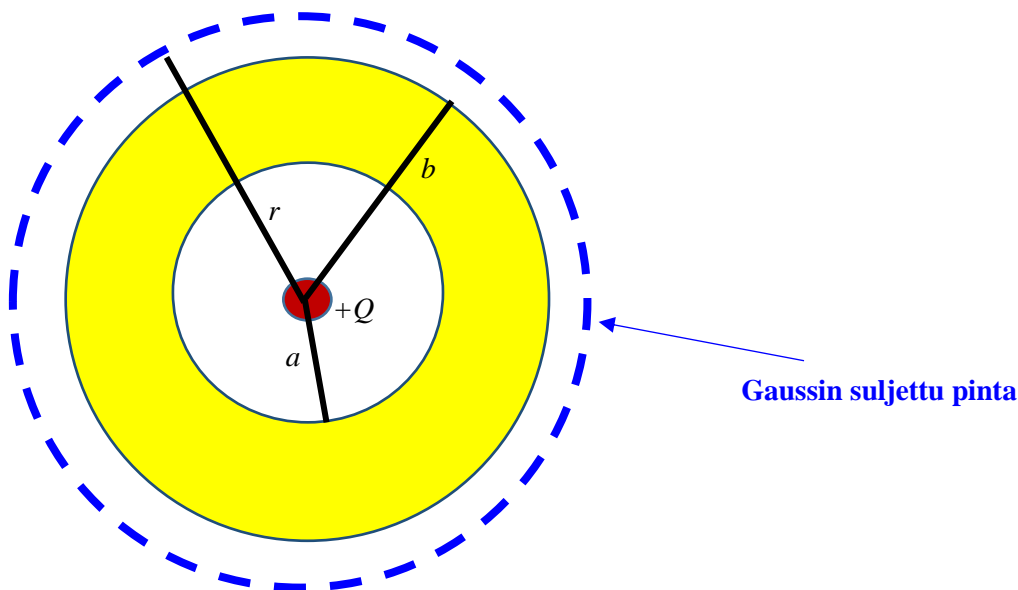
Anita Aikion monisteesta:

staattisessa tilanteessa makroskooppinen sähkökenttä homogeenisessa johteessa häviää.

Nyt siis johtavan pallokuoren sisällä

$$\underline{\underline{E = 0}}$$

Lasketaan sähkökenttä alueessa  $r > b$



Koska on kyse pallosymmetrisestä tapauksesta, Gaussin lain vasen puoli on edelleen

$$E \cdot 4\pi r^2$$

Entä oikea puoli? Mitä varauksia jää Gaussin pinnan sisäpuolelle? Systemin keskellä on varaus  $+Q$  ja pallokuoren kokonaisvaraus on  $-3Q$ . Gaussin pinnan sisäpuolelle jää siis  $Q_{\text{sis}} = +Q - 3Q = -2Q$ .

Gaussin lain oikea puoli on

$$\frac{-2Q}{\epsilon_0}$$

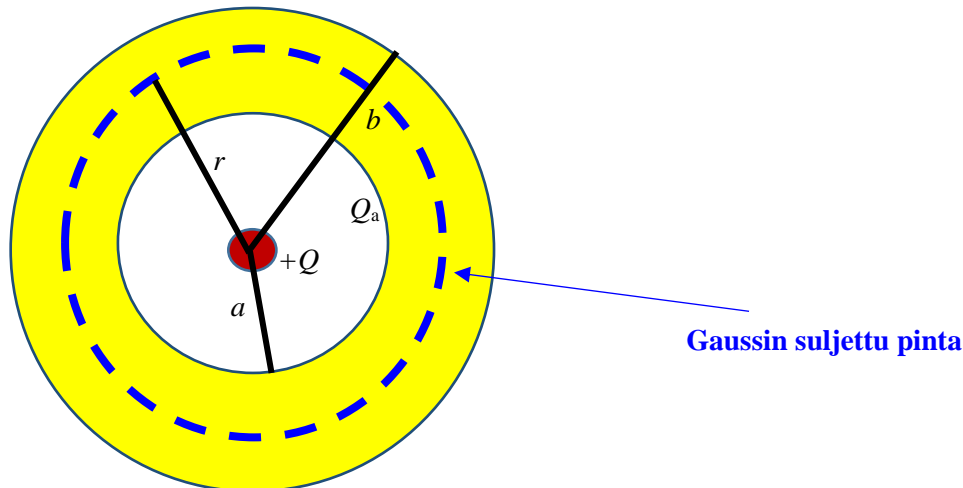
Yhdistetään oikea puoli ja vasen puoli.

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{-2Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \underline{\underline{\frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 r^2}}}$$

Suunta on kohden pallon keskipistettä.

## b) Lasketaan pintavaraustiheys johtavan pallokuoren sisäpinnalla.

Päätellään Gaussin lain avulla, mikä kokonaisvaraus on johtavan pallokuoren sisäpinnalla.



Koska johteen sisällä eli yllä olevassa kuvassa Gaussin pinnan kohdalla sähkökenttä on nolla, täytyy Gaussin pinnan sisälle jäävien varausten summa olla nolla. Olkoon sisäpinnan kokonaisvaraus  $Q_a$ . Lisäksi Gaussin pinnan sisälle jää keskipisteessä oleva varaus  $+Q$ .

$$Q_a + Q = 0 \rightarrow Q_a = -Q$$

Pintavaraustiheys tarkoittaa varausta pinta-alayksikköä kohden eli kaavana

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

Johtavan pallokuoren sisäpinnan ala on

$$A = 4\pi a^2$$

Nyt saadaan pintavaraustiheys

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{-Q}{4\pi a^2}$$

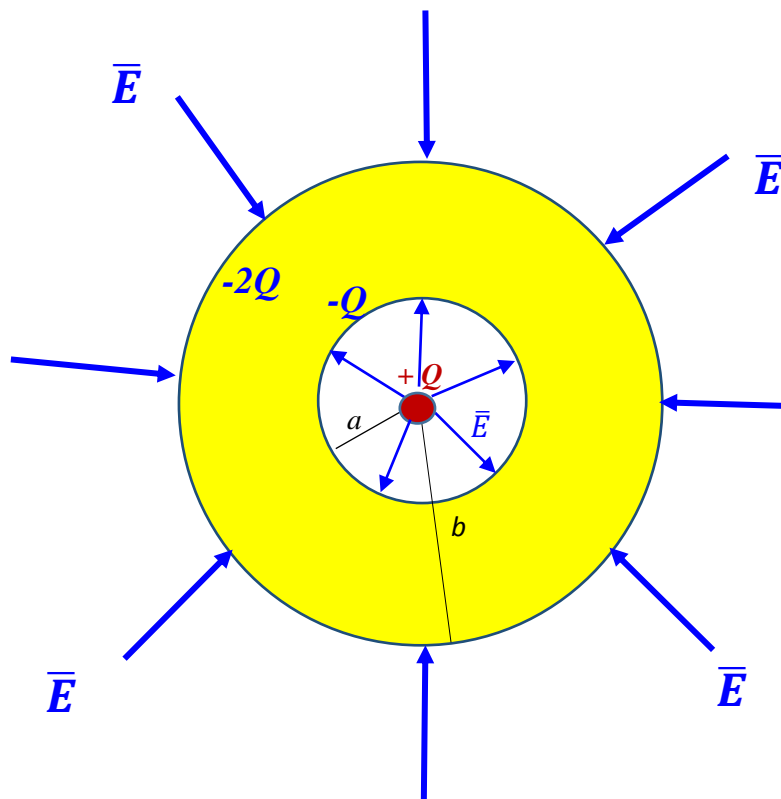
**c) Lasketaan pintavaraustiheys johtavan pallokuoren ulkopinnalla.**

Päätellään johtavan pallokuoren ulkopinnan kokonaisvaraus. Tehtävänannossa sanottiin, että pallokuoren kokonaisvaraus on  $-3Q$ . Laskimme b-kohdassa, että sisäpinnan kokonaisvaraus on  $-Q$ . Täten ulkopinnalle jää varausta  $-2Q$ :n verran.

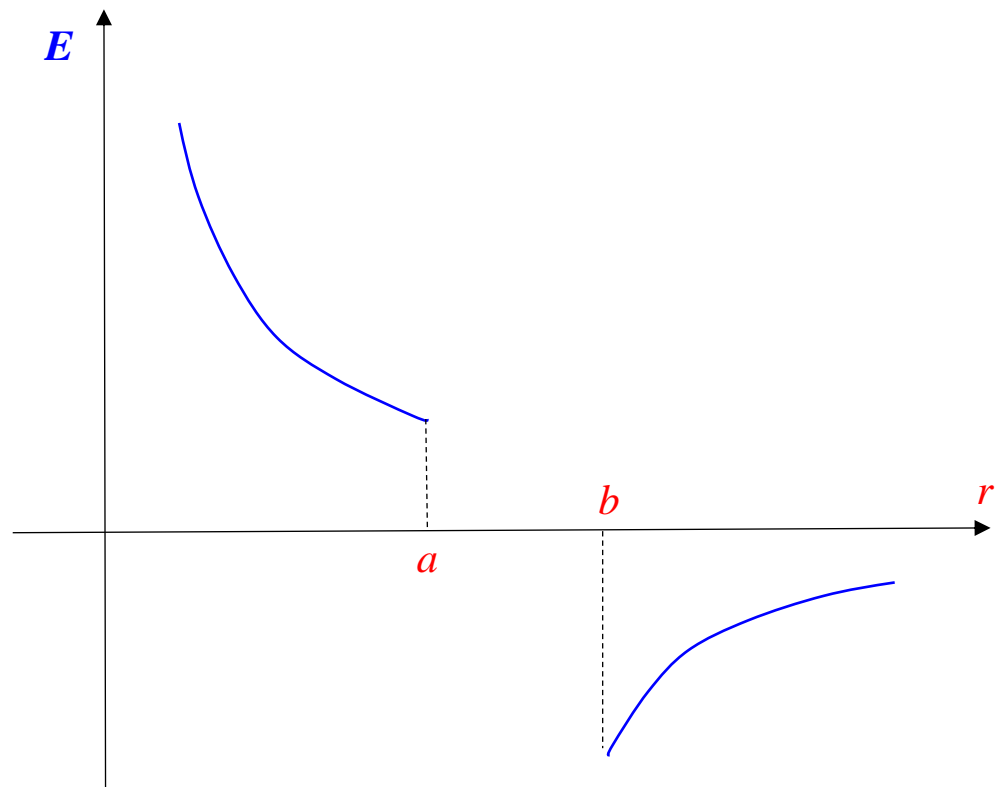
Pintavaraustiheys on nyt

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{-2Q}{4\pi b^2} = \frac{-Q}{2\pi b^2}$$

**d) Hahmotellaan kuva tilanteesta.**



e) Esitetään sähkökentän voimakkuus  $r$ :n funktiona.



8. (22.48) Positiivinen varaus on jakautunut tasaisesti umpinaisen, hyvin pitkän sylinterin sisälle. Sylinterin säde on  $R$  ja sen tilavuusvaraustiheys on  $\rho$ .

- Johda sähkökentän voimakkuuden lauseke sylinterin sisällä lausuttuna sylinterin akselista mitatun etäisyyden  $r$  ja varaustiheyden  $\rho$  avulla.
- Mikä on sähkökentän voimakkuus sylinterin ulkopuolella olevassa pisteessä lausuttuna sylinterin viivavaraustiheyden  $\lambda$  avulla?
- Vertaa a)- ja b)-kohdan tuloksia arvolla  $r = R$ .
- Piirrä sähkökentän voimakkuus etäisyyden  $r$  funktiona välillä  $r = 0$  ja  $r = 3R$ .

**b) Opetellaan aluksi käyttämään Gaussin lakia yleisesti sylinteriymmetrisissä tapauksissa. Laskemme ensi b-kohdan eli sähkökentän sylinterin ulkopuolella (etäisyydellä  $r$  sylinterin akselista), koska se on helpompaa.**

Anita Aikion monisteesta:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (22.8)$$

$\vec{E}$  = sähkökenttä Gaussin pinnan kohdalla

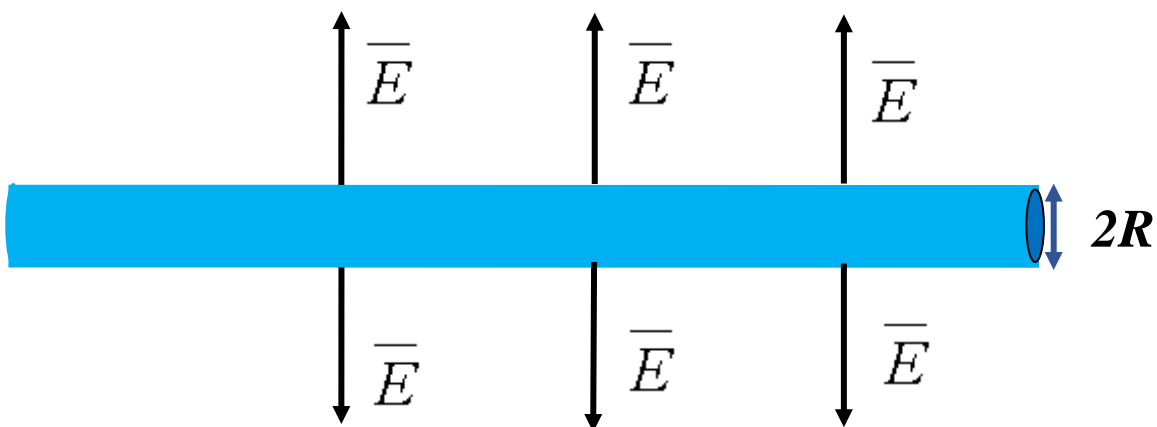
$d\vec{A}$  = pinta-alkiovektori Gaussin pinnalla

$Q$  = suljetun Gaussin pinnan sisään jäävä varaus

$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12}$  As/Vm

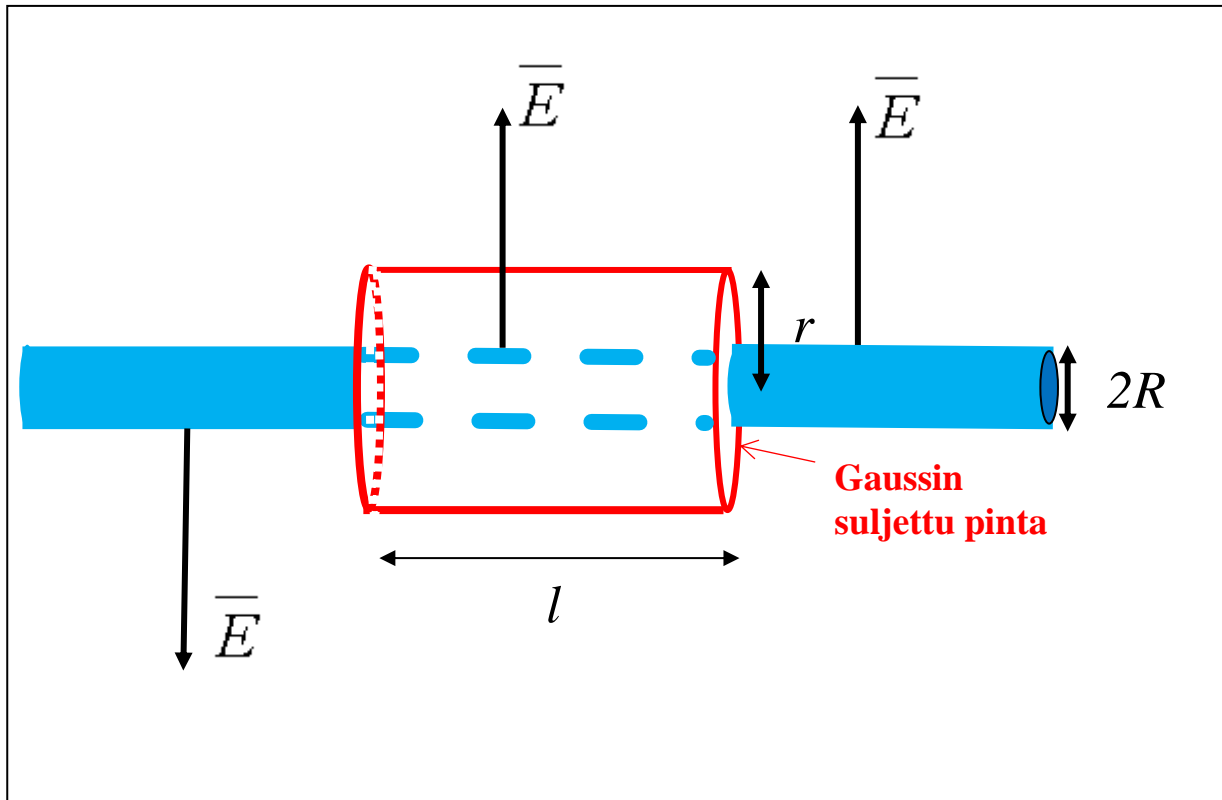
## Piirretään sähkökentän kenttäviivat

Alla olevaan kuvaan on piirretty sähkökentän kenttäviivoja sylinterin ulkopuolelle.



## Piirretään kuvaan Gaussin pinta.

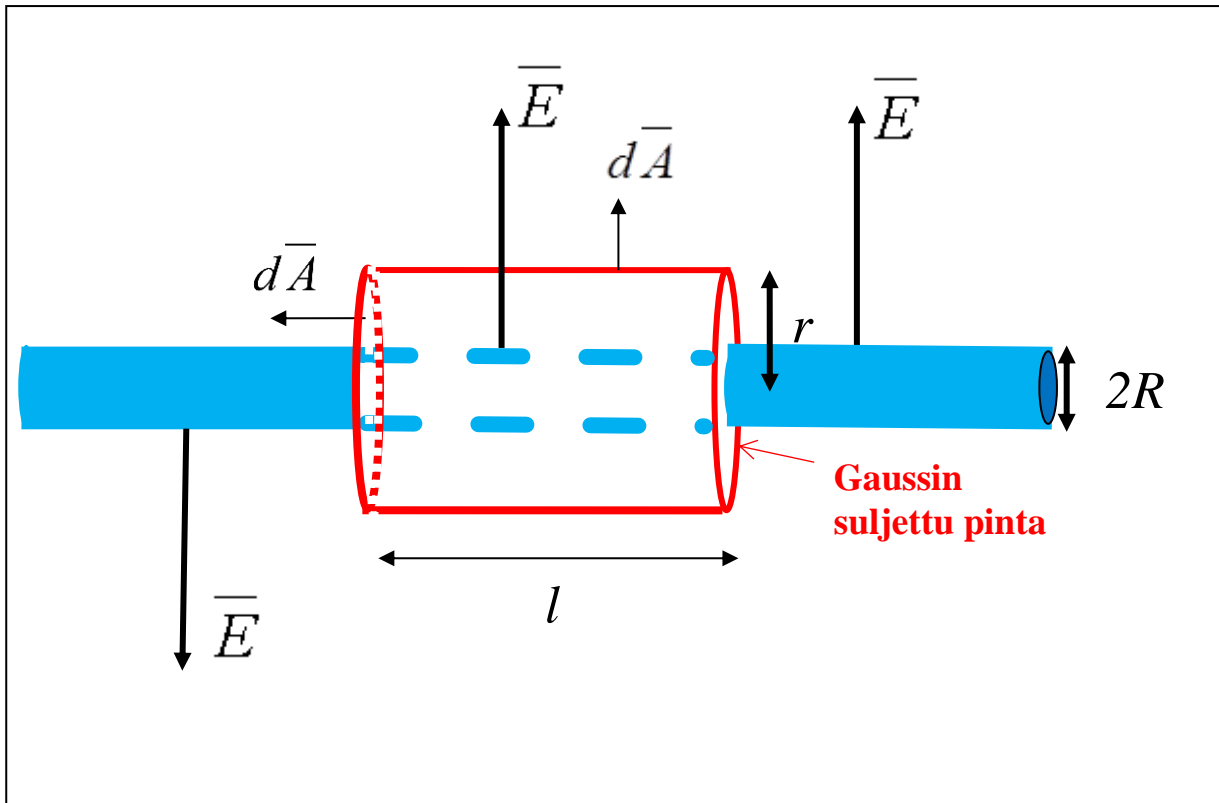
Sylinterisymmetrisille varausjakaumille valitaan suljetuksi Gaussin pinnaksi sylinteri. Alla olevassa kuvassa on systeemiin lisätty Gaussin suljettu pinta, joka on ympyräpohjainen sylinteri, jonka pituus on  $l$  ja pohjan säde  $r$ .





## Piirretään pinta-alkiovektorit Gaussin pinnalle.

Pinta-alkiovektorit  $d\vec{A}$  ovat kohtisuorassa pintaa vastaan. Alla on edellinen kuva, johon on lisätty muutamaan kohtaan Gaussin pinnalle pinta-alkiovektorit.



Kuvasta nähdään, että Gaussin pintana toimivan sylinterin vaipalla  $\vec{E}$  ja  $d\vec{A}$  ovat yhdensuuntaisia. Gaussin sylinterin päissä sen sijaan  $\vec{E}$  ja  $d\vec{A}$  ovat kohtisuorassa. Kun vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niiden välinen pistetulo tulee nolllaksi. Näin käy Gaussin sylinterin päissä. Kun vektorit ovat yhdensuuntaisia, niiden välinen pistetulo tulee pelkäksi itseisarvojen tuloksi eli tässä tapauksessa  $E dA$ :ksi. Näin käy vaipalla.

(Edellä on sovellettu kaavaa:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha$ , missä  $\alpha$  on vektoreiden  $\vec{A}$  ja  $\vec{B}$  välinen kulma.)

## Lasketaan Gaussin lain vasen puoli.

Gaussin lain vasen puoli saadaan laskettua jakamalla sylinterin pinnat kahteen osaan:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{vaippa}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{pää}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{vaippa}} E dA + 0$$

$$= \int_{\text{vaippa}} E dA = E \int_{\text{vaippa}} dA = E \cdot 2\pi rL$$

$\vec{E}$  ja  $d\vec{A}$  ovat yhdensuuntaisia vaipalla.

Sylinterin päissä  $\vec{E}$  ja  $d\vec{A}$  ovat kohtisuorassa.

$E$  saatiin ottaa pois integraalimerkin sisältä, sillä sähkökentän itseisarvo  $E$  on vakio vaipan alueella, koska vaippa on vakioetäisyydellä  $r$  sisäsylinterin pinnasta. Tällöin integraali

$$\int_{\text{vaippa}} dA$$

kuvaava pelkkää sylinterin vaipan alaa, joka on  $2\pi rL$ . Gaussin lain vasen puoli saatiin kuntoon.

## Lasketaan Gaussin lain oikea puoli.

$Q$  Gaussin lain oikealla puolella tarkoittaa Gaussin pinnan sisään jäävää varausta. Gaussin sylinterin pituus on  $l$ . Sisäsylinterissä on varaus pituusyksikköä kohden  $\lambda$ , joten Gaussin sylinterin sisään jää  $Q = l\lambda$ .

**Yhdistetään Gaussin lain vasen ja oikea puoli ja ratkaistaan yhtälöstä  $E$ -kenttä.**

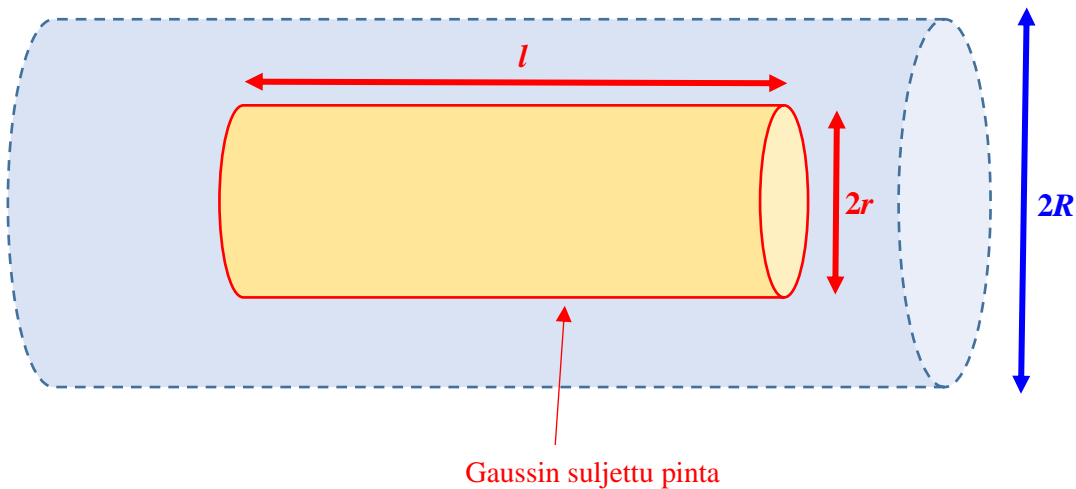
Nyt saadaan Gaussin laki muotoon:

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Sähkökentän suunta on säteen suunta  $\hat{u}_r$ . Suuntaa ei saada Gaussin lain integraalimuodosta. Se päätellään.

**a) Lasketaan sähkökenttä varatun sylinterin sisällä käyttäen Gaussin lakia.**

Piirretään nyt Gaussin pinta varatun sylinterin sisälle.



Gaussin lain vasen puoli saadaan samalla tavalla kuin edellä, koska on kyseessä sylinterisymmetrinen tilanne.

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 2\pi r L$$

Gaussin lain oikeaa puolta

$$\frac{Q}{\epsilon_0}$$

varten tarvitsemme Gaussin pinnan sisälle jäävien varausten summa  $Q$ . Tiedämme varaustiheyden  $\rho$ , joka on varaus tilavuusyksikköä kohden. Sama kaavana:

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

Gaussin sylinterin pituus on  $l$  ja pohjan säde  $r$ , joten sen tilavuus on

$$V = \pi r^2 l$$

Tämän sylinterin sisäpuolelle jää varaus

$$Q = \rho V = \rho \pi r^2 l$$

Gaussin lain oikea puoli tulee muotoon

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 l}{\epsilon_0}$$

Yhdistetään Gaussin lain vasen puoli ja oikea puoli, jolloin saadaan sähkökenttä sylinterin sisällä.

$$E(2\pi r l) = \frac{\rho \pi r^2 l}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

Sähkökentän on säteen suuntainen ja poispäin sylinterin keskiakselista.

c) Verrataan a- ja b-kohdan tuloksia sylinterin pinnalla eli tilanteessa, jossa  $r = R$ .

Sähkökenttä varaustiheyden avulla ilmaistuna, kun  $r = R$ , saadaan a-kohdasta:

$$E = \frac{\rho R}{2\epsilon_0}$$

Sähkökenttä viivavaraustiheyden avulla ilmaistuna, kun  $r = R$ , saadaan b-kohdasta:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Jotta saisimme selville, ovatko nämä kaksi  $E$ :n arvoa yhtä suuria, tarvitsee tietää viivavaraustiheyden ja (tilavuus)varaustiheyden yhteys. Otetaan sylinteristä  $L$ :n pituinen pala. Se sisältää varauksen  $Q$ , joka voidaan lausua sekä viivavaraustiheyden että (tilavuus)varaustiheyden avulla.

$$Q = \lambda L = \rho \pi R^2 L \rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\pi R^2}$$

Sijoitetaan tämä ylempään sähkökentän lausekkeeseen.

$$E = \frac{\lambda}{\pi R^2} \frac{R}{2\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Eli tulos on sama.

e) Esitetään sähkökentän voimakkuus  $r$ :n funktiona.

