

PIIRITEORIA I

Oulun yliopisto, Elektroniikan laboratorio

(c) 1997-2019 Timo Rahkonen

Monistetta saa käyttää vain Oulun yliopiston toimesta annettavaan piiriteorian opetukseen

versio	Tehtyjä muutoksia
2001	lisätty kappale 3.10 MNA-analyysistä lisätty muutama esimerkki lisätty esimerkkejä laskentaohjelmistojen käytöstä
2002	MNA-analyysi siirretty liitteeksi A, korjattu kpl 8.2
2003	Yhtenäistetty vastusverkkojen analyysikeinojen esitystä (kpl 3) Laplace-muunnos esitellään kappaleessa 8 Keskinäisinduktanssi nostettu luvusta 4 luvuksi 9
2004	Esitystapaa on systematisoitu Lisätty muutamia esimerkkejä ja kpl 8.6 (nollat ja navat) Spice-opas vaihdettu lyhyempään.
2005	Uudelleenjärjestely kappaleita osoitin- ja teholaskentakappaleita Runsaasti pieniä muutoksia ja lisäyksiä kpl:ssa 3-5 lyhennetty keskinäisinduktanssi-osuutta, lisätty suodatinasiaa
2006-8	Luennoissa ei juuri muutoksia, laskuharjoituksissa niinkin.
2009-11	Pari uutta esimerkkiä, simulaattoriosaa saatettu ajan tasalle. Osoitinlaskentakpl muokattu
2012-	Pientä siistimistä ja selventelyä siellä täällä

ALKUSANAT

Tämän monisteen laatiminen on aloitettu keväällä 1997 ja täydennetty vuosittain. Vuonna 2003 tehtiin suurehko remontti, jolloin osoitinlaskennan esittelyä aikaistettiin, jotta se ehdittäisiin kunnolla käydä läpi ennen harjoitustyötä. Vuoden 2005 painosta on edelleen muokattu sellaiseksi, että kurssi liittyisi selkeämmin kurssiin Elektroniikkasuunnittelun perusteet. Sen jälkeen monisteessa on tehty lähinnä hienosäätöä, laskuharjoitukset sen sijaan elävät lähes vuosittain. 2012 harjoitustyötä on lavennettu, ja piirisimulaattorin käyttö näkyy vahvemmin myös luennoissa.

Luentomoniste kattaa kaikki Piiriteoria I -kurssissa käsiteltävät asiat, mutta asiasta kiinnostuneet voivat tutkia lisäksi mitä hyvänsä Circuit Theory -otsikon alla olevaa kirjaa. Kurssikirjaksi kirjastossa saatavilla teos

- J. Nilsson, S. Riedel: Electric Circuits (6th ed.), luvut 1-11, 16

Englanninkielistä tekstiä joutuu tällä alalla lukemaan jatkuvasti. Ei ole huono ajatus aloittaa sen harjoittelemista NYT.

Oulussa maaliskuussa 2019

prof. Timo Rahkonen

SISÄLLYSLUETTELO

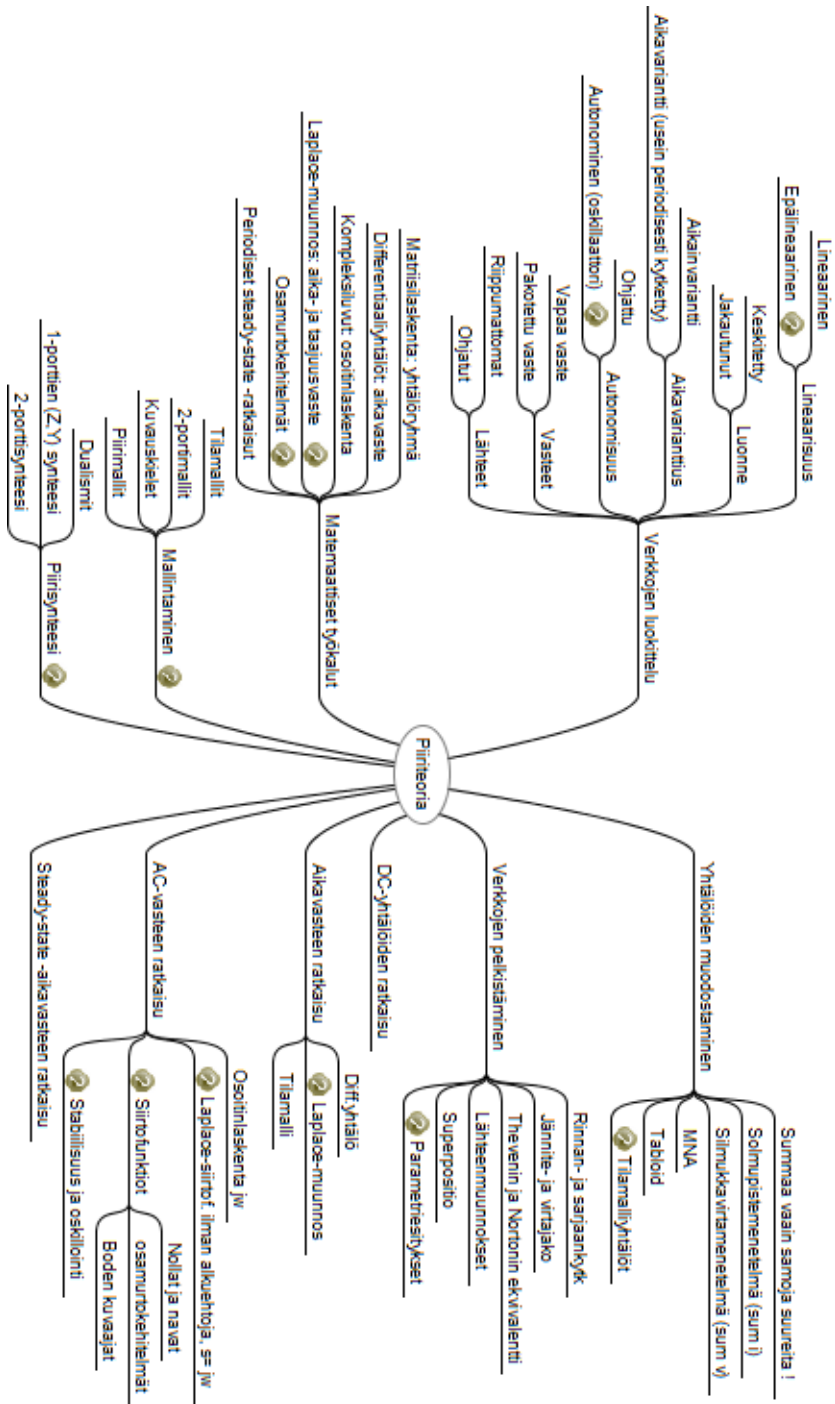
1. JOHDANTO	7
1.1 Kurssin asema ja sisältö	7
1.2 Kuormittavan vaikutuksen huomioonottaminen	8
1.3 Piiriteorian käyttökohteita	9
1.4 Sovellusesimerkkejä	10
1.5 Ongelmanratkaisun periaatteita	11
1.6 Numeerinen ja symbolinen analyysi	12
1.7 Laskennan apuvälineitä	14
2. PERUSSUUREET JA PIIRILAIT	17
2.1 Suureita	17
2.2 Nimityksiä ja käsitteitä	22
2.3 Merkintöjen napaisuudet	26
2.4 Piirielimet	28
2.5 Kirchhoffin lait	30
2.6 Vastusten sarjaan- ja rinnankytkennät	33
2.7 Jännite- ja virtajako (vaimentaminen)	36
2.8 Riippumattomat ja ohjatut lähteet	39
2.9 Käytännön vahvistinrakenteita	41
2.10 Lähteenmuunnokset	42
2.11 Lähteiden kytkentöjä	44
3. VERKKOYHTÄLÖIDEN MUODOSTAMINEN	47
3.1 Johdanto	47
3.2 Yhtälöryhmien esittäminen matriisimuodossa	48
3.3 Yhtälöryhmien ratkaiseminen	49
3.4 Verkkoyhtälöiden muodostamistapoja	52
3.5 Lisää verkkoyhtälöiden muodostamisesta	57
3.6 Solmupisteanalyysi	59
3.7 Ohjatut lähteet solmupiste-esityksessä	62
3.8 ‘Vääräntyyppisten’ lähteiden käsittely	63
3.9 Silmukkavirtamenetelmä	66
3.10 Ohjatut lähteet silmukkavirtamenetelmässä	68
3.11 Vielä muutamia esimerkkejä	74
4. VERKKOJEN YKSINKERTAISTAMINEN.....	77
4.1 Johdanto	77
4.2 Ratkaiseminen solmupiste kerrallaan	78
4.3 Millerin teoreema	79
4.4 Superpositiomenetelmä	81
4.5 Theveninin ja Nortonin ekvivalenttipiirit	84
4.6 Ekvivalenttipiirin muodostaminen	85
4.7 “Näkyvä resistanssi”	90
5. REAKTIIVISET PIIRIELIMET.....	93
5.1 Johdantoa	93
5.2 Yleisiä herätteiden aaltomuotoja	94

5.3	Kapasitanssi : $Q = CU$	96
5.4	Kapasitanssien rinnan- ja sarjaankytkennät	100
5.5	Kapasitiivisten piirien aaltomuotoja	102
5.6	Induktanssi: magneettivuo = $L \cdot I$	103
5.7	Induktanssien rinnan- ja sarjaankytkennät	106
5.8	Induktiivisten piirien aaltomuotoja	107
5.9	Keskinäisinduktanssi	108
6.	YHDEN AIKAVAKION RLC-PIIRIEN AIKAVASTEET	113
6.1	Johdanto	113
6.2	Differentiaaliyhtälöiden ratkaisutapoja	114
6.3	Konvoluution merkitys	118
6.4	Aikavasteen muodostaminen	120
6.5	DC-tilanteen arvioiminen	123
6.6	Verkkojen askelvasteita	124
6.7	Signaalilähteen tyyppin vaikutus	131
6.8	Muutamia esimerkkejä	132
7.	SINIMUOTOISTEN SIGNAALIEN ESITTÄMINEN OSOITINLASKENNALLA	137
7.1	Taustaa	137
7.2	Trigonometrinen kaavojen käyttö	139
7.3	Kompleksiluvuista	140
7.4	Sinimuotoisten signaalien esitystavat	142
7.5	Virran ja jännitteen suhde sinimuotoisilla signaaleilla	145
7.6	Immittanssin käsite	147
7.7	Taajuusvaste	156
7.8	Desibelin käsite	158
7.9	Dekadi ja oktaavi	159
7.10	Resonanssi	163
7.11	Sarjaresonanssi	165
7.12	Rinnakkaisresonanssi	167
8.	SIGNAALIN TEHO JA TEHON SIIRTYMINEN.....	169
8.1	Sinimuotoisen signaalin teho	169
8.2	Tehollisarvo ja huipusta-huippuun arvo	174
8.3	Tehojen osoitinlaskenta, pätö- ja loisteho	176
8.4	Maksimaalinen tehonsiirto	178
8.5	Kolmivaihevirta	183
8.6	Tähti- ja kolmiokytkentä	184
9.	LAPLACE-MUUNNOKSEN KÄYTTÖ PIIRIANALYYSISSÄ.....	187
9.1	Integraalimuunnoksista	187
9.2	Yleisimpiä Laplace-muunnoksia	190
9.3	Aikavasteiden laskeminen alkuehtoineen	191
9.4	Esimerkki: Polttomootorin sytytysjärjestelmä	194
9.5	Steady-state vasteiden laskeminen	197
9.6	Nollat ja navat	199
9.7	Boden kuvaajan hahmotteleminen	200
9.8	Siirtofunktion stabiilisuudesta	202
10.	KORKEAMMAN ASTEEN VERKKOJEN VASTEET.....	203

10.1 Johdantoa	203
10.2 Toisen asteen systeemin yleinen muoto	205
10.3 Asteluku on suurempi kuin kaksi	208
10.4 Suodattimista	209
10.5 Suodattimien vasteen kuvaaminen	210
10.6 Suodatinprototyyppien perusteet	211
11. PIIRISIMULAATTORIN KÄYTTÖ	213
11.1 Yleistä	213
11.2 Piirisimulaattorilla mahdolliset analyysit	214
11.3 Erilaisia piirisimulaattoreita	216
11.4 SPICE:n komponenttimallit	217
11.5 LTSpicen ominaisuuksia	219
11.6 Vinkkejä	220
11.7 Analogiset kovonkuvauskielet	221

LIITE A. Muita verkkoyhtälöiden ratkaisutapoja

Lisätietoa löytyy kurssin optima-sivulta.



1. JOHDANTO

1.1 Kurssin asema ja sisältö

Tämä kurssi antaa pohjatiedot kaikille analogiaelektronikan kursseille, ja monille signaali- ja tietoliikenneteoriassa tarvittavilla operaatioille. Piirianalyysin keinoja käytetään mallittamaan myös monia muita fysikaalisia ilmiöitä, kuten lämmön johtumista jne. Kurssi itsessään tarvitsee pohjatietoja matriisialgebrasta, kompleksianalyysistä ja differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisesta, ja kurssissa opittavia keskeisimpiä asioita ovat:

- Sähköisten piirien toimintaa kuvaavien **yhtälöryhmien systemaattinen muodostaminen**. Verkko-yhtälöiden kuvaaminen on hyvin jäsentynyttä, ja sähköisten piirien simulaattoreita voidaan soveltaa muillakin tekniikan aloilla.
- Energiavarastojen (kapasitanssin ja induktanssin) aiheuttamien **aikavasteiden (muistin/hitauden) ymmärtäminen**. Energian varastoiminen ja purkaminen aiheuttaa aina hitautta.
- **Sinimuotoisten signaalien vasteen laskeminen** kompleksilukuihin perustuvalla osoitinlaskennalla. Sinimuotoisia signaaleja käsitellään kompleksilukuosoittimina myös signaali-, tietoliikenne- ja säätöteoriassa pääosin .

Näiden perustavoitteiden lisäksi toivotaan, että kurssista jäisi muistin sopukoihin myös seuraavaa:

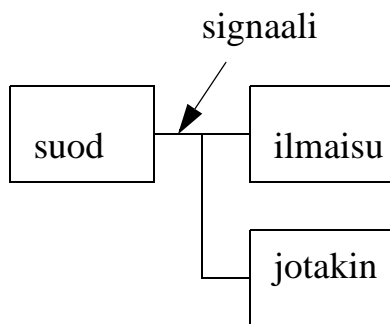
- Kuormittavan vaikutuksen ymmärtäminen. Monia signaalinkäsittelyongelmia voidaan tutkia lohkokaaavionomaisesti, mutta useimmissa fysikaalisista systeemeissä on tunnistettavissa sekä potentiaalisuure (jännite) että virtaamasuure (virta), ja systeemiä analysoitaessa on tutkittava kumpaakin. Yksinkertaisin esimerkki tästä on jännitemittaus: jos jännitemittari ottaa mittavasta kohteesta virtaa, se samalla vaikuttaa myös jännitemittauksen tulokseen. Tällöin sanotaan, että mittari kuormittaa mitattavaa suuretta.
- Piiriä kuvaavan mallin pelkistäminen. Sähköiselle piirille voidaan hyvin suoraviivaisesti kirjoittaa sen toimintaa kuvaavat yhtälöt, mutta tällöin siihen helposti tulee tarpeettoman monta muuttujaa, jolloin sen ratkaiseminen (etenkin käsin tai symbolisesti) käy työlääksi. Pienellä “helposti nähdään” -tyyppisellä pohdiskeillä ongelmaa voidaan usein merkittävästi yksinkertaistaa.

1.2 Kuormittavan vaikutuksen huomioonottaminen

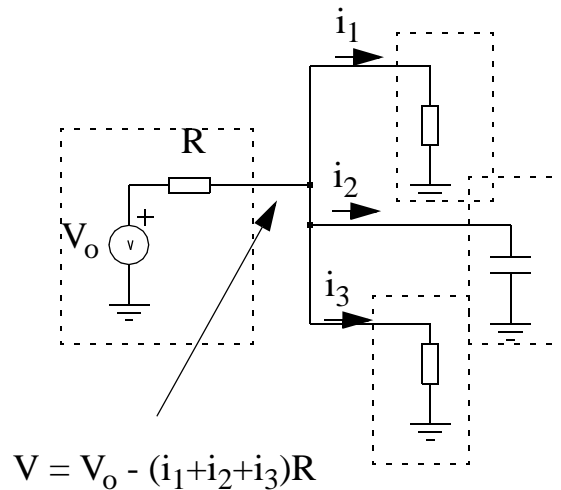
Monissa säätöön, laskentaan tai signaalinkäsittelyyn liittyvissä tehtävissä voidaan eri toimintoja mallittaa toisistaan riippumatta. Yleinen tapa kuvata kokonaisuuksia on käyttää lohkokaavioita, joissa lohkoissa tapahtuu jokin abstrakti toiminta (suodatus, ilmaisu, tms.), ja lohkojen väliset signaalit voidaan kytkeä suoraan toisiin lohkoihin, mutta seuraavilla lohkoilla ei ole vaikutusta edellisten toimintaan.

Kaikissa fyysisissä järjestelmissä mikä hyvänsä operaatio vaatii tehoa, ja tämä kuormittaa systeemin muita osia - esimerkiksi polkupyörän nopeusmittarin magneettianturi jarruttaa hieman pyörän pyörimistä, verenpaineen mittaus tukkii verisuonen vähäksi aikaa, ja niin edelleen. Näinpä esim. sähkötekniikassa ei riitä, että tarkastellaan pelkästään vahvistin- tai suodatinlohkojen välisiä jännitteitä, vaan on tutkittava myös jälkimmäisten lohkojen ottamaa virtaa. Oheisessa kuvassa yhden lohkon lähtö on kuvattu jännitelähteenä ja lähtöresistanssina, jolloin ohjattavien lohkojen ottama virta vaikuttaa lohkosta ulos saatavaan jännitteeseen. Tätä ilmiötä kutsutaan **kuormittamiseksi**, ja sen hallitsemiseksi kaikissa rajapinnoissa on tutkittava sekä jännitettä että virtaa, ja niiden suhteeseen vaikuttaa välipisteiden kokonaisresistanssi (impedanssitaso).

Lohkokaavioesitys



Lohkojen kuormittava vaikutus



1.3 Piiriteorian käyttökohteita

Systemien toiminnan mallittaminen

- Piiriteoria on sähköisen piirin toiminnan mallittamista. Samantapaista mallitusta ja analyysiä voidaan tehdä kaikille fysikaalisille systeemeille.

Signaalin tai energian siirtäminen (power transfer)

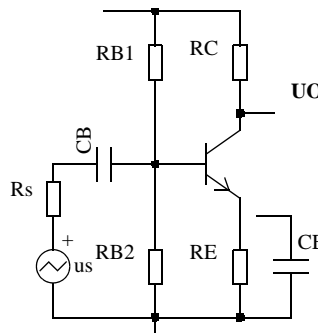
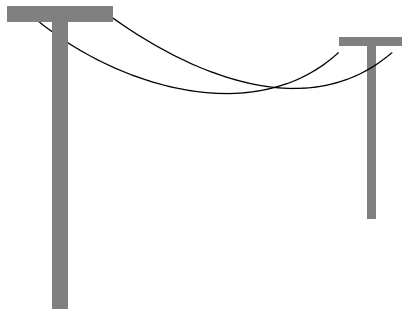
- Tehon siirtyminen. Huomaa että tehon siirtäminen vaatii sekä jännitettä että virtaa, jolloin kuormituksen aiheuttaman virrantarpeen ymmärtäminen on tärkeää
- Häviöt ja häiriöt siirtotiellä
- Tärkeää mm. voimansiirrossa ja RF-tekniikassa, jossa teho on kallista.

Vahvistaminen (amplifying)

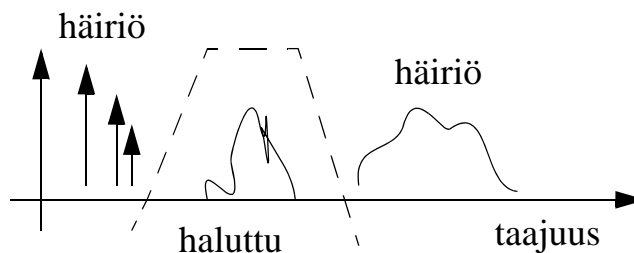
- Vahvistimien toimintapisteen asettaminen
- Vahvistuksen ja taajuuskaistan laskeminen ja mitoittaminen

Taajuuskaistan rajaaminen (suodattaminen, filtering)

- Taajuusalueen rajaaminen tai tahaton rajoittuminen



$$A_u(f) = u_o(f) / u_s$$



1.4 Sovellusesimerkkejä

DC-toimintapisteiden asettaminen ja laskeminen

Kuva a esittää tyypillistä jännitejakoketjua, jossa jännitteeksi U_o voidaan säätää tietty murto-osa jännitteestä U_{CC} . Kuva b esittää yleistä virtareferenssiä, jossa tarkka jännite U_{BG} (usein 1.2 V) peilataan vastuksen R_{ext} yli ja tuotetaan siten referenssivirta.

Vahvistuksen ja siirtofunktioiden laskeminen

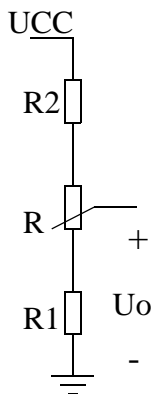
Kuvan c) piirissä on jänniteohjatusta virtalähteestä rakentuva (transistori)vahvistin, jonka vahvistuksen lausekkeessa näkyy takaisinkytkennän R_E vaikutus ja tulo- ja lähtöpiirin kuormituksen aiheuttama vaimennus.

Taajuusvasteen rajataajuuksien tunnistaminen

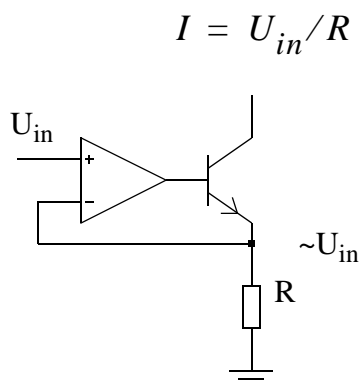
Kuvassa c) kondensaattorit C_1 aiheuttaa alaraja- ja C_{bc} ylärajataajuuden, joiden suuruudet (s.o. kaista, jolla vahvistimen vahvistus pysyy vakiona) on kyettävä laskemaan.

$$U_o = \frac{R_1 + xR}{R_1 + R_2 + R} \cdot U_{CC}$$

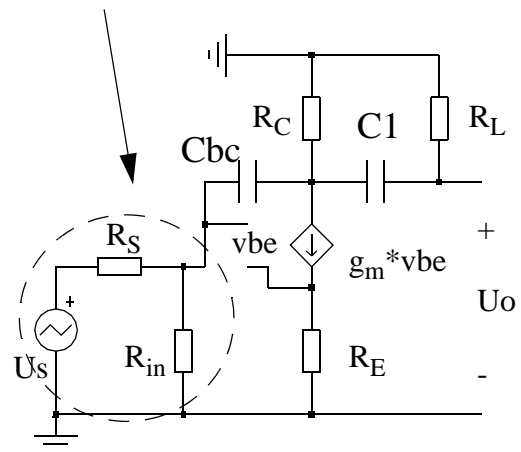
$$\frac{U_o}{U_s} \approx \frac{R_{in}}{R_s + R_{in}} \cdot \frac{-g_m}{1 + g_m R_E} \cdot \frac{R_L \cdot R_C}{R_C + R_L}$$



a)



b)



c)

1.5 Ongelmanratkaisun periaatteita

Piiriteoria on teknisesti yhtälöryhmien muodostamista ja ratkaisemista, ja siihen pätee samat lainalaisuudet kuin mihin hyvänsä ongelmanratkaisuun. Voidaan erottaa seuraavat vaiheet, joita voi vallan mainiosti soveltaa myös tenttitehtäviin vastattaessa (jokseenkin samassa suhteessa tehtävistä saa pisteitäkin).

- Selvitä mitä tunnetaan ja mitä on ratkaistava. Yhtälöryhmän ratkaisemiseen tarvitaan yhtä monta riippumatonta yhtälöä kuin on tuntemattomiakin.
- Visualisoi ongelma. **Piirrä siis piirikaavio ja merkitse** siihen mitä suureita käytät laskuissasi.
- Vertaile mielessäsi ratkaisukeinoja ja valitse niistä soveliaain. Ratkaisumenetelmällä voidaan vaikuttaa mm. muodostuvien yhtälöiden määrään, ja esim. aika- ja taajuusvasteita lasketaan aivan eri menetelmillä.
- Muodosta yhtälöt ja mieti vielä oliko ajatuskulku järkevä. Tarkista että suureiden yksiköt ja **suuruusluokat** (nano, piko jne) ovat oikein. **Ampeereita ja voltteja ei voi laskea yhteen !**
- Laske tulos. Tämä on vain raakaa työtä, joka kannattaa teettää koneella aina kuin mahdollista.
- Tarkista onko tulos järkevä ja oikein. **Tarkista siis pikaisesti yksiköt**, suuruusluokat, polariteetit, energian säilyminen jne.
- Piirisimulointeja tehdessäsi tarkista suureiden akselien skaalaus : ovatko suureet ja aikaskaala järkevän kokoisia. Kaikkien suunnitteluohjelmien virheilmoitukset on tarkoitettu luettavaksi, niissä yleensä on vihje siitä mikä vastustaa.

1.6 Numeerinen ja symbolinen analyysi

Numeerisessa analyysissä lasketaan lukuarvoilla, ja tuloksille saadaan numeerisia arvoja (voltteja, ampeereja), kun kaikkien komponenttien arvot tunnetaan. **Symbolisessa analyysissä ei käytetä numeerisia arvoja, vaan ratkaisu saadaan kaavamuodossa**, jolloin siitä voidaan tunnistaa eri komponenttien arvojen vaikutus tulokseen.

Piirianalyysiin soveltuvia numeerisia tietokoneohjelmia, ns. piirisimulaattoreita on kehitetty 70-luvulta alkaen, ja niiden käyttö analogiasuunnittelussa on nykyisin hyvin yleistä - mm. integroitujen piirien suunnittelu nojaa lähes yksinomaan piirisimulaattorien käyttöön. Miksi sitten piirien käyttäytymistä pitäisi laskea symbolisesti tai jopa käsin, jos simulaattori tekee sen nopeammin ja tarkemmin? Ohessa muutamia syitä:

Piirin toiminnan ymmärtäminen

Numeerinen simulaattori ilmoittaa lopputuloksen, muttei ei minkäänlaista selitystä siitä mitkä komponentit vaikuttavat vahvistukseen, mitkä rajoittavat taajuuskaistaa jne. Näiden riippuvuuksien löytämiseen tarvitaan symbolista analyysiä.

Suunnittelun lähtökohdaksi

Suunnitteluun ei välttämättä ole tarjolla prujua, vaan ongelman ratkaisuksi on löydettävä sopiva, ehkä jopa uusi piirirakenne. Tämä ei onnistu, jollei ymmärrä miten erilaiset peruspiirit toimivat, ja niihin tutustuu vain laskemalla muutaman kerran niiden toiminnan läpi.

Synteessin apuna

Kun piirin toiminta ymmärretään, sille voidaan laatia mitoitusohje ja -proseduuri, jota seuraamalla saadaan haluttu toiminta. Esim. vahvistimista voidaan löytää tietyt vastussuhteen ($A_u = -RC/(RE+re)$ tms.), jotka vaikuttavat vahvistukseen. Useissa suodattimissa tietyt ominaisuudet on mitoitettava oikeassa järjestyksessä, jotteivät myöhemmät mitoitusvaihtoehdot vaikuttaisi jo mitoitettuihin ominaisuuksiin.

Vianetsintä

Hyvin usein mitattu tai simuloitu tulos poikkeaa odotetusta, ja syy tähän on jollain tavoin löydettävä. Todennäköisimpiä syitä ovat puuttuva tai väärä kytkentä tai väärä komponenttiarvo, ja nämä paikallistetaan parhaiten siten, että suunnittelija

mielessään kuvittelee todennäköisimmät viat ja niiden vaikutuksen verkon toimintaan. Näin debuggaustilanteessa **suunnittelija joutuu päässään analysoimaan karkeasti mutta nopeasti suuren joukon erilaisia permutaatioita.**

Mallittaminen

Nykyisen elektroniset systeemit ovat usein niin laajoja, että niiden tarkka simuloiminen ei enää onnistu, vaan erilaisille lohkoille on rakennettavia pelkistettyjä **toiminnallisia malleja tai idealisoituja sijaiskytkentöjä**. Niitä käytetään esim. systeemisimuloinneissa tai testaussuunnittelussa näyttämään tuotantotestien suunnittelijalle mitä toimivan, mutta vasta suunnitteilla olevan laitteen tulisi tehdä. Näiden mallien on kuitenkin vastattava riittävän tarkoin mutta laskennallisesti riittävän yksinkertaisesti todellisuutta, joten niihin on mallitettava tietoa aika- ja taa-juusvasteista ja tulo- ja lähtöporttien jännite-virta -suhteista. Mallit muodostetaan joko piirikaaviona ideaalisista lähteistä ja peruskomponenteista, tai kuvauskieliä käyttäen differentiaaliyhtälöryhminä.

Ongelman kuvaaminen tietokoneelle

On syytä huomata, että mistään apuohjelmista ei ole apua, jollei ongelmaa kyetä kuvaamaan koneen ymmärtämällä kielellä. Lineaaristen piirien analysointi onnistuu matriisialgebran keinoin, jos ongelma on ensin saatu kuvattua yhtälöryhmäksi.

Tämän kurssin keskeisintä sisältöä onkin opetella systemaattisia tapoja sähköisiä piirejä kuvaavien yhtälöryhmien laatimiseen.

Kaikista tietokoneavusteisista keinoista huolimatta piirien toiminnan ymmärtäminen ja vianetsintä perustuu edelleen paljolti päässä ja käsin laskemiseen. Tämän takia kurssissa käsitellään paljon erilaisia käsilaskentaa helpottavia keinoja ja niksejä.

Toisena tärkeänä (ja edellisen kanssa osin ristiriitaisena) tavoitteena on oppia keinoja nopean käsilaskennan ja -analyysin helpottamiseksi.

1.7 Laskennan apuvälineitä

Käsilaskenta on valitettavan virhealtista, ja koulusta tuttu käytäntö “periaate oikein antaa neljä pistettä kuudesta” koituu kalliiksi teollisuudessa (lentokoneet, sil-
lat, sydämentahdistimet jne.). Niinpä vakavassa mielessä tehtävään laskentaan kan-
nattaa ja tulee käyttää kaikkia mahdollisia apuvälineitä.

Tämän kurssin apuna voidaan käyttää mm. seuraavia ohjelmistoja:

Matlab / Octave

Matlab on puhtaasti numeeriseen laskentaan tarkoitettu helppokäyttöinen työ-
kalu, jota ohjelmoidaan c:n tapaisella lausekielellä. Se soveltuu etenkin lineaaristen
reaali- ja kompleksiarvoisten yhtälöryhmien (matriisiyhtälöiden) ratkaisemiseen,
jolloin sillä voi laskea lineaaristen verkkojen DC- ja AC-vasteita, mutta jo transient-
tivasteiden laskeminen vaatii mielikuvitusta.

Matlab käynnistyy osaston unix-verkossa komennolla **matlab**, ja sen manuaalit
käynnistyvät matlabin komentoikkunassa komennolla `helpdesk`. Funktioiden helpin
saa nopeimmin näkösälle esim. komennolla `help sin`

Matlabista on olemassa myös enimmäkseen yhteensopiva PC-ilmaisversio
nimeltä **octave**, joka on saatavissa osoitteesta <http://www.gnu.org/software/octave/>.
Suosittelen lämpimästi sen asentamista.

Maple / Maxima

Maple on sekä numeeriseen että symboliseen laskentaan soveltuva työkalu, jolla
voidaan mm. ratkoa verkon vasteita ja siirtofunktioita symbolisesti - se osaa mm.
ratkoa differentiaaliyhtälöitä suljetussa muodossa. Symbolista aritmetiikkaa ei ole
niin helppo ymmärtää kuin raakaa numeerista matriisilaskentaa, ja maplen toiminta-
logiikka vaatii totuttelua. Oikein käytettynä se on kuitenkin huomattavan voimakas
työkalu.

Maple käynnistyy osaston unix-verkossa komennolla **xmaple &**. Funktioiden
helpin saa näkösälle kysymysmerkillä: `?sin` . Lisää tietoa Maplesta löytyy mm.
Heikki Apiolan kirjasta “Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjel-
malla” tai verkkosivuilta

<http://www.math.hut.fi/~apiola/maple/opus>

Maplea vastaava (muttei koodiyhteensopiva) ilmainen symbolisen laskennan työkalu on **Maxima**, joka on imuroitavissa ao. osoitteesta. Suosittelen kovasti: pikuisen hidas oppia mutta älyttömän kätevä kaikkeen symboliseen laskemiseen.

<http://maxima.sourceforge.net/>

Piirisimulaattorit

Piirisimulaattorit ovat nimenomaan sähköisten piirien analysointiin tarkoitettuja numeerisia laskentakoneita, joiden käyttäminen on tehty mahdollisimman helpoksi: laskenta-algoritmit eivät näy käyttäjälle, ja ongelma kuvataan rakenteellisen kytkentälistana tai jopa piirikaaviona, kun mm. matlabia ja maplea varten käyttäjän on ensiksi muodostettava muodostettava ongelmaa kuvaava yhtälöryhmä, sitten mietittävä miten se ratkaistaan ja lopuksi poimittava haluttu tulos.

Tämän kurssin harjoitustyö tehdään Windows-ympäristössä (ja winessä) toimivalla ilmaisella **LTSpice**-ohjelmalla, jonka voi (ja kannattaa) asentaa myös kotikoneelle. Piirisimulaattorien käytöstä on enemmän kappaleessa 11, ja ohjelmien imurointiin liittyviä ohjeita löytyy mm. sivulta

<https://wiki.oulu.fi/display/STsoftia/Home>

Sinne ja kurssin optimasivuille on myös kurssiin liittyviä maxima-, matlab- ja spice-esimerkkejä.

Kaikkalainen oma-aloitteisuus on eduksi ja auttaa asian ymmärtämistä. Älkää kuitenkaan jääkö koukkuun em. ohjelmiin, vaan muistakaa opiskella itse asiaakin ... Ennen kaikkea on syytä uskoa, että pelkkä simulaattorin käyttö ei riitä, piirien toiminnan ymmärtämiseksi niiden toiminta on kyettävä laskemaan.

Seuraavan sivun käsitekartta havainnollistaa vielä piiriteoriaan liittyviä käsitteitä ja tärkeimpiä analyysitehtäviä ja niissä käytettäviä keinoja. Osaa näistä käsitellään vasta myöhemmissä kursseissa (esim. parametriesitykset käsitellään Piiriteoria 2 -kurssissa).

2. PERUSSUUREET JA PIIRILAIT

2.1 Suureita

Etuliitteet (osattava !)

a	atto 10^{-18}	1e-18	
f	femto 10^{-15}	1e-15	
p	piko 10^{-12}	1e-12	
n	nano 10^{-9}	1e-9	
μ , u	mikro 10^{-6}	1e-6	
m	milli 10^{-3}	1e-3	
k	kilo 10^3	1e3	
M	mega 10^6	1e6	(Spicessa etuliite MEG)
G	giga 10^9	1e9	
T	tera 10^{12}	1e12	

Esim. $1,5 \text{ kohm} \times 6 \text{ nF} = 1,5e3 \cdot 6e-9 \text{ s} = 9e-6 \text{ s} = 9 \text{ us}$

Aika (t)

Yksikkö sekunti. Analogiaelektroniiikan aikavakiot liikkuvat välillä $10^{-15} \dots 1 \text{ s}$.

Taajuus (f)

Värihdysten määrä / sekunti. Käänteisluku jaksonpituus $T = 1/f$. Yksikkö Hz. Analogiaelektroniiikan taajuusalueet luokitellaan karkeasti seuraavasti:

- 10 Hz - 20 kHz audio
- 100kHz - 1 MHz AM-alue
- RF-alue (20 MHz-80 MHz SW, 80-100 MHz ULA, 100-300 MHz VHF (m), 300 MHz-3 GHz UHF (dm), 3-30 GHz SHF (cm), 30-300 GHz EHF (mm))

Varaus (Q)

Yksikkö coulombi (C) eli ampeerisekunti (As). Elektronien määrä. Kondensaattorien varaus on suoraan verrannollinen jännitteeseen ($Q=CU$, esim. $1\mu\text{F} \cdot 5\text{V} = 5 \text{ uAs}$), kun taas akut ja patterit voivat antaa virtaa jännitteen juurikaan laskematta. Auton akun kapasiteetti on 40-80 Ah, matkapuhelimien akussa on 0.5-1 Ah. Varauksia ei synny tai häviä, joten

varauksen kokonaismäärä systeemissä säilyy.

Virta (I)

Yksikkö ampeeri (A), symboli $i(t)$. Varausten virtausnopeus $C/s = As/s = A = 6,25 \cdot 10^{18}$ elektronia/s. Elektroniikassa yleisimmät virtatasot $1\mu A - 10\text{ mA}$, mutta esim. auton akun antama virta startissa on n. 100 A . Virta kulkee aina positiivisesta jännitteestä negatiiviseen jännitteeseen päin. Varauksen kuljettajina voi olla kuitenkin sekä positiivisesti että negatiivisesti varautuneet partikkelit. Johtimissa varausta kuljettaa yleensä negatiivisesti varautuneen elektronit, jotka pyrkivät aina kohti positiivisempaa jännitettä.

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (2.1-1)$$

Energia (E, W)

Yksikkö joule ($J = Nm = Ws$), symboli $w(t)$. Tehon aikaintegraali. Reaktiiviset komponentit (kela ja kondensaattori) kykenevät varastoimaan energiaa magneettitai sähkökenttään, ja energian vuorottelu näiden energiamuotojen välillä mahdollistaa resonanssin eli värähtelyn. Resistiiviset komponentit muuttavat sähköistä energiaa lämmöksi, josta sitä on yleisesti ottaen hyvin vaikea muuntaa takaisin sähköiseksi energiaksi.

Litran vettä lämmittämiseksi kiehuvaksi tarvitaan (ilman häviöitä) energiaa $4.2\text{kJ}/(\text{kg}^\circ\text{C}) \cdot 1\text{kg} \cdot 80^\circ\text{C} = 336\text{ kJ}$. Auton akussa olevalla $40\text{ Ah} \cdot 12\text{ V} = 480\text{ VAh} = 0.48\text{ kWh} = 1730\text{ kJ}$ energiamäärällä siis kiehauttaisi n. 5 litraa huoneenlämpöistä vettä ($W = 5\text{ kg} \cdot 4.2\text{ kJ}/\text{kg}^\circ\text{C} \cdot 80\text{C}$) - sitten akku on tyhjä.

Energian määrä systeemissä säilyy, mutta sen olomuoto voi muuttua.

Jännite (U, V)

Yksikkö voltti ($V = J/C = W/A$), symboli $v(t)$ tai $u(t)$. Kuvaa varauksen potentiaalienergiaa. Analogiaelektroniikan signaalitasot liikkuvat yleisimmin mikrovolttien ja kymmenien volttien välisellä alueella, ja yleisiä elektroniikan käyttöjännitteitä ovat mm. $\pm 5\text{ V}$, 3V , 1V . Verkkosähkön jännite muuttuu sinimuotoisesti välillä $+320\text{ V} \dots -320\text{ V}$ 50 Hz taajuudella.

$$u(t) = \frac{dw}{dq} \quad (2.1-2)$$

Ilmassa turvallinen eristeväli on n. $1\text{ cm} / \text{kV}$, läpilyönti tapahtuu kun eristeväli on n. $1/10$ tästä. 400 kV voimalinjassa on siis n. 4 m pitkät eristimet.

Teho (P)

Kyky tehdä työtä, yksikkö watti ($W = J/s = VA$). Signaalin teho $P = UI = U^2/R = I^2R$. Resistiivisessä komponentissa teho muuttuu lämmöksi, ja jo 1-2 W teho vaatii komponentin jäädyttämistä. Esim. metallikalvovastusten tyypillinen tehonkesto on vain 1/4 W. Auton lohkolämmittimen teho on n. 500 W, sähköhellan pienen keittolevyn teho 1,5 kW, hissien moottorien teho useita kW, ja koko Suomen sähköntarve on talvipakkasilla n. 14 GW. Kun 1 kW tehoista keittolevyä käytetään 1 tunnin ajan, muodostuu 1 kWh = 1kW · 3600s = 3.6 MJ lämpöenergiaa.

$$p(t) = \frac{dw}{dt} \quad w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau)d\tau \quad (2.1-3)$$

Resistanssi (R)

Yksikkö ohmi ($\Omega = V/A$). Kuvaa “virtausvastusta”, ts. jos resistanssi on pieni, tietty jännite saa piirissä aikaan suuren virran. Komponenttiarvot vaihtelevat yleisimmin 1 ohmin ja 1 Mohmin välillä. Kuivan ja puhtaan piirilevyn vuotovastus (kahden rinnakkaisen johtimen välillä) on $10^{10} - 10^{12}$ ohmia, kosteaa pintaa pitkin huomattavasti vähemmän: levyille puhaltaminen saa aikaan nA-luokan vuotovirtoja.

Kapasitanssi (C)

Yksikkö faradi ($F = As/V$). Kuvaa kykyä varastoida energiaa komponentin sisäiseen sähkökenttään. Komponenttien arvot ovat tyyp. välillä pF- 100 uF. Esim. ihmisen sähköinen malli on 50 - 250 pF kondensaattori (sormi 10pF, kynsi 2pF), joka voi latautua staattisen sähkönsä ansiosta (esim. tukkaa kammatessa) jopa 20 kV jännitteeseen - sormenpääkipinäessä on siis energiaa 10-50 mJ. Kapasitanssia voi kasvattaa lisäämällä kondensaattorin kokoa tai eristeaineen permittiivisyyttä ϵ_r .

Induktanssi (L)

Yksikkö henry ($H = Vs/A$). Kuvaa kykyä varastoida energiaa komponentin sisäiseen magneettikenttään. Komponenttiarvot ovat välillä nH - 1 mH. Esim. hiuksen paksuisen johtimen induktanssi on n. 1 nH/mm. Induktanssia voidaan kasvattaa käyttämällä ferromagneettisia sydämiä, joiden μ_r on suuri. Keloja käytetään mm. hakkuriteholähteissä, joilla muutetaan tasajännitettä toiseksi mahdollisimman pienillä tehohäviöillä. RF-taajuuksilla induktanssilla kumotaan (resonoidaan) kapasitanssin vaikutusta.

Suuruusluokkia

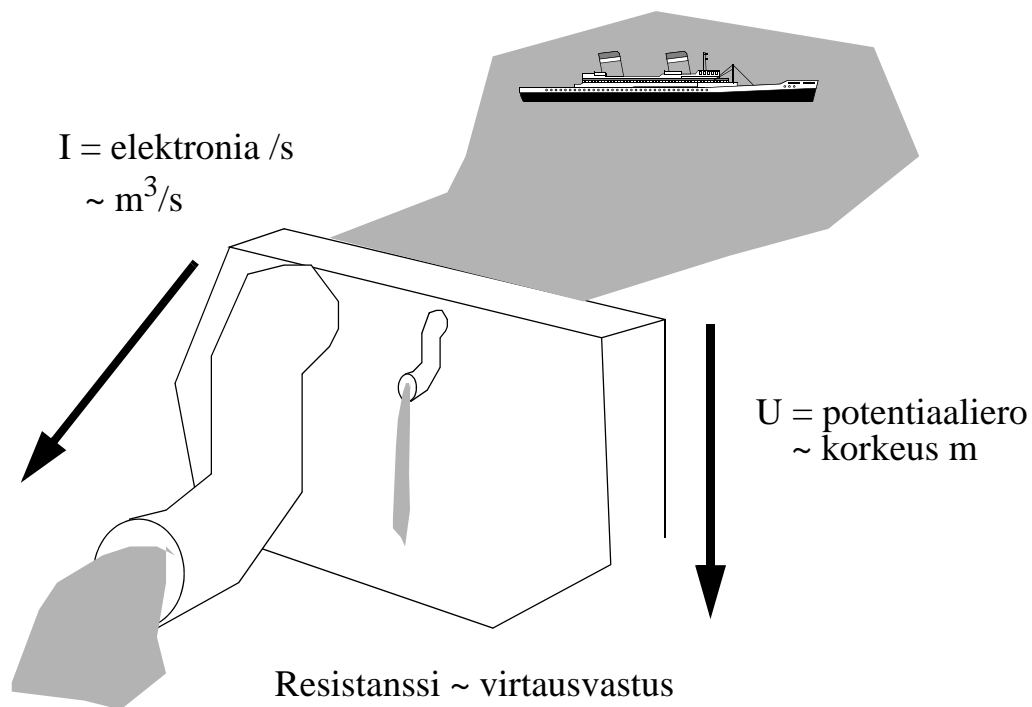
Oheisessa taulukossa on mainittu muutamia jännitteen, virran ja tehon suuruusluokkia. Kuten huomataan, sähköisten signaalien dynamiikka (max/min -suhde) on huomattavan suuri. Koska suurten vaihtelujen esittäminen piirtäen on hankalaa lineaarisella akselistolla, sähkötekniikan tulostuksissa käytetäänkin hyvin yleisesti logaritmisesti skaalattuja akseleita.

Taulukko 1: Suuruusluokkia

	Virta/A	Jännite/V	Teho/W
1p	hermosolun virta, puolij. vuotovirrat		tietol.satelliitista tuleva signaali
1n		RF-signaali antennissa	hermosolu 10 nW
1u		aivosähkökäyrä 10 uV	logiikkaportin teho
1m	tuntuu sormissa	sydänkäyrän sign.	taskulaskin
1	20 mA pysäyttää sydämen	digitaalilogiikka 1-5 V	GSM-puhelimen lähettin
1k	salama 10 kA	TV-poikkeutusj. 10kV	1 kW on n. 1 hv.
1M		100 kV jännite tarvitsee 1m eristevälin	vesivoimalaitos facebookin serveri
1G		salama 100 MV	ydinvoimala

Lähinnä vastaava mekaaninen analogia sähkösuureille on suuri tekojärvi (niin suuri, ettei pinta vajene vaikka vettä juoksuttaisiinkin). Altaassa olevalla vedellä on potentiaalienergiaa (korkeutta), jonka määrä riippuu korkeuserosta (jännite-erosta) ja veden massasta (varauksenkuljettajien varauksesta). Potentiaalienergialla kyettään saamaan aikaan massavirtausta (m^3/s , sähkötekniikassa elektronia/s), ja on ilmeistä, että putkistossa virta voi käydä vain alemmaa potentiaalia päin. Putkien poikkipinta-ala vaikuttaa virtaamisnopeuteen, joten se vastaa resistanssia: ohuesta pillistä valuu vähän virtaa, isosta putkesta reippaammin.

Jännitelähteen voi siis mieltää suurena tekojärvenä, jonka pudostuskorkeus on kiinteä. **Virtalähteen voi parhaiten mieltää vesipumppuna**, joka kykenee pumpaamaan tietyn määrän vettä (elektroneja) sekunnissa mille korkeudelle (potentiaaliin) hyvänsä.



Energiapolitiikkaa

Kansantaloudellisessa mielessä on hyvä välillä pohdiskella myös, mistä energia tulee. Katuvalojen n. 500 W lamput syövät niin paljon sähköä, että hevosvoimin tuotettuna n. joka kolmannen tolpan juurella pitäisi hikisen hevosen polkea generaattoria vuodet ympäriinsä.

Oulun Merikosken voimalaitos tuottaa vuodessa sähköä n. 150 GWh. Keskimääräinen teho on siis 17 MW, joka saadaan 11 m pudotuskorkeudella ja n. 260 m³/s virtaamalla. Vesivoimalaitosten hyötysuhde on tyypillisesti n. 85% pudotetusta potentiaalienergiasta (Oulussa $9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 260\,000 \text{ kg/s} \cdot 11 \text{ m} = 28 \text{ MW}$).

Toppilan kaasuturbiinivoimalaitoksen sähkö- ja lämpöenergian tuotto on n. 1200 GWh ja 1400 GWh vuodessa (keskim. teho 130 MW ja 160 MW), ja tämän tuottamiseksi Toppilaan kuskataan päivittäin n. 120 rekkakuormaa puuta ja turvetta. Lämpövoimalaitoksen hyötysuhde on siis n. 45%. Kaupunkialueilla yli jäänyt lämpöenergia käytetään asuinrakennusten lämmitykseen, mutta monessa paikassa (Suomen ydinvoimalat mukaanlukien) se johdetaan joko mereen tai lauhdutustornien kautta ilmaan.

2.2 Nimityksiä ja käsitteitä

Piirielin (circuit element)

Piirielimet kuvaavat jotain fysikaalista ominaisuutta:

- resistanssi R kuvaa häviötä, joissa sähköinen energia muuttuu lämmöksi,
- induktanssi L kuvaa sähköisen energian sitoutumista magneettikentäksi
- kapasitanssi C kuvaa sähköisen energian sitoutumista sähkökentäksi

Piirielimiä jaotellaan jatkossa mm. seuraavin perustein

- passiiviset / aktiiviset piirielimet
- keskitetyt / jakautuneet
- riippumattomat / ohjatut

Häviö (losses)

Sähköisen energian muuttuminen muuhun olomuotoon: sähköteho $P=UI$ muuttuu suoraan lämmöksi, äänenpaineeksi, kemialliseksi energiaksi tai ylipäätään muuhun olomuotoon. L ja C eivät ole häviöllisiä, mutta R on. Myös moottorit, kaiuttimet ja muut tehoa vastaanottavat energiamuuntimet, voidaan usein mallittaa resistanssina. Jännite- ja virtalähteissä voi tapahtua niin tehon syntyä kuin tehohäviötäkin, esim. ladattaessa akku ottaa sähköistä tehoa ja muuttaa sen kemialliseksi energiaksi, purettaessa taas vapauttaa sähköistä tehoa.

Resonanssit vaimenevat ja oskilloinnit kuolevat vain häviöillä.

Passiivinen (passive)

Ei tuota itse energiaa. R,L,C ovat passiivisia piirielimiä, joista L ja C voivat varastoida ja luovuttaa energiaa, mutteivät tuottaa sitä. R pelkästään kuluttaa energiaa.

Aktiivinen (active)

Voi myös tuottaa energiaa. Jännite- ja virtalähteillä on tämä ominaisuus, joskin virran suunnasta riippuu tuottavatko vai kuluttavatko ne tehoa (ladattaessa akku ottaa teho, purettaessa antaa).

Esim. akkuun kytketty aurinkopaneli: yleensä se luovuttaa tehoa ja akku ottaa sitä vastaan, mutta pimeässä paneli alkaa purkaa akkua.

Keskitetty / jakautunut (lumped / distributed)

Keskitettyssä komponentissa sinimuotoisen vaihtovirran ja -jännitteen vaihe ovat vakioita koko komponentin sisällä.

Jakautuneessa komponentissa signaalin vaihe muuttuu komponentin sisällä. Aallonpituuteen nähden suurikokoinen komponentti.

Riippumaton / ohjattu (independent / controlled)

Riippumattoman lähteen lähtösuure (jännite tai virta) ei riipu verkon solmujännitteistä tai virroista. Se voi olla vakio tai tietty ajan funktio (esim. sini), mutta siihen ei siis voi vaikuttaa sähköisesti.

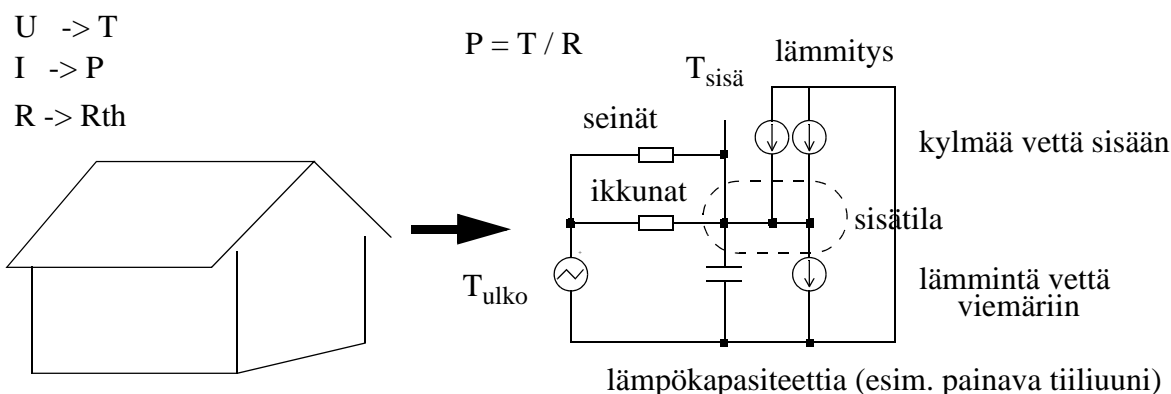
Ohjattu lähde on sähköisesti ohjattu: tietty solmujännite tai haaravirta vaikuttaa suoraan lähtösuureeseen. Ohjattuja lähteitä sisältäviä piirejä sanotaan aktiivisiksi, ja niitä käyttäen voidaan signaalin jännitettä, virtaa tai tehoa vahvistaa. Lähdettä sanotaan lähtötyypin mukaisesti jännite- tai virtalähteeksi ja ohjauksen mukaan jännite- tai virtaohjatuksi - esim. jänniteohjattu jännitelähde on VCVS, voltage-controlled voltage source (vahvistus V/V).

Komponentti (component)

Piirielimien fyysisiä toteutuksia: vastus toteuttaa resistanssin, kela induktanssin, kondensaattori kapasitanssin ja muuntaja keskinäisinduktanssin.

Malli (model)

Fyysisen komponentin kuvaamiseksi rakennettu piirielimistä koostuva verkko. Piirimallilla voi kuvata myös mitä hyvänsä muuta differentiaaliyhtälöillä mallitettavaa fysikaalista ilmiötä, ohessa lämmön siirtymistä asuinalossa - tässä mallissa jännite vastaa lämpötilaa ja virta lämpövirtausta.



Haara (branch)

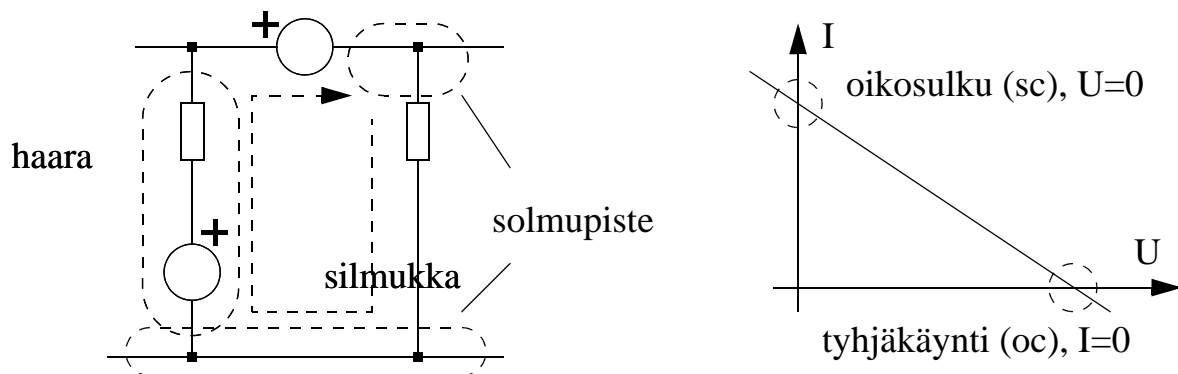
Mikä tahansa ryhmä piirielimiä, joka kytkeytyvät muuhun verkkoon kahdesta pisteestä. Haarassa olevaa piirielintä voidaan kutsua myös elementiksi.

Solmu (solmupiste, node)

Kahden tai useamman haaran liittymäkohta, jossa jännite on koko alueella sama. Solmupistettä kutsutaan myös joskus navaksi tai terminaaliksi (terminal). Piirikaa-
vioissa piste (solder dot) tarkoittaa yleensä johtojen välistä kontaktia, kaksi risteä-
vää johtoa ilman palleroa eivät ole yhteydessä toisiinsa.

Silmukka (loop, mesh)

Mikä tahansa haarojen muodostama suljettu lenkki.



Konduktanssi G [siemens, 1/ohm, mho]

Johtavuus, resistanssin R käänteisluku $G = 1/R$, $I = GU$

Impedanssi Z , admittanssi Y

Resistanssin laajennus sinimuotoisille signaaleille, sisältäen myös vaihesiirron. Ohmin laki toimii, $U = IZ$. Impedanssin käänteisluku on admittanssi, $Y = 1/Z$.

Virta-jännite -riippuvuus

Kuvaa paljonko tietyn solmun jännite riippuu kuormituksesta, so paljonko siitä otetaan virtaa. Paljon kuormitusta = otetaan paljon virtaa = pieni vastus, tyhjäkäynti = ei kuormiteta = $i_{out} = 0$.

Avoin piiri (open circuit, oc) on suuri-ohminen, se ei ota virtaa

Oikosulku (short circuit, sc) on pieni-ohminen ja ottaa paljon virtaa

Impulssivaste (impulse response)

Jos piirissä on energiavarastoja, sillä on myös muistia, joka levittää aikavastetta. Tätä mitataan impulssivasteella $h(t)$: piiriin syötetään hyvin lyhyt impulssi, ja katsotaan minkä muotoiseksi levinneenä se tulee piiristä ulos.

Aikavakio (time constant)

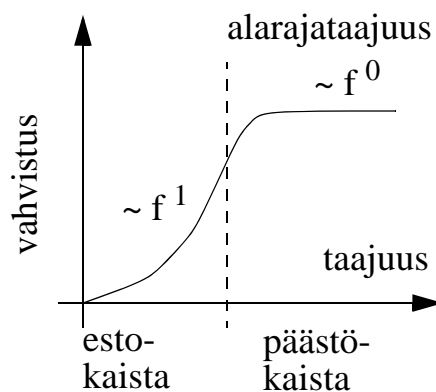
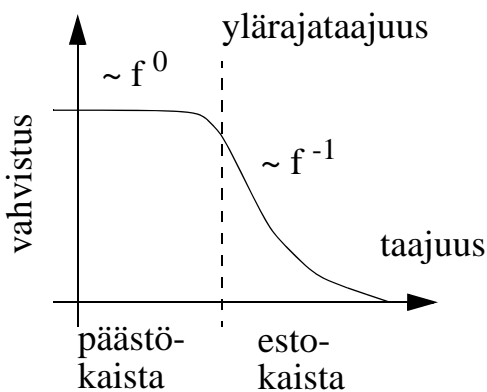
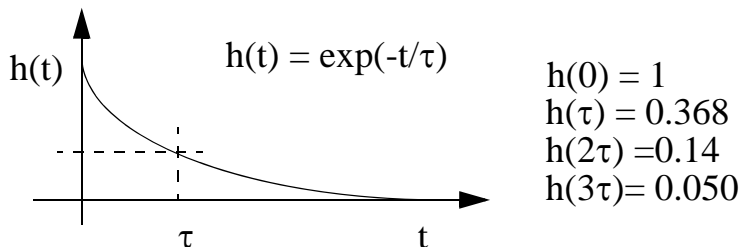
Useimmissa sähköisten piirien impulssivasteissa on mukana eksponentiaalisesti vaimeneva muoto $\exp(-t/\tau)$. Tässä τ on vaimenemisnopeutta kuvaava aikavakio.

Taajuusvaste (frequency response)

Kun muistillista piiriä syötetään jatkuvalla ja vakioamplitudisella sinimuotoisella signaalilla, jonka taajuutta muutetaan, taajuusvaste kuvaa sitä, kuinka lähtösignaalin amplitudi ja vaihe riippuu signaalin taajuudesta.

Rajataajuus (corner frequency)

Verkon taajuusvaste on asymptoottisesti muotoa f^K , jossa f on taajuus ja K on kokonaisluku ($\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$). Rajataajuudella verkon taajuusvasteen luonne muuttuu, s.o. K :n arvo vaihtuu. Rajataajuus on verrannollinen aikavakion arvoon.



2.3 Merkintöjen napaisuudet

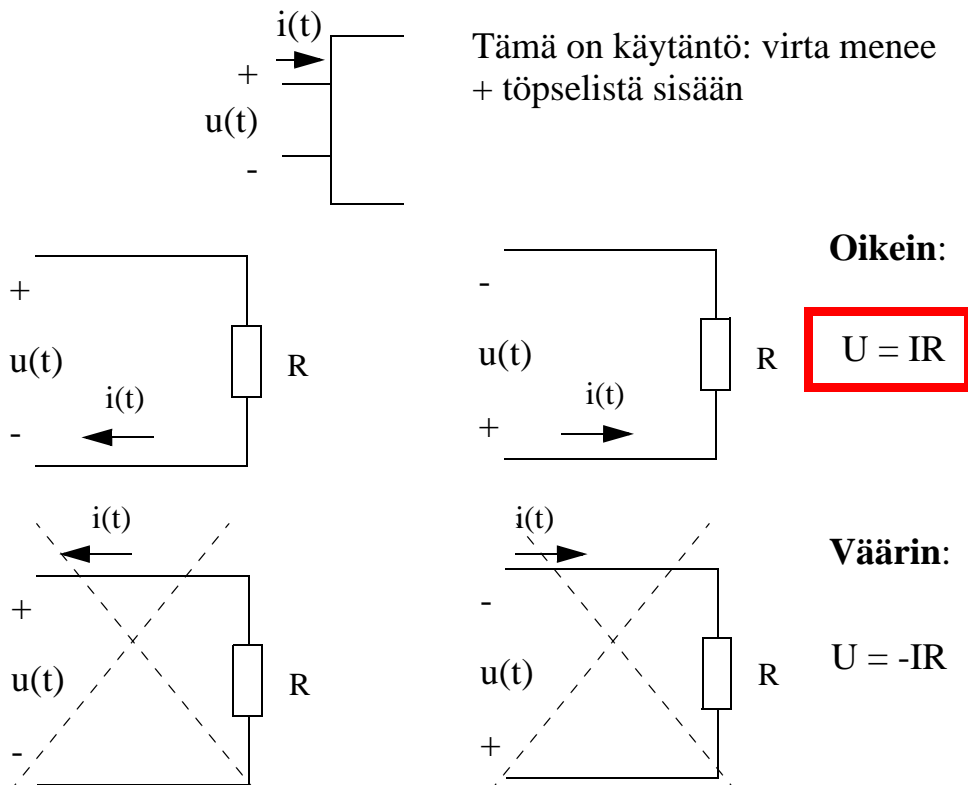
Sähköpiirien eli verkkojen laskemista varten on tunnistettava eri kohdissa verkkoa kulkevat virrat ja vaikuttavat jännitteet. Tällöin on erotettava kaksi asiaa:

- **merkityt virrat ja jännitteet ja suunnat:** näiden avulla muodostetaan yhtälöt
- **todelliset virrat ja jännitteet:** tässä negatiivinen etumerkki tarkoittaa sitä, että jännitteen tai virran todellinen suunta on vastakkainen alkuperäiseen merkintään nähden. Tämä ei ole virhe, vaan ratkaisu: yhtälön muodostamista varten on vain valittava jotkin suunnat ja merkinnät, ja ratkaisu kertoo todellisen suunnan.

Virtojen ja jännitteiden merkintä on periaatteessa vapaata, mutta piirielinten toimintaa kuvaavat perusyhtälöt on yleensä kirjoitettu aina siten, että **virta merkitään meneväksi sisään jännitemittauksen positiivisesta navasta**. Resistansseissa virta kulkee aina suuremmasta jännitteestä pienempään päin.

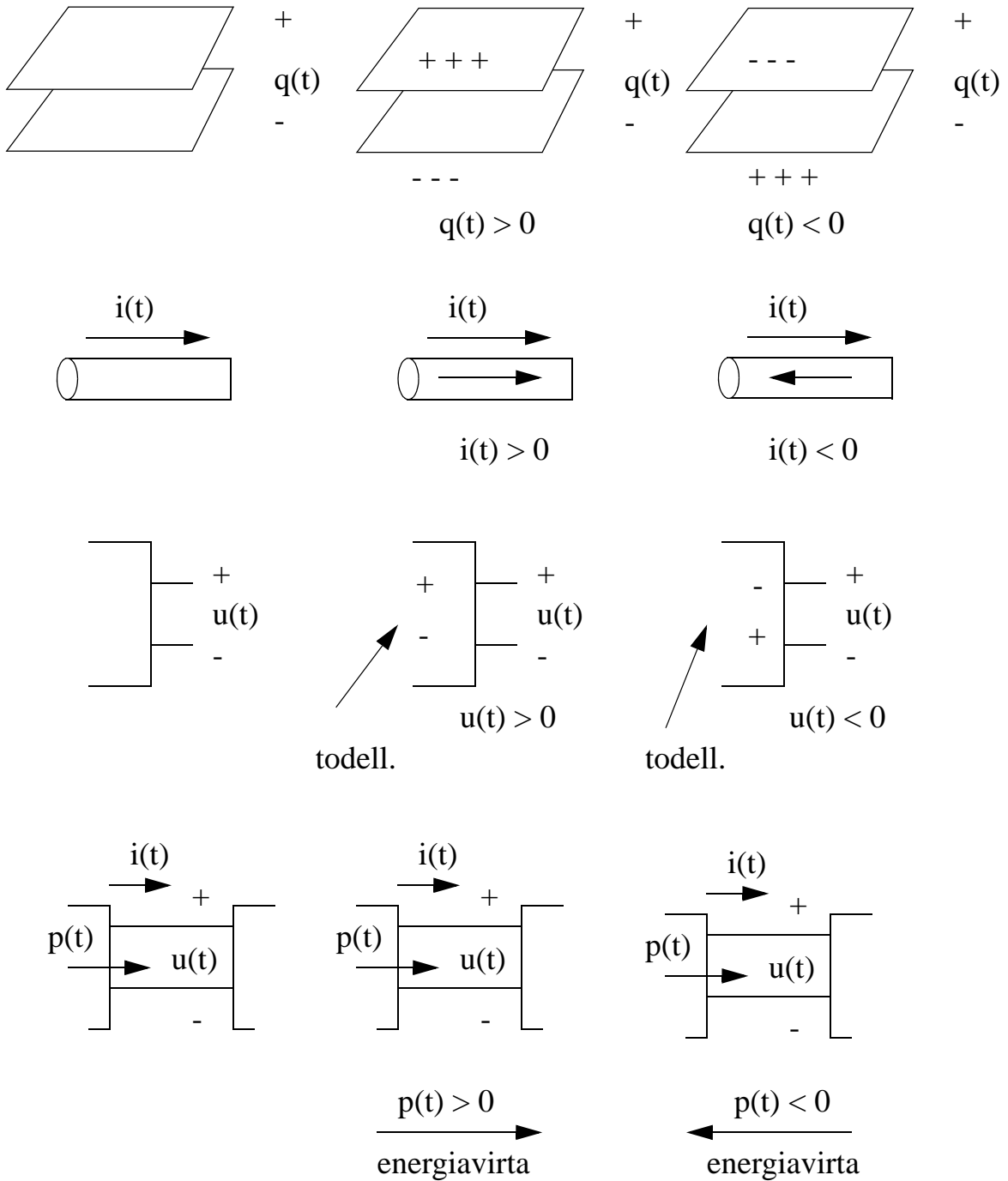
Jos näillä merkinnöillä komponentin yli olevan jännitteen ja sen läpi menevän virran tulo $u(t)i(t) = p(t)$ on positiivinen, piiri kuluttaa tehoa, ja jos $p(t) < 0$, se luovuttaa tehoa.

Esimerkki: mahdollisia merkintätapoja



Merkintä

Todellinen tilanne



Esim. Aurinkokenno ja 12 V akku, välissä kulkee 1A. Kenno antaa 12W tehoa, akku ottaa 12W. Virta menee akun plusnavasta sisään ja miinusnavasta ulos.

2.4 Piirielimet

Resistanssi (*Resistance*)

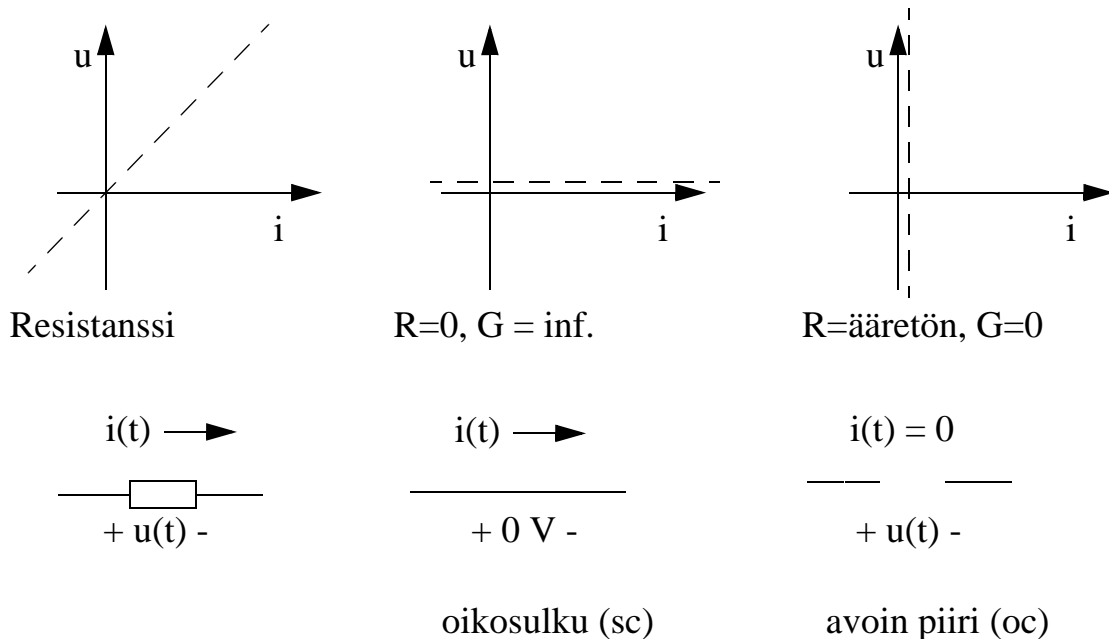
Resistanssi on häviöllinen komponentti, jossa sähköinen energia muuttuu lämpöenergiaksi. Em. merkinnöillä vastuksen käyttäytyminen noudattaa **Ohmin lakia**

$$U = I \cdot R$$

$$I = \frac{1}{R} \cdot U = G \cdot U \quad (2.4-1)$$

Tässä R on resistanssi, jonka yksikkö on ohmi (Ω , ohm, V/A) ja G on **resistanssin** käänteissuure **konduktanssi**, jonka yksikkö on siemens (S, mho, A/V). Esitysmuodot kuvaavat täsmälleen samaa asiaa, toisinaan vain on helpompaa laskea konduktansseilla ja toisinaan resistansseilla. Piiriteoria on täynnä tämänkaltaisia dualismeja, joita käytetään mm. käsilaskennan apuna ja erilaisten toteutustapojen etsimisessä.

Esim: Vastuksen $R = 5$ ohm. Sitä vastaava konduktanssi $G = 1/R = 0.2$ S



Resistanssi kuvaa jännitteen derivaattaa virran funktiona ($U = RI \rightarrow dU/dI = R$) eli I - U -käyrän kulmakerrointa. Jos resistanssi on nolla, jännite on nolla virrasta riippumatta, jolloin puhutaan **oikosulusta** (short circuit, SC). Jos taas resistanssi on ääretön, virta on jännitteestä riippumatta aina nolla, ja puhutaan **avoimesta piiristä** (open circuit, OC).

Jännitelähde (*Voltage source, VS*)

Jännitelähde on aktiivinen komponentti (kykenee tuottamaan tehoa), jonka **lähdössä on aina sama jännite riippumatta siitä kuinka paljon virtaa siitä otetaan**. Käytännön jännitelähteissä otettavan lähtövirran suuruus vaikuttaa jännitteen suuruuteen, mutta ideaalisella jännitelähteellä jännite ei riipu virrasta. Tämä on tulkittavissa siten, että ideaalisen jännitelähteen lähtöresistanssi on nolla.

Mekaaninen analogia jännitelähteelle on hyvin suuri patoallas, josta voidaan juoksentaa rajattomasti vettä (virtaa) ilman että pinnankorkeus (potentiaalienergia eli potentiaali) laskee. Pieni, helposti tyhjenevä allas vastaa kondensaattoria, jonka varauksen voi purkaa. **Patteri ja akku ovat melko ideaalisia jännitelähteitä.**

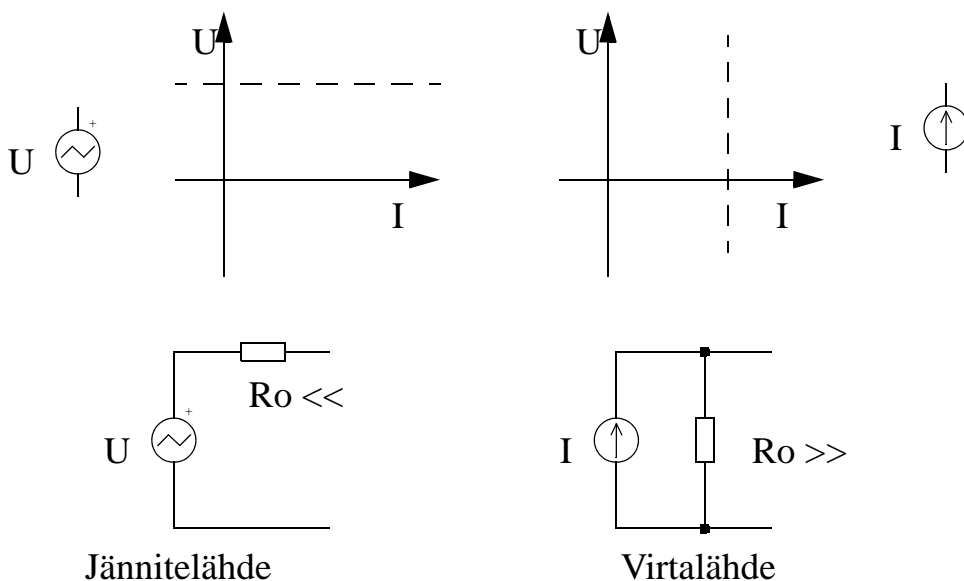
Virtalähde (*Current source, CS*)

Virtalähde on aktiivinen komponentti, jonka **lähdössä on aina sama virta lähtöjännitteestä riippumatta**. Koska virta ei riipu virtalähteen lähdössä olevasta jännitteestä, virtalähteen lähtöresistanssin voidaan tulkita olevan äärettömän suuri.

Mekaaninen analogia virtalähteelle on **vesipumppu**, joka kykenee syöttämään tietyn määrän vettä (m^3/s tai elektronia/s) mille potentiaalitasolle hyvänsä, myös lähtötasoa korkeammalle (korkeampaan potentiaaliin).

Virta-jännite -käyristä huomataan, että ideaalinen jännite- ja virtalähde **eivät ole vaihtokelpoisia**, koska niiden lähtösuureilla on eri yksiköt. Sarja- tai rinnakkaisresistanssi kuitenkin muuttaa tilanteen, kuten myöhemmin nähdään.

Yleiskielessä vakiojännitettä antavaa tehollähdettä (s.o. jännitelähdettä) kutsutaan usein (virheellisesti) virtalähteeksi.



2.5 Kirchhoffin lait

Kirchhoffin virtalaki (Kirchhoff's Current Law, KCL)

Merkittäään kaikkien solmuun liittyvien haarojen virtojen suunta pois päin solmupisteestä. Näin merkittyjen haaravirtojen summa on aina nolla.

Sama toisin sanoen

Solmupiste ei varastoi virtaa: sieltä lähtee joihinkin haaroihin saman verran virtaa kuin sinne muista haaroista tulee .

$$\sum I = 0 \quad (2.5-1)$$

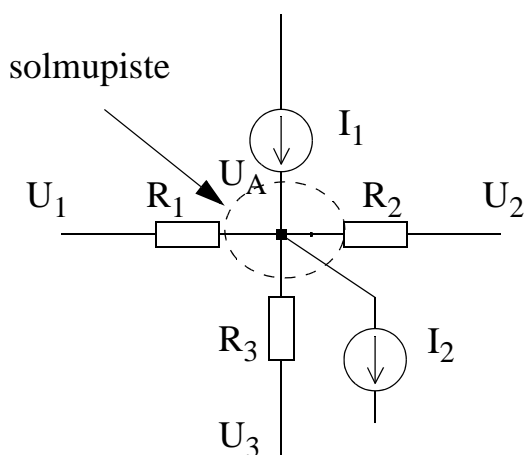
Kirchhoffin jännitelaki (Kirchhoff's Voltage Law, KVL)

Suljetun silmukan kehällä olevien haaraelementtien yli olevien, samaan kiertosuuntaan mitattujen jännitteiden summa on nolla

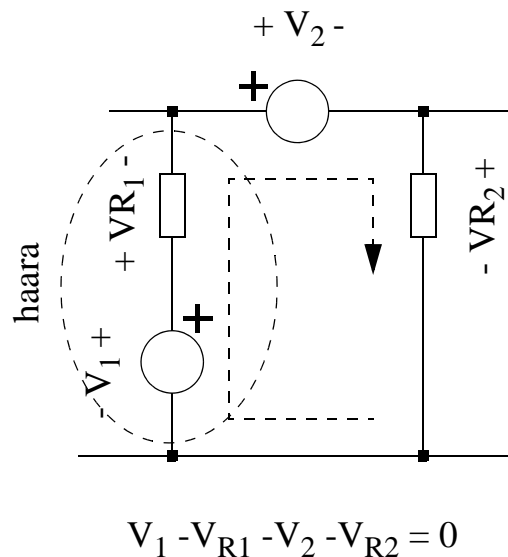
Sama toisin sanoen

Silmukan kiertämisen jälkeen palataan samaan jännitteeseen. Jännitenousujen ja -laskujen summa on nolla.

$$\sum U = 0 \quad \text{tai} \quad \sum U_{\text{lahteet}} = \sum IR_{\text{haviot}} \quad (2.5-2)$$

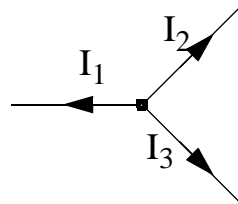


$$\begin{aligned} (U_A - U_1)/R_1 - I_1 + (U_A - U_2)/R_2 \\ + I_2 + (U_A - U_3)/R_3 = 0 \end{aligned}$$



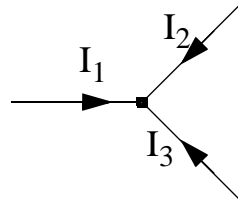
Esimerkkejä Kirchhoffin lakien käytöstä

KCL

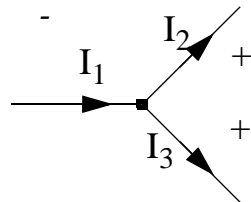


$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Yleisin muoto

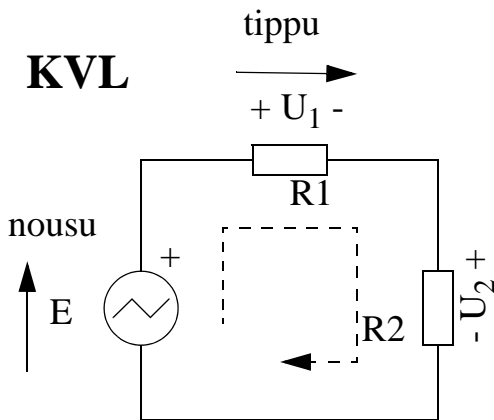


$$-I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

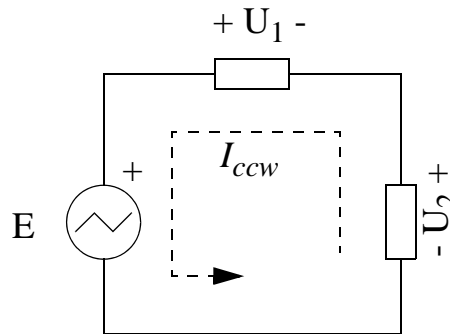


$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

KVL



$$E - U_1 - U_2 = 0$$



$$-E + U_1 + U_2 = 0$$

jos oletetaan virran suunta silmukan kiertosuunnaksi ja käytetään ohmin lakia, nämä menevät muotoon:

$$E - I_{cw} \cdot R_1 - I_{cw} \cdot R_2 = 0$$

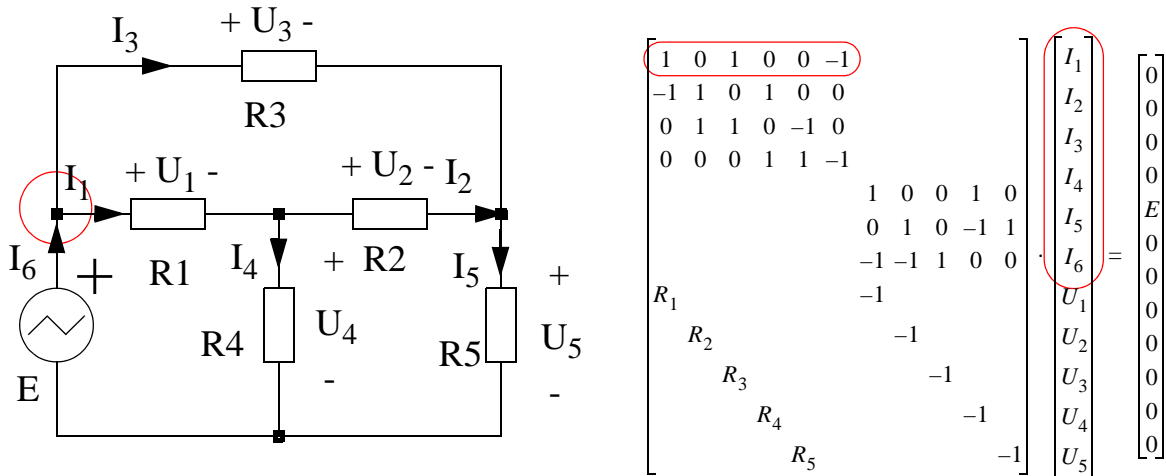
$$-E - I_{ccw} \cdot R_1 - I_{ccw} \cdot R_2 = 0$$

Huomaa myös, että yhtälön kummatkin puolet voi kertoa vakiolla:

$$U_1 + U_2 = E \Leftrightarrow K \cdot U_1 + K \cdot U_2 = K \cdot E \tag{2.5-3}$$

Esimerkki

Kirjoitetaan oheiselle piirille **kaikki** Kirchhoffin virta- ja jänniteyhtälöt neljälle solmulle ja kolmelle silmukalle.

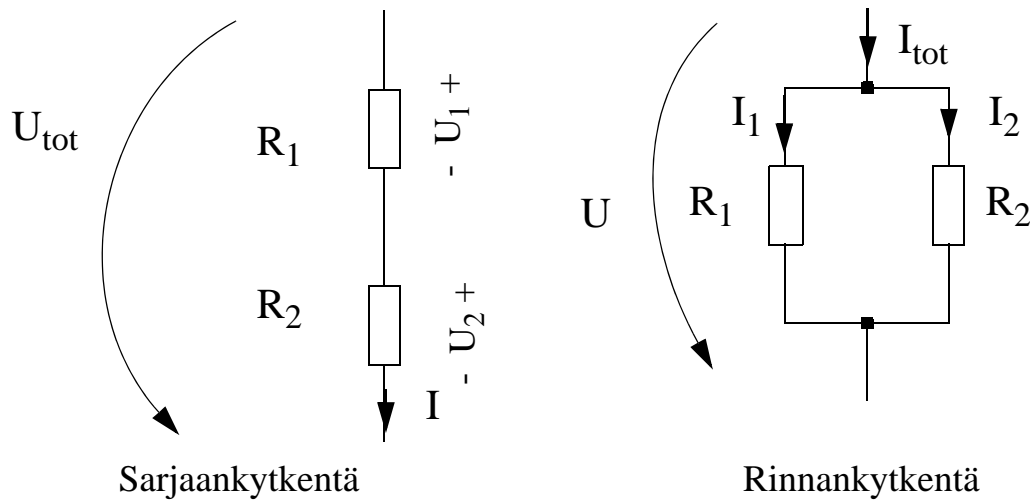


$$\begin{aligned}
 I_6 &= I_1 + I_3 & U_1 + U_4 &= E & U_3 &= I_3 R_3 \\
 I_1 &= I_2 + I_4 & U_2 + U_5 - U_4 &= 0 & U_1 &= I_1 R_1 \\
 I_5 &= I_2 + I_3 & U_3 - U_1 - U_2 &= 0 & U_2 &= I_2 R_2 \\
 I_6 &= I_4 + I_5 & & & U_4 &= I_4 R_4 \\
 & & & & U_5 &= I_5 R_5
 \end{aligned} \tag{2.5-4}$$

Yllä on neljä virtayhtälöä (yksi kullekin solmulle), jänniteyhtälöt kolmelle silmukalle ja Ohmin lain mukaiset yhtälöt resistanssien yli oleville jännitteille. Nämä on koottu kuvan viereen yhdeksi matriisiyhtälöksi, jossa sekä haaravirrat I_i että resistanssien yli olevat jännitteet U_i on merkitty tuntemattomien vektoriin. Tämä on yleispätevin tapa kuvata piirin toiminta, mutta siihen tarvitaan kohtuuttoman monta yhtälöä. Lisäksi osa yhtälöistä voidaan muodostaa toisten avulla, joten ne eivät ole riippumattomia vaan joku on eliminointava lopullisesta yhtälöryhmästä. Esim. virtayhtälöistä mikä hyvänsä voidaan lausua kolmen muun virtayhtälön avulla, joten yhden niistä voi - ja pitääkin - jättää pois.

Kuten kuvan merkinnöistä havaitaan, resistanssien jännitteet ja virrat riippuvat toisistaan Ohmin lain mukaan, ja joko haaravirta tai -jännite voidaan aina lausua toisen suureen avulla. Kappaleessa 3 katsotaan tarkemmin kahta menetelmää, joilla verkkoyhtälöt voidaan kirjoittaa systemaattisesti joko pelkästään solmujännitteiden tai silmukavirtojen avulla, jolloin selvittää yhteensä 2-3 yhtälöllä.

2.6 Vastusten sarjaan- ja rinnankytkennät



Sarjaankytkentä (*Series connection*)

Vastusten sarjaankytkennässä kummankin vastuksen läpi kulkee KCL:n mukaan **sama virta** I (R_1 :n ja R_2 :n väliseen solmuun ei kerry varausta), jolloin

$$U_{tot} = U_1 + U_2 = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = I \cdot (R_1 + R_2) \quad (2.6-1)$$

Tästä kokonaisresistanssi on laskettavissa

$$R_{tot} = \frac{U_{tot}}{I} = R_1 + R_2 \quad (2.6-2)$$

Useamman vastuksen tapauksessa tämä yleistyy muotoon

$$R_{tot} = \sum R_i \quad (2.6-3)$$

Esim.

Sarjaankytkettynä $R_1 = 1000 \text{ ohm}$, $R_2 = 250 \text{ ohm}$ ->
 $R_{tot} = 1000 \text{ ohm} + 250 \text{ ohm} = 1250 \text{ ohm}$

Rinnankytkentä (*Parallel connection*)

Vastusten rinnankytkennässä (ks. edellisen sivun kuva) **jännite kummankin vastuksen yli on sama** ja kokonaisvirta voidaan laskea kummankin vastuksen läpi kulkevan virran summana:

$$I_{tot} = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.6-4)$$

josta kokonaisresistanssi R_{tot} on

$$R_{tot} = \frac{U}{I_{tot}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.6-5)$$

Käyttämällä resistanssien sijaan konduktansseja $G_i = 1/R_i$ kokonaisvirta menee muotoon

$$I_{tot} = I_1 + I_2 = U \cdot G_1 + U \cdot G_2 = U \cdot (G_1 + G_2) \quad (2.6-6)$$

josta kokonaisresistanssiksi tulee

$$R_{tot} = \frac{U}{I_{tot}} = \frac{1}{G_1 + G_2} \quad (2.6-7)$$

Useamman rinnakkain kytketyn vastuksen tapauksessa tämä voidaan yleistää muotoon

$$G_{tot} = \sum G_i \quad (2.6-8)$$

eli

$$R_{tot} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}} = \frac{1}{\sum G_i} \quad (2.6-9)$$

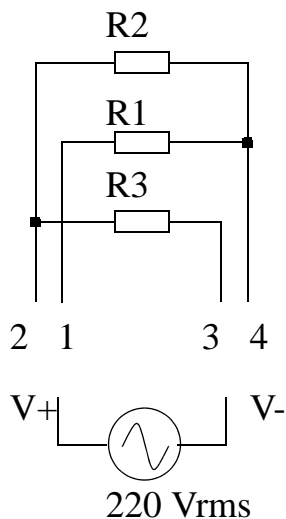
Esim.

Rinnankytkettynä $R_1 = 1000 \text{ ohm}$, $R_2 = 100 \text{ ohm}$,

$R_{tot} = 1/(1/1000 + 1/100) = 1000 \cdot 100 / (1000 + 100) = 90.91 \text{ ohm}$

Esim. Keittolevy

6-asentoisessa 1,5 kW keittolevyssä on sisällä kolme lämmitysvastusta, joita kytketään eri tavoin sarjaan tai rinnan lämmitystehon säätämiseksi: pienimmällä teholla kaikki vastukset ovat sarjassa ja suurimmalla rinnakkain.



$$R1 = 125 \Omega$$

$$R2 = 140 \Omega$$

$$R3 = 60 \Omega$$

$$P = \frac{U^2}{R_{\text{tot}}} = \frac{220^2}{R_{\text{tot}}}$$

Taulukko 2: Keittolevyn vastusarvot eri asennoissa

Asento	V+, V-	R _{tot} / Ω	P / W
1	1, 3	R ₁ +R ₂ +R ₃ = 325	150
2	3, 4	R ₂ +R ₃ = 200	250
3	2, 4	R ₂ = 140	350
4	2, 3	R ₃ = 60	800
5	2, 3+4	R ₂ //R ₃ = 42	1150
6	1+2, 3+4	R ₁ //R ₂ //R ₃ = 31	1550

Rinnankytkennät on laskettu seuraavasti:

$$R_{\text{tot}5} = 1 / (1/R_2 + 1/R_3) = 1 / (1/140 + 1/60) = 42 \text{ ohm}$$

$$R_{\text{tot}6} = 1 / (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) = 1 / (1/125 + 1/140 + 1/60) = 31 \text{ ohm}$$

2.7 Jännite- ja virtajako (vaimentaminen)

Resistiivinen jännitejako (*Voltage divider*)

Monesti on tarpeen tietää kahden vastuksen välisen pisteen jännite. **Jos välipistettä ei kuormiteta** (siitä sivulle lähtevä virta I_o on nolla), virta kummassakin vastuksessa on sama, jolloin

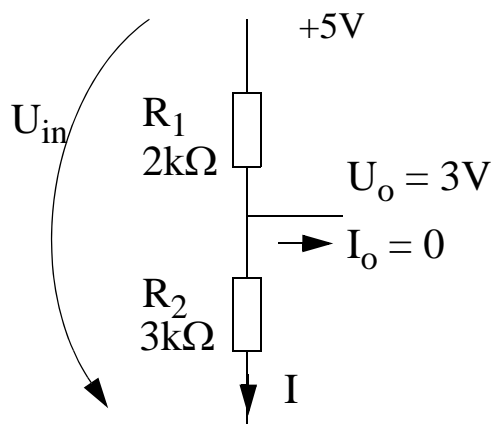
$$I = \frac{U_{in}}{R_1 + R_2} \quad (2.7-1)$$

josta

$$U_o = I \cdot R_2 = U_{in} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.7-2)$$

Tätä sanotaan **jännitejaoksi tai vastusjaoksi**. Jännitejakoa käytetään **hyvin yleisesti** vaimentamaan tulojännitettä U_{in} (ks. yleismittariesimerkki tuonnempana) tai muodostamaan tietty välijännite kiinteästä tulojännitteestä U_{in} .

Esim.



$$R_1 = 2\text{ k}\Omega, R_2 = 3\text{ k}\Omega, U_{in} = 5\text{ V}$$

Kun $I_o=0$, jännitejaon kaavalla

$$U_{out} = 5\text{V} \cdot 3\text{ k}\Omega / (2\text{ k}\Omega + 3\text{ k}\Omega) = 3\text{V}$$

Virtaa U_{in} :stä otetaan virtaa kaikkiaan $5\text{V}/(2+3)\text{kohm} = 1\text{ mA}$

Huomaa, että välipisteeseen syntyvä jännite **ei kestä kuormittamista**: jos välipisteestä otetaan virtaa (I_o ei ole nolla), jännite muuttuu. Tähän seikkaan palataan tuonnempana. Jännitejaolla on siis suurehko lähtöresistanssi.

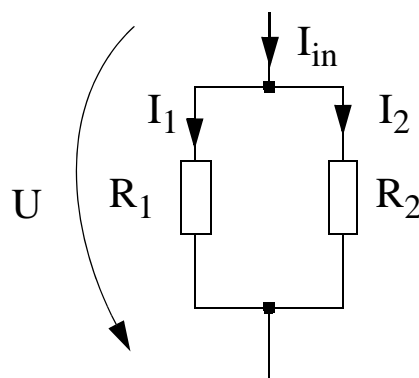
Virtajako (*Current divider*)

Kun virtaa syötetään kahteen rinnan olevaan vastukseen, virta jakautuu kulkien pääosin helpompaa (pienemmän resistanssin) reittiä. Virta jommassa kummassa vastuksessa voidaan laskea, kun huomataan, että **kummankin yli on sama jännite U**:

$$U = I_{in} \cdot (R_1 // R_2) = I_{in} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.7-3)$$

Tästä vastuksen R_1 virta I_1 saadaan yhtälöllä

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_{in} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_{in} \quad (2.7-4)$$



Virtajako voidaan käyttää suurten virtojen mittauksessa: kokonaisvirrasta otetaan pieni murto-osa mittarille, jolloin kokonaisvirta saadaan laskettua.

Huomataan, että virtajako ei ole tarkka, jos vastusten yli ei ole tasan sama jännite - näin voi käydä mm., jos vastuksia vaihdellaan kytkimillä, joilla on merkittävää sarjaresistanssia.

Huomaa myös, että I_1 :n lausekkeen osoittajassa on R_2 , siis se vastus, jonka kautta I_1 ei kulje. Konduktansseilla laskien päästään seur. muotoon

$$I_1 = G_1 \cdot U = G_1 \cdot \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} \cdot I_{in} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot I_{in} \quad (2.7-5)$$

Esim. Yleismittarin rakenne

Olkoon meillä yleismittari, joka kykenee mittaamaan jännitteitä välillä 0 - 1V ja virtamittari välillä 0 - 1 mA. Mittausalueen laajentamiseksi suuria tulojännitteitä vaimennetaan jännitejaolla ja suuria virtoja virtajaolla.

Jos jännitemittarin tuloresistanssi on suuri, virta I_o on hyvin pieni ja U_o on vastusjaolla laskettuna

$$U_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_{in} \quad (2.7-6)$$

jolloin mitatusta U_o -arvosta tulojännite U_{in} voidaan laskea

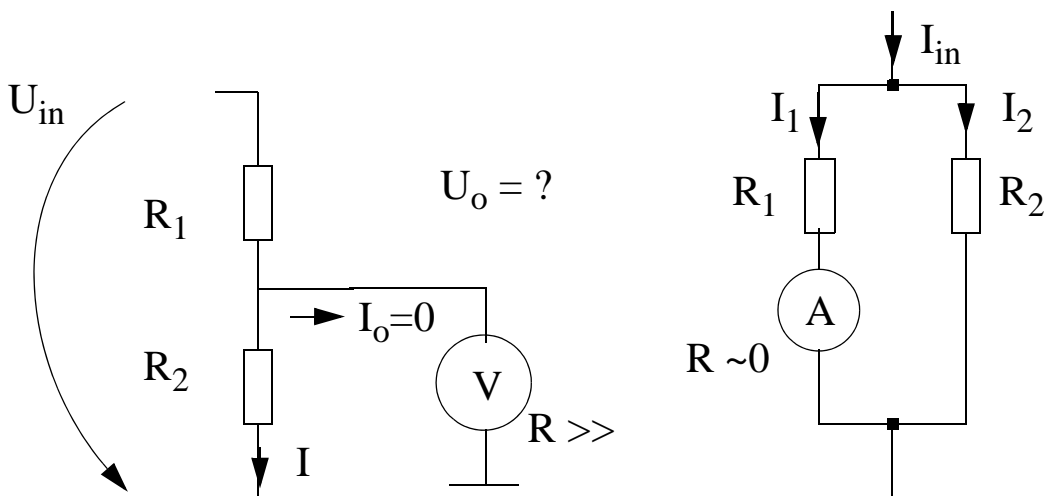
$$U_{in} = U_o \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2} = U_o \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \quad (2.7-7)$$

Vastaavasti I_1 saadaan mitattua virtajaon mukaisesti (R_2 on pieni)

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_{in} \quad (2.7-8)$$

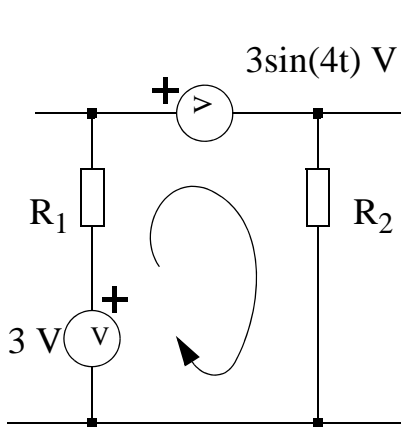
josta tulovirta I_{in} on laskettavissa

$$I_{in} = I_1 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2} = I_1 \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \quad (2.7-9)$$

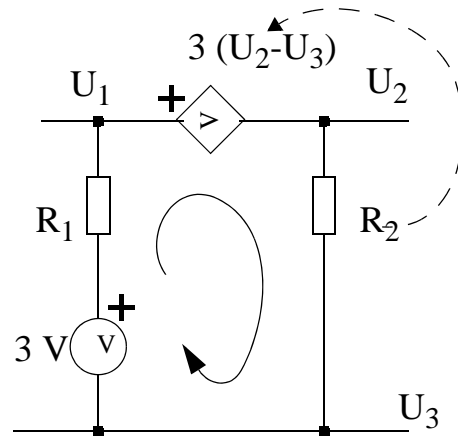


2.8 Riippumattomat ja ohjatut lähteet

Signaalilähteen arvo voi olla vakio tai ajan funktio. Signaalilähteet voivat olla myös riippumattomia tai ohjattuja, millä tarkoitetaan sitä, että riippumattoman lähteen lähtösuure ei riipu piirin muiden solmujännitteiden tai haaravirtojen arvoista, kun taas **ohjattuja lähteitä ohjataan jonkin solmujännitteen tai haaravirran arvolla**. Ohjattuja lähteitä voidaan käyttää vahvistimina.



Riippumattomia lähteitä



Ohjattu lähde: jännite U_2-U_3 ohjaa ylimmän lähteen jännitettä

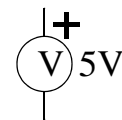
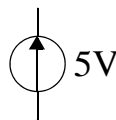
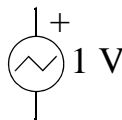
$$3V + R_1 \cdot I_{R1} - 3\sin(4t) + R_2 \cdot I_{R2} = 0 \quad 3V + R_1 \cdot I_{R1} - 3(U_2-U_3) + R_2 \cdot I_{R2} = 0$$

Riippumattomat lähteet (*Independent sources*)

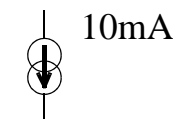
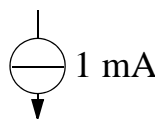
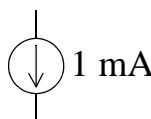
Erilaisia symboleita

Moniste	TKK	Piirikaavioeditori
---------	-----	--------------------


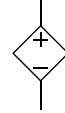
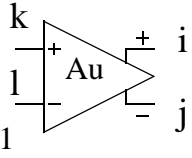
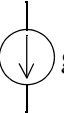
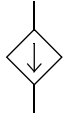
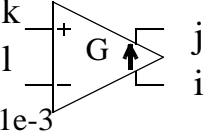
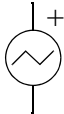
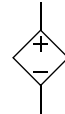
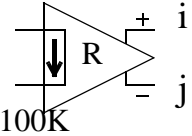
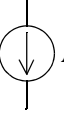
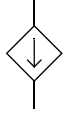
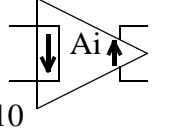
Riippumaton jännitelähde
(Independent voltage source)



Riippumaton virtalähde
(Independent current source)



Ohjatut lähteet (*Controlled sources*)

Spicessä ↓	Erilaisia symboleja	
<p>Jänniteohjattu jännitelähde (E) (Voltage controlled voltage source, VCVS) [V/V]</p> <p>Yhtälöt: $v_i - v_j = A_u (v_k - v_l)$, $I_i = -I_j$</p>	 	
<p>Jänniteohjattu virtalähde (G) (Voltage controlled current source, VCCS) [A/V]</p> <p>Yhtälöt: $I_i = g_m (v_k - v_l)$, $I_j = -I_i$</p>	 	
<p>Virtaohjattu jännitelähde (H) (Current controlled voltage source, CCVS) [V/A]</p> <p>Yhtälöt: $v_i - v_j = R_T i_{in}$, $I_i = -I_j$</p>	 	
<p>Virtaohjattu virtalähde (F) (Current controlled current source, CCCS) [A/A]</p> <p>Yhtälöt: $I_i = A_i i_{in}$, $I_j = -I_i$</p>	 	

Ohjatut lähteet ovat ideaalisia vahvistimia: jänniteohjattu jännitevahvistin on ideaalinen **jännitevahvistin**, jonka lähtöresistanssi on nolla ja tuloresistanssi äärettömän. VCCS-komponenttia kutsutaan **transkonduktanssivahvistimeksi**, CCVS:ää **transimpedanssivahvistimeksi** ja CCCS:ää **virtavahvistimeksi**.

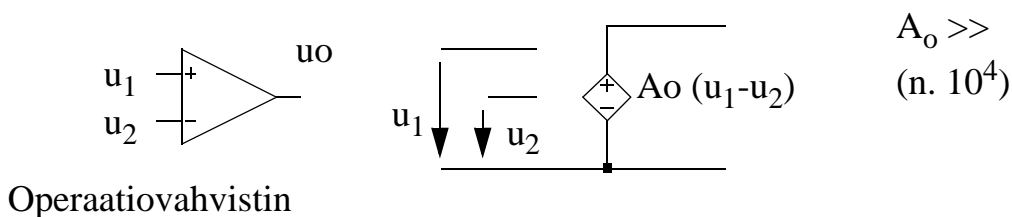
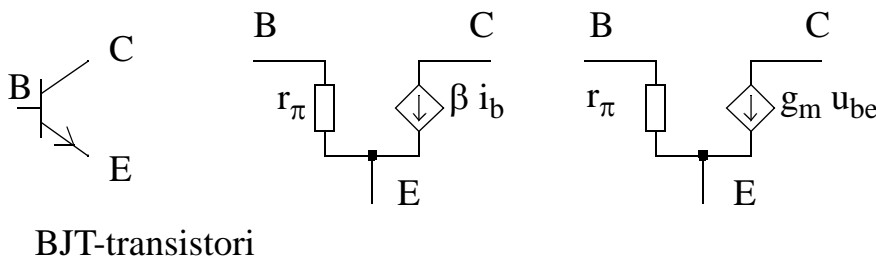
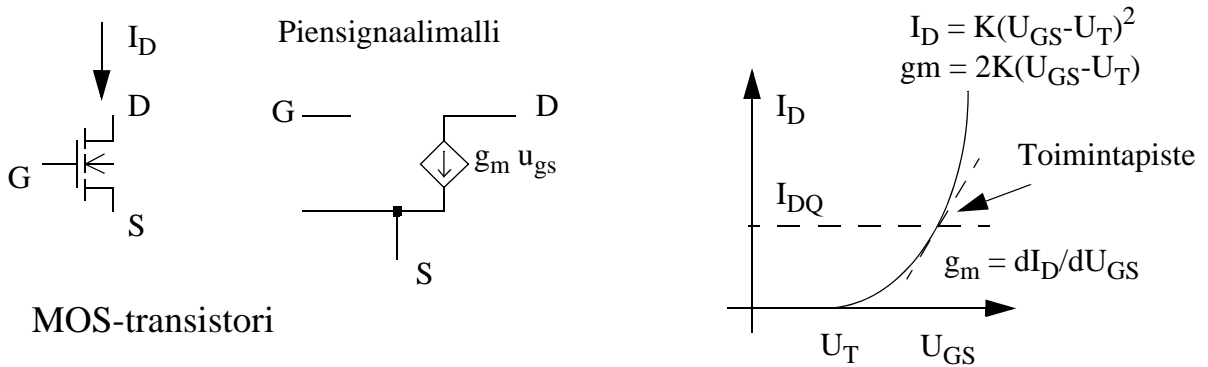
Käytännön vahvistimet eivät ole näin ideaalisia, mutta esim. operaatiovahvistinta voi melko hyvin mallittaa jänniteohjatulla jännitevahvistimella, ja **useimmat transistorit käyttäytyvät likimain kuten jänniteohjattu virtalähde VCCS**.

Useimmissa amerikkalaisissa oppikirjoissa ohjatut lähteet piirretään kärjellään seisovina nelikulmioina.

2.9 Käytännön vahvistinrakenteita

Ohjatut lähteet ovat ideaalisia vahvistimia, ja niillä kyetään tuottamaan tulosignaalia kopio, jonka amplitudi tai teho on suurempi kuin alkuperäisen signaalin. Käytännön vahvistimet koostuvat yleensä puolijohdeista, joiden toiminta on sangen mutkikasta ja epälineaarista. Epälineaaristen piirien analyysi on työlästä, joten useimmiten analyysiä helpotetaan kuvittelemalla, että signaalit ovat niin pieniä, että epälineaarista toimintaa voidaan mallittaa sen **derivaatalla** tietyssä **toimintapisteessä** (quiescent point, bias point), jolloin puhutaan ns. **piensignaalmallista**. Tällä tavoin verkko **linearisoidaan** tietyssä toimintapisteessä, jolloin se voidaan kuvata lineaarisella yhtälöryhmällä ja ratkaista matriisialgebran keinoin.

Esimerkkejä puolijohdeiden piensignaalmalleista



2.10 Lähteenmuunnokset

Käytännön jännite- ja virtalähteiden lähtösuure riippuu jonkin verran kuormituksesta: jännitelähteen lähtö riippuu siitä kuinka paljon siitä otetaan virtaa, ja virtalähteen virta riippuu siitä mihin jännitteeseen virtaa pusketaan. Jännitelähteen lähtöresistanssi R_T on pieni, mutta kuitenkin nolasta poikkeava. Vastaavasti virtalähteen lähtöresistanssi on suuri, muttei kuitenkaan ääretön.

Epäideaalisuuksia voidaan mallittaa kuvan mukaisesti lähteiden lähtöresistanssilla R_T tai R_N , ja on tärkeää huomata, että **signaalilähdettä, jonka lähtöresistanssi on äärellinen ($0 < R_T < \infty$), voidaan mallittaa sekä virta- että jännitelähteellä**. Tämän todistamiseksi lasketaan kummankin tyyppisen lähteen lähtöjännite u_o , kun lähdöstä otetaan virta i_o :

$$U_o = U_T - R_T \cdot i_o \text{ jännitelähteelle}$$

$$U_o = R_N \cdot (I_N - i_o) \quad (2.10-1)$$

$$= R_N \cdot I_N - R_N \cdot i_o \text{ virtalähteelle}$$

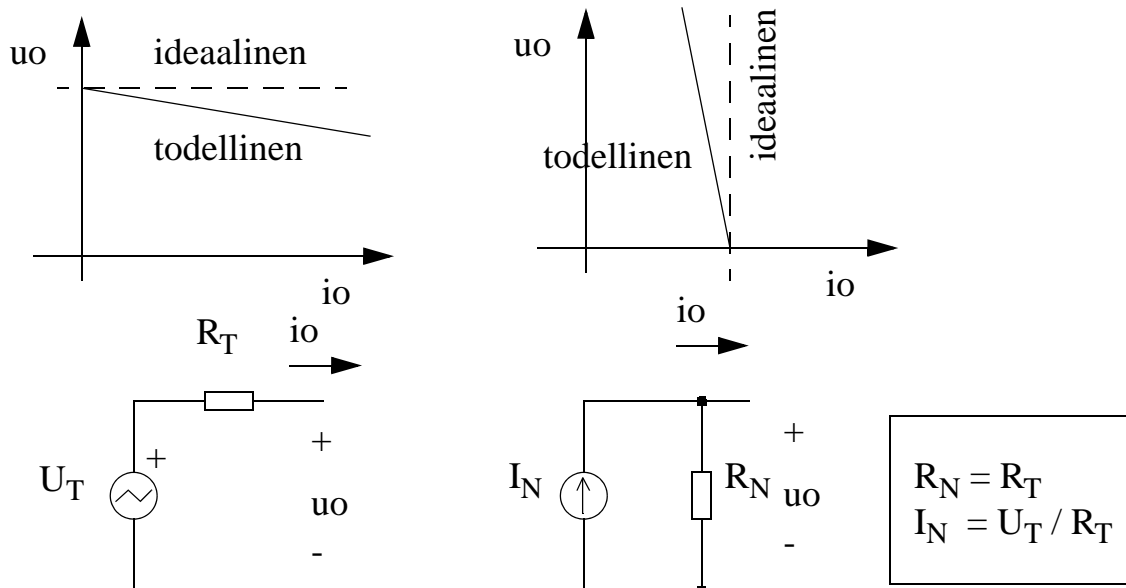
Havaitaan, että **kumpikin malli antaa täsmälleen saman tuloksen kun**

$$U_T = I_N \cdot R_N$$

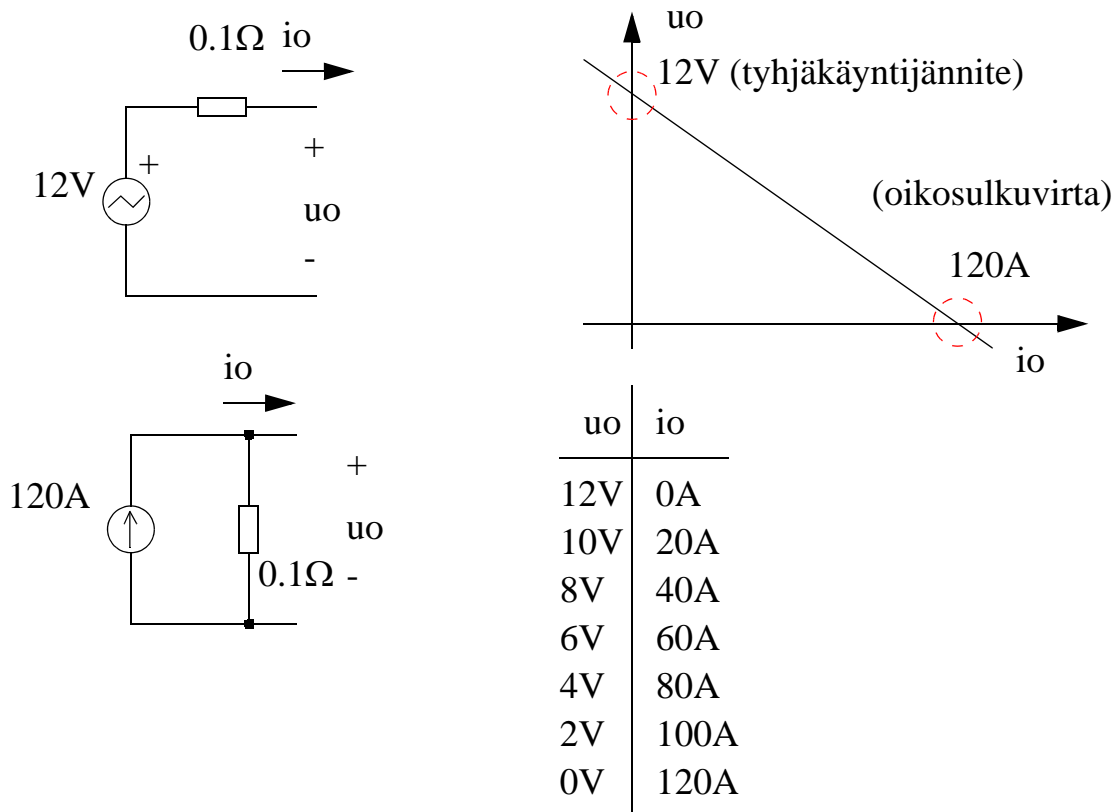
$$R_T = R_N$$

(2.10-2)

Analyysin helpottamiseksi epäideaalinen jännitelähde voidaan siis tarvittaessa korvata epäideaalisella virtalähteellä tai päinvastoin.



Esim. Saman lähteen mallitus jännite- ja virtalähteenä



Ohessa on (huonon) 12V akun virta-jännite -käyrä ja piirimalli: kun lähtövirta $i_o=0$, lähtöjännite u_o nousee 12V:iin, mutta lähtöä kuormittamalla u_o putoaa, ja oikosulkutilanteessa ($u_o=0$) virtaa saadaan 120 A. Lähtöresistanssi voidaan laskea tyhjäkäyntijännitteen ja oikosulkuvirran suhteena, $R_o = 12\text{V}/120\text{A} = 0.1$ ohm.

Alla on sama toiminta kuvattu virtalähteen avulla. Oikosulkutilanteessa $u_o=0$, jolloin 0.1ohm rinnakkaisvastus on virraton, ja koko 120A virta saadaan lähtöön. Kun lähtöä ei kuormiteta ($i_o=0$), 120A kulkee kokonaisuudessaan 0.1 ohm sisäisen vastuksen läpi ja nostaa lähtöjännitteeksi 12V.

Yo. mallit antavat täsmälleen samanlaiset lähdön virta-jännite -käyrät, ja niitä voidaan käyttää vaihtoehtoisesti. Kuitenkin mm. niiden sisäinen tehonkulutus on eri suuruinen.

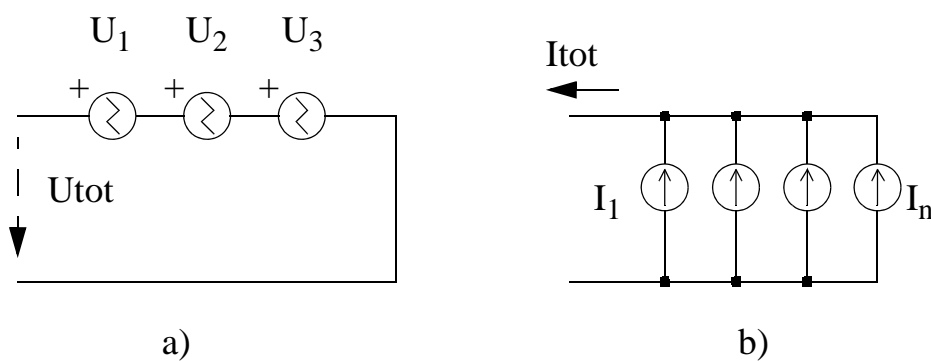
Jatkossa häviöllisiä lähteitä muunnetaan säännöllisesti toisen tyyppiseksi. Helppo keino muunnosten suorittamiseen ja tarkistamiseen on verrata lähteitä kahdessa pisteessä: kun lähtöjännite $u_o=0$ ja kun lähtövirta $i_o=0$. Edellinen vastaa oikosulkutilannetta ja jälkimmäinen kuormittamatonta ns. tyhjäkäyntitilannetta.

2.11 Lähteiden kytkentöjä

Summaaminen

Jännitelähteitä voidaan kytkeä kuvan a) mukaisesti sarjaan, jolloin Kirchhoffin jännitelain mukaan

$$U_{tot} = \sum U_i \quad (2.11-1)$$



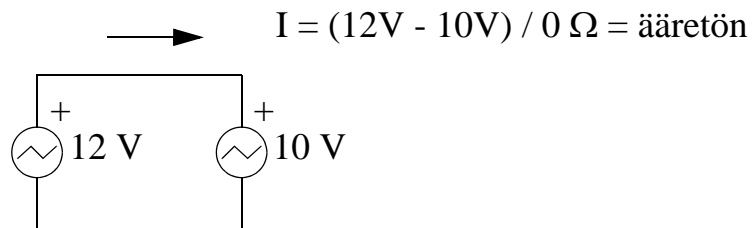
Esimerkiksi paristot ja akut valmistetaan tällä tavoin: pieniä elementtejä (esim. 1.5 V kennoja) kytketään sarjaan, kunnes saavutetaan haluttu lähtöjännite. Eri suurteiden summa voidaan muodostaa myös virroista, jolloin kuvan b) kytkennässä Kirchhoffin virtalain mukaan

$$I_{tot} = \sum I_i \quad (2.11-2)$$

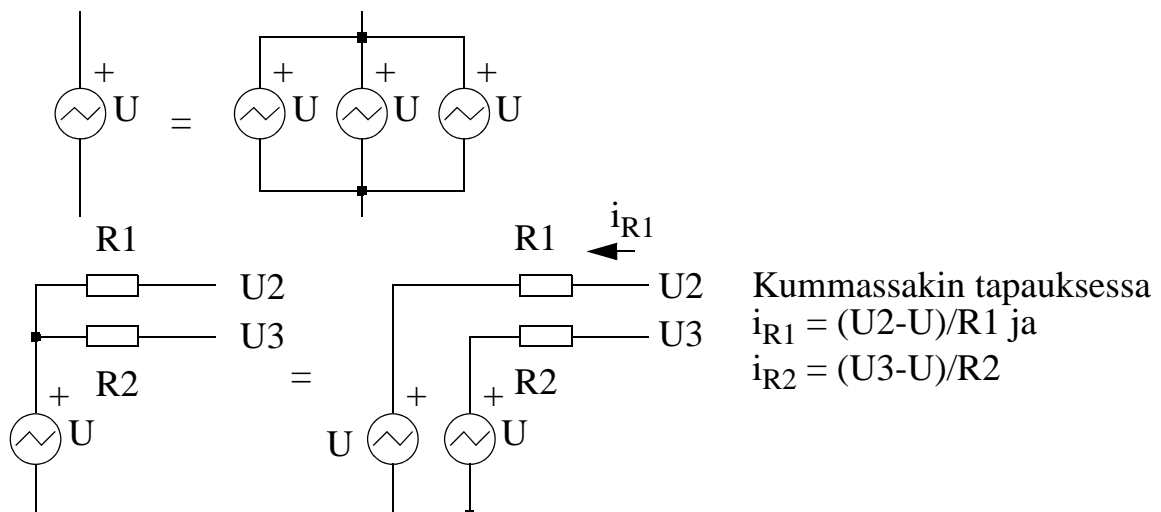
Elektroniikkasuunnittelussa jälkimmäinen tapa on yleisempi summan muodostamiseksi, sillä kelluvien jännitelähteiden (jännitelähde, jonka molemmat päät saavat olla missä jännitteessä hyvänsä) toteuttaminen on vaikeaa. Sen sijaan jännite on helppo muuttaa virraksi, ja virtoja on helppo summata yksinkertaisesti viemällä ne samaan pieniohmiseen solmupisteeseen.

Lähteiden pilkkominen

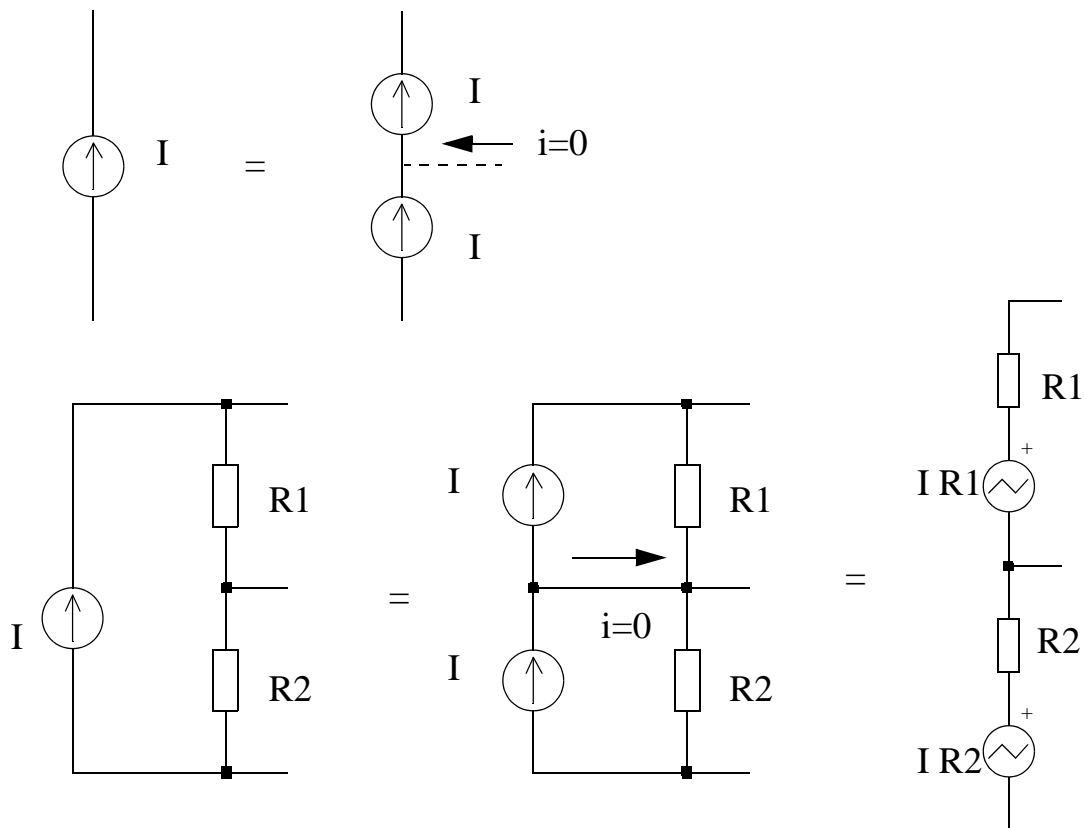
Jos kahden erijännitteisen ideaalisen jännitelähteen navat kytketään yhteen, niiden välillä kulkee hyvin suuri virta (esim. naapurin autoa käynnistettäessä omasta akusta menee suuri virta naapurin auton akkuun). Jos jännitteet ovat likimain samat, lähteiden lähtöresistanssit yleensä tasaavat pienet erot.



Monesti sähköisten **verkkojen analysointia helpottaa**, jos kytkentä voidaan pilkkoa pienemmiksi osakokonaisuuksiksi. Tällöin voidaan käyttää alla olevan kuvan menetelmää: yksi jännitelähde korvataan useammalla samanarvoisella, rinnankytketyllä jännitelähteellä. Koska jännitelähteiden jännitteet ovat yhtä suuria, niiden toiset navat (ei molempia !) voidaan irrottaa toisistaan, jolloin positiiviset navat ovat edelleen samassa jännitteessä. Nyt tähän solmuun liittyvät komponentit voidaan irrottaa toisistaan ja kytkä eri jännitelähteiden lähtöön, jolloin kytkennän toiminta ei ole muuttunut miksikään, mutta se saattaa olla helpommin analysoitavissa.



Vastaavasti virtalähteen toiminta ei muutu vaikka se korvataan N :llä sarjaankytketyllä samansuuruisella virtalähteellä (tosielämässä pienikin ero virtojen kesken synnyttää välipisteisiin hyvin suuria jännitteitä). Koska virtalähteiden virrat ovat yhtä suuria, välipisteistä voidaan piirtää johdin mihin solmuun hyvänsä, sillä se on KCL:n mukaan aina virraton, eikä vaikuta muun verkon toimintaan. Näin voidaan jälleen pilkkoa hankalasti analysoitava kytkentä pienemmiksi kokonaisuuksi.



Huomatus:

Simulointiohjelmien (esim. LTSpice) jännite- ja virtalähteet ovat ideaalisia. Simulaattorin muodostama **yhtälöryhmä ei ratkea**, jos virtalähteitä kytketään sarjaan tai jännitelähteitä rinnakkain, joten tällaisten kytkentöjen esiintyminen tarkistetaan ja niistä annetaan virheilmoitus.

3. VERKKOYHTÄLÖIDEN MUODOSTAMINEN

3.1 Johdanto

Sähköisiä piirejä kuvaavissa yhtälöissä on useita muuttujia (usean solmun jännite tai haaran virta), joten niiden kuvaamiseen tarvitaan yhtälöryhmiä, jotka yleensä esitetään matriisimuodossa.

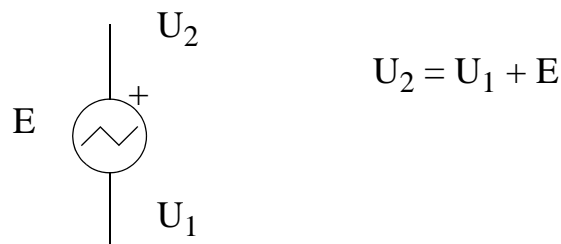
Yhtälöryhmien muodostamisessa ja ratkaisemisessa on syytä muistaa seuraavat oleelliset seikat:

- Yhtälöryhmän ratkaisemiseen tarvitaan yhtä monta yhtälöä kuin on tuntemattomiakin. Tällöin matriisiyhtälö ratkeaa yksinkertaisesti kerroinmatriisin käännöllä
- Yhtälöiden on oltava toisistaan riippumattomia: jos jokin yhtälö voidaan muodostaa toisten yhtälöiden painotettuna summana, yhtälöryhmä ei ratkea
- Summattavilla suureilla on oltava sama yksikkö. **Ampeereja ja voltteja ei voi laskea yhteen.** Sen sijaan yhtälöryhmä voi sisältää KVL- ja KCL-yhtälöitä.
- Toisinaan riippumattomia yhtälöitä muodostuu enemmän kuin tuntemattomia. Tällöin voidaan ratkaisu etsiä pienimmän neliövirheen menetelmällä, mutta tämän ratkaiseminen on hieman työläämpää kuin sellaisen yhtälöryhmän, jossa on täsmälleen yhtä paljon yhtälöitä kuin tuntemattomiakin.

Lisäksi on syytä kiinnittää huomiota tuntemattomien valintaan: ovatko ne varmasti riippumattomia, vai voiko jonkin suureen lausua jonkin toisen avulla. Tällä pohdiskelulla on merkittävä yhtälöryhmää pienentävä vaikutus.

Jatkossa tullaan käyttämään mm. seuraavia keinoja:

- Toisesta päästä maadoitetun jännitelähteen lähtöjännite tunnetaan, jolloin sitä ei tarvitse enää ratkaista
- Häviöllinen jännitelähde voidaan muuttaa häviölliseksi virtalähteeksi ja päinvastoin.
- Lasketaan paloittain jännitejaolla



3.2 Yhtälöryhmien esittäminen matriisimuodossa

Jos yhtälöryhmät ovat lineaarisia tai ne voidaan linearisoida tietyllä alueella, ratkaisussa voidaan käyttää apuna lineaari- eli matriisialgebran keinoja, joita kerrataan nyt pikaisesti. Lineaarialgebran parhaita puolia on systemaattinen esitystapa, joka suoraan tukee myös yhtälöryhmien tietokoneavusteista ratkaisemista.

Jos meillä on N tuntematonta x_1, x_2, \dots, x_N , niiden ratkaisemiseksi tarvitaan N toisistaan riippumatonta yhtälöä ja niiden ratkaisut y_1 - y_N :

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 &= y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 &= y_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 &= y_3 \end{aligned} \quad (3.2-1)$$

Huomaa, että uusi yhtälö ei ole riippumaton, jos se on muodostettu aiempien yhtälöiden painotettuna summana.

Merkityksen helpottamiseksi yhtälöt esitetään useimmiten matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (3.2-2)$$

jossa siis kertoimet a_{ij} ($a_{\text{rivi_sarake}}$) on koottu yhteen matriisiin, ja alkuperäisiin yhtälöihin päästää periaatteella "rivillä kerrotaan sarake". Tämä voidaan edelleen merkitä lyhyemmin merkinnällä

$$A \cdot x = y \quad (3.2-3)$$

jossa A , x ja y ovat nyt $N \times N$ -, $1 \times N$ - ja $1 \times N$ -matriiseja. Sähköisten piirien verkko-yhtälöitä ratkaistaessa kerroinmatriisi A kuvaa verkon rakennetta ja komponenttiarvoja, x tuntemattomia suureita, joiden arvot halutaan ratkaista, ja y tunnettuja herätteitä.

Yhtälöryhmien käsittelemiseen ja ratkaisemiseen on kehitetty lukuisia tehokkaita menetelmiä, joista lisää seuraavassa luvussa. Matriisien ominaisuuksista kerrotaan tarkemmin matriisialgebran (=lineaarialgebran) kurssissa.

3.3 Yhtälöryhmien ratkaiseminen

Lineaaristen, aika-invarianttien verkkojen analyysi on käytännössä lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemista, johon voidaan käyttää matriisialgebran keinoja. Yhtälöryhmien numeeriseen (lukuarvoilla tapahtuvaan) ratkaisemiseen on useita tehokkaita keinoja (Gauss-Jordanin eliminointi, LU-ositus jne.), mutta jos ratkaisu halutaan symbolisessa muodossa ($U_1 = R_1 I_1$ eikä $U_1 = 0.28 V$), kovin tehokkaita keinoja ei ole käytettävissä. Yhtälöitä voidaan ratkaista perinteisellä toisiinsa sijoittamisella, mutta systemaattisemman käsittelyn saavuttamiseksi tässä monisteessa käytetään ns. **Cramerin sääntöä**, joka on laskennallisesti tehoton, mutta jolla kuitenkin kyetään ratkomaan 4-6 yhtälön yhtälöryhmiä. Cramerin sääntöä käytetään paljon symbolisessa laskennassa.

Cramerin sääntö lähtee liikkeelle matriisiyhtälön ratkaisemisesta kerroinmatriisin A käänteismatriisin avulla

$$\begin{aligned} A \cdot x &= y, \quad \text{josta} \\ x &= A^{-1} \cdot y \end{aligned} \quad (3.3-1)$$

Käänteismatriisi on määritelty (tässä 3 x 3-tapauksessa) muodossa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (3.3-2)$$

jossa $\det(A)$ on matriisin A determinantti ja adjungoitu matriisi $\text{adj}(A)$ koostuu ns. kofaktoreista A_{ij} , jotka ovat matriisiin alideterminanteja niin, että matriisista on poistettu i :s rivi ja j :s sarake ja jäljelle jäänyt determinantti on kerrottu $(-1)^{i+j}$:llä. Nyt jos yhtälössä (3.3-1) vain yksi muuttujista x_i kiinnostaa, yhtälöistä (3.3-1) ja (3.3-2) seuraa (3x3-matriisin tapauksessa) esimerkiksi

$$x_2 = \frac{A_{12} \cdot y_1 + A_{22} \cdot y_2 + A_{32} \cdot y_3}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 & a_{13} \\ a_{21} & y_2 & a_{23} \\ a_{31} & y_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad (3.3-3)$$

Yhtälöryhmä saadaan siis ratkaistua seuraavalla suoraviivaisella tavalla:

- Sijoitetaan herätevektori y matriisiin A ratkaistavaa muuttujaa x_i vastaavan sarakkeen i paikalle.
- Jaetaan näin muodostetun matriisin determinantti alkuperäisen matriisin A determinantilla ja näin saadaan haluttu ratkaisu.

Esim.

$$\begin{aligned} 1a &= 1 \\ 4a + 5b + 6c &= 0 \\ 8a + 2b + 3c &= 0 \end{aligned}$$

Matriisimuodossa (yli 3x3 matriiseissa kehitetään ylärivin suhteen)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det(A) \text{ lask. näin:}$$

samalla vinorivillä olevat luvut kerrotaan keskenään

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 3 & 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 5 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \cdot 8 + 0 \cdot 4 \cdot 2 - 0 \cdot 6 \cdot 8 - 1 \cdot 6 \cdot 2 - 0 \cdot 4 \cdot 3 = 15 - 12 = 3$$

Tästä

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot (5 \cdot 3 - 6 \cdot 2)}{1 \cdot (5 \cdot 3 - 6 \cdot 2)} = 1$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-1 \cdot (4 \cdot 3 - 6 \cdot 8)}{1 \cdot (5 \cdot 3 - 6 \cdot 2)} = 12$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot (4 \cdot 2 - 8 \cdot 5)}{1 \cdot (5 \cdot 3 - 6 \cdot 2)} = \frac{-32}{3}$$

Esimerkki Matlabin ...

Matlab kehitettiin alunperin nimenomaan matriisiyhtälöiden ratkaisemiseen, ja edellisen esimerkin mukaisen matriisiyhtälön numeerinen ratkaisu käy hyvin kivuttomasti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

on muotoa $Ax = b$, josta $x = A^{-1} * b$. Matlabissa matriisien määrittely ja tuloksen ratkaiseminen tehdään komendoilla

```
A = [ 1 0 0; 4 5 6; 8 2 3] %määritellään matriisit
b = [1 0 0]' % heittomerkki tarkoittaa transpoosia

x = inv(A)*b    % tai num. tehokkaammalla tavalla x=A\b
```

... ja Maximan käytöstä

Maximan komentokielellä sama hoituisi näin:

```
A : matrix([ 1, 0, 0], [4, 5 ,6], [8, 2, 3]);
y : matrix([ 1],[0],[0]);
x : invert(A).y;
```

Matlabissa puolipiste rivin lopussa estää tulostuksen, Maximassa loppumerkki on pakollinen (; kaiuttaa, \$ estää tulostuksen). Maxima osaa ratkaista yhtälöryhmiä myös symbolisessa muodossa. Lisäksi komento **solve()** osaa ratkaista yhtälöryhmiä ilman että niitä tarvitsee kirjoittaa matriisimuotoon. Lisäksi Maxima osaa ratkaista yhtälöryhmiä **symbolisesti**, matlab vain numeerisesti.

Huom.

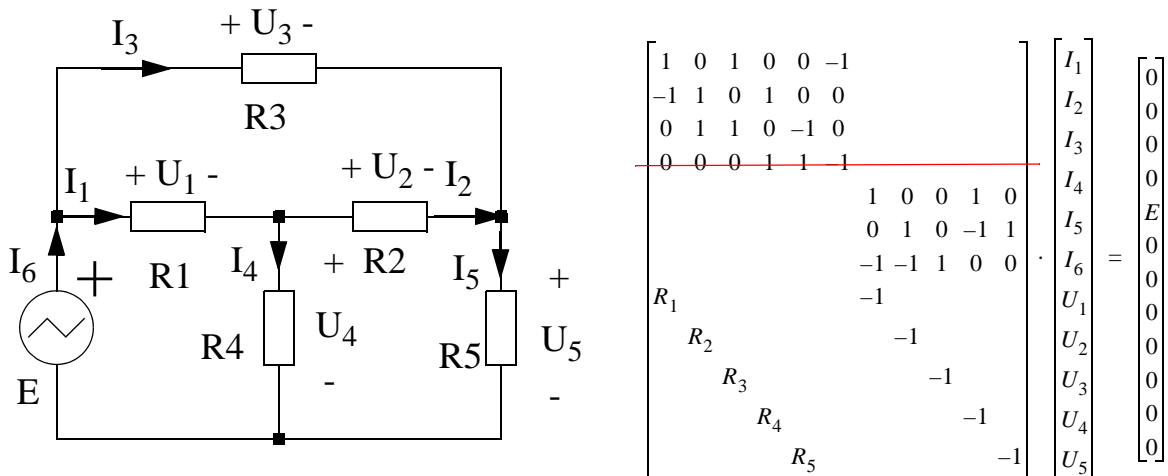
Kompleksikertoimisissa yhtälöryhmissä Matlabin transpoosia (') on syytä varoa, sillä se ottaa samalla luvuista kompleksikonjugaatin, s.o. kääntää imaginääriosan merkin. Operaattori .' ei ota kompleksikonjugaattia.

3.4 Verkko-yhtälöiden muodostamistapoja

Sähköisten piirien analysoimiseen on useita systemaattisia tapoja, joista osa on kehitetty tietokoneavusteista analyysiä varten ja osa käsilaskennan avuksi. Tarkastellaan aluksi oheista, tehottominta esimerkkiä:

A. Tabloid-esitys

Oheiselle piirille voidaan kirjoittaa neljä yhtälöä Kirchoffin virtalain (KCL) ja kolme jännitelain (KVL) perusteella. Lisäksi haarajännitteet U_1 - U_5 voidaan lausua haaravirtojen I_1 - I_5 ja resistanssiarvojen avulla, jolloin muodostuu vielä viisi yhtälöä. Näin saadaan 12 yhtälöä, joissa on yhteensä 11 tuntematonta. Virtayhtälöistä yksi on kuitenkin redundanttinen, sillä se voidaan muodostaa muiden yhtälöiden summana (matriisin 4. rivi = 1. + 2. -3.). Niinpä esitetty yhtälöryhmä ei ratkea sellaisenaan, vaan siitä on poistettava yksi yhtälö.



KCL

$$I_6 = I_1 + I_3$$

$$I_1 = I_2 + I_4$$

$$I_5 = I_2 + I_3$$

$$I_6 = I_4 + I_5$$

KVL

$$U_1 + U_4 = E$$

$$U_2 + U_5 - U_4 = 0$$

$$U_3 - U_1 - U_2 = 0$$

Ohmin laki

$$U_3 = I_3 R_3$$

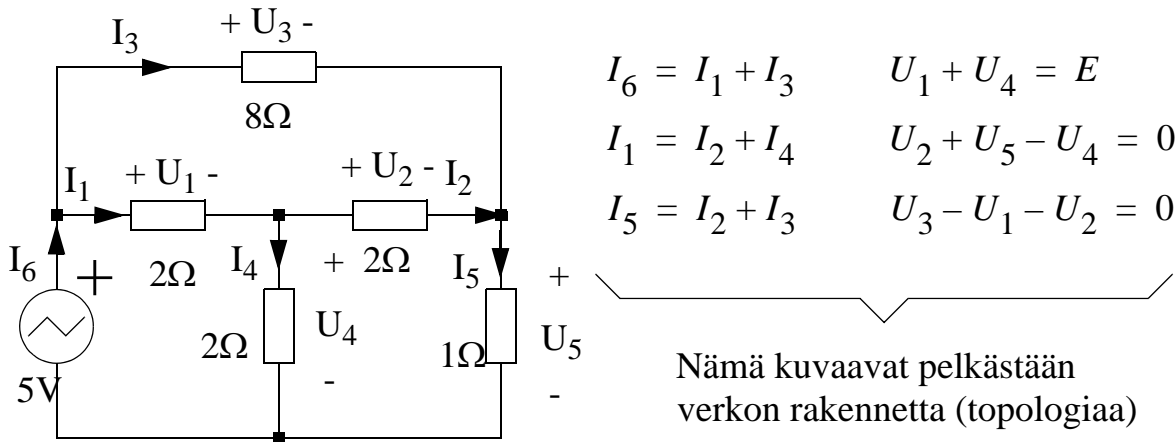
$$U_1 = I_1 R_1$$

$$U_2 = I_2 R_2$$

$$U_4 = I_4 R_4$$

$$U_5 = I_5 R_5$$

(3.4-1)

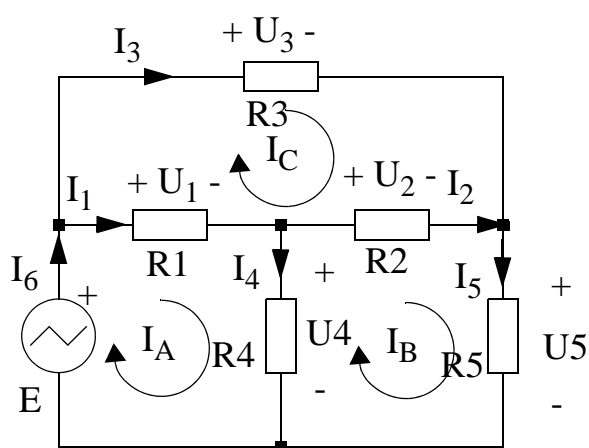


Ratkaistaan ensin systeemi poistamalla siitä neljäs yhtälö ($I_6 = I_4 + I_5$), jolloin kerroinmatriisiksi jää invertoituva 11 x 11 matriisi. Kuvan komponenttiarvoilla saadaan haaravirroiksi $I_1..I_6$ [1.5A, 0.5A, 0.5A, 1A,1A, 2A] ja haarajännitteiksi $U_1..U_5$ [3V, 1V, 4V, 2V, 1V]. Verkolle siis saadaan ratkaisu, mutta sen kuvaustapa on raskas, vaatii 11 yhtälöä. Tämä esitystapa kulkee nimellä **tabloid**-esitys.

	virtojen kertoimet	jännitteiden kert.					
topologia (KCL, KVL)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	·	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	(3.4-2)
komponentit (Ohmin laki)	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	·	$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$		

B. Silmukkavirtamenetelmä (Mesh analysis, MA, ks. 3.9)

Em. piiri voidaan kuvata paljon yksinkertaisemminkin, jopa useammalla tavalla. Aloitamme muodostamalla pelkästään Kirchoffin jännitelait (KVL) kullekin kolmelle silmukalle ja lausumalla haarajännitteet $U_1..U_5$ ns. **silmukkavirtojen** I_A, I_B, I_C avulla (so. merkitään kuhunkin silmukkaan kiertämään yksi virta):



$$\text{KVL: A: } U_1 + U_4 = E$$

$$\text{B: } U_2 + U_5 - U_4 = 0$$

$$\text{C: } U_3 - U_1 - U_2 = 0$$

missä

$$U_1 = R_1(I_A - I_C) \quad U_3 = R_3 I_C$$

$$U_2 = R_2(I_B - I_C) \quad U_5 = R_5 I_B$$

$$U_4 = R_4(I_A - I_B)$$

Jänniteyhtälöistä (KVL) lähtien saadaan siis kolme yhtälöä

$$R_1(I_A - I_C) + R_4(I_A - I_B) = E$$

$$R_2(I_B - I_C) + R_5 I_B - R_4(I_A - I_B) = 0 \quad [\text{V}] \quad (3.4-3)$$

$$R_3 I_C - R_1(I_A - I_C) - R_2(I_B - I_C) = 0$$

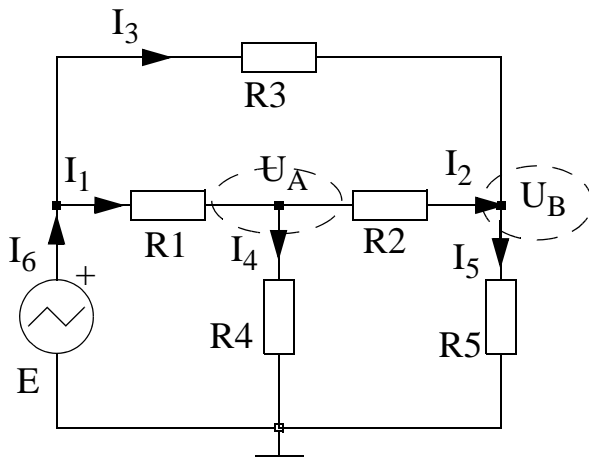
jotka saadaan matriisimuotoon yhdistämällä silmukkavirtojen kertoimet:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_4 & -R_4 & -R_1 \\ -R_4 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_2 \\ -R_1 & -R_2 & R_1 + R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4-4)$$

Edellisen esimerkin komponenttiarvot ($R_1=R_2=R_4=2\Omega$, $R_3=8\Omega$, $R_5=1\Omega$, $E=5\text{V}$), sijoittamalla saadaan silmukkavirroiksi I_A, I_B, I_C arvot $[2\text{A}, 1\text{A}, 0.5\text{A}]$. Näistä voidaan edelleen laskea haaravirrat $I_1..I_6$ ja haarajännitteet $U_1..U_5$, jolloin saadaan sama tulos kuin edellisellä sivulla. Kuten huomataan, systeemin ratkaiseminen vaatii tässä tapauksessa vain kolmen samanaikaisen yhtälön ratkaisemisen.

C. Solmupistemethodelmä (Nodal analysis, NA, ks. 3.6)

Vastaavalla tavalla piiri voidaan ratkaista Kirchhoffin virtayhtälöiden perusteella kirjoittamalla solmupisteiden virtojen summat, tässä tapauksessa siten, että positiivinen suunta on solmusta pois päin. Nyt riittää, että kirjoitetaan yhtälöt vain kahdelle solmulle, sillä jännitelähde kiinnittää yhden solmun (sen jännite on jo tunnettu) ja yksi solmu (alin) kiinnitetään 0V:iin, jolloin U_A ja U_B lasketaan se suhteeseen.



$$\text{KCL: } \begin{aligned} \text{A: } & -I_1 + I_2 + I_4 = 0 \\ \text{B: } & I_5 - I_2 - I_3 = 0 \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} I_1 &= (E - U_A)/R_1 & I_4 &= U_A/R_4 \\ I_2 &= (U_A - U_B)/R_2 & I_5 &= U_B/R_5 \\ I_3 &= (E - U_B)/R_3 \end{aligned}$$

Merkittämällä $1/R_i = G_i$ voidaan virtojen summat kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} G_1(U_A - E) + G_4 U_A + G_2(U_A - U_B) &= 0 \\ G_3(U_B - E) + G_5 U_B + G_2(U_B - U_A) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4-5)$$

ja huomaamalla että E on vakio, edelleen matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 E \\ G_3 E \end{bmatrix} \quad [\text{A}] \quad (3.4-6)$$

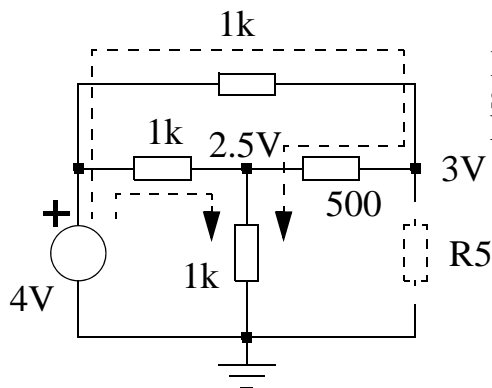
Tähän arvot sijoittamalla saadaan ratkaisuksi $U_A = 2\text{V}$ ja $U_B = 1\text{V}$, mikä vastaa edelleen aiempia esimerkkejä. Nyt tulos on saatu kahdella yhtälöllä, siis oleellisesti vähemmällä vaivalla kuin ensimmäisessä tapauksessa.

D. Ekvivalenttipiiri (vastinpiiri, Equivalent circuit, ks luku 4)

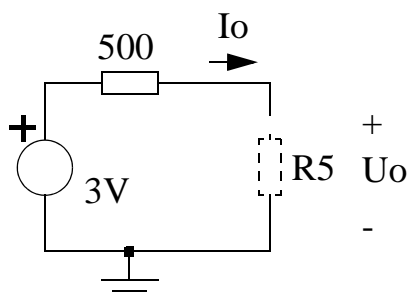
Kuvitellaan vielä, että esimerkkipiirissä vastuksen R5 arvo voi vaihdella, ja meitä kiinnostaa tietää paljonko sen virta muuttuu. Tämä selviää kätevästi korvaamalla koko muu piiri ekvivalenttipiirillä, joka antaa lähtöporttiin (eli R5:n napoihin) saman virta-jännite -riippuvuuden. **Lineaarisilla piireillä minkä hyvänsä piirin ekvivalenttipiiriksi riittää yksi lähde ja yksi resistanssi**, joten R5:n arvon muuttumisen vaikutuksia on huomattavan helppo arvioida, jos piirin vasen puoli pelkistetään alemman kuvan mukaiseksi ekvivalenttipiiriksi.

Ekvivalenttipiirissä 3V jännitelähde määrää tyhjäkäyntijännitteen ja 500 ohmin sarjavastus lähtöresistanssin, jotka yhdessä määräävät ekvivalenttipiirin **kuormitussuoran**, joka on piirretty kuvaan ehjällä viivalla. Kuvaan on myös piirretty R5:n I-V -käyrä, kun R5=1 kohm. R5:n yli oleva jännite saadaan paitsi laskemalla, myös graafisesti käyrien leikkauspisteestä. Graafista ratkaisua käytetään etenkin, jos lineaariseen verkkoon liitetään komponentti, jonka virta-jännite -käyrä on epälineaarinen.

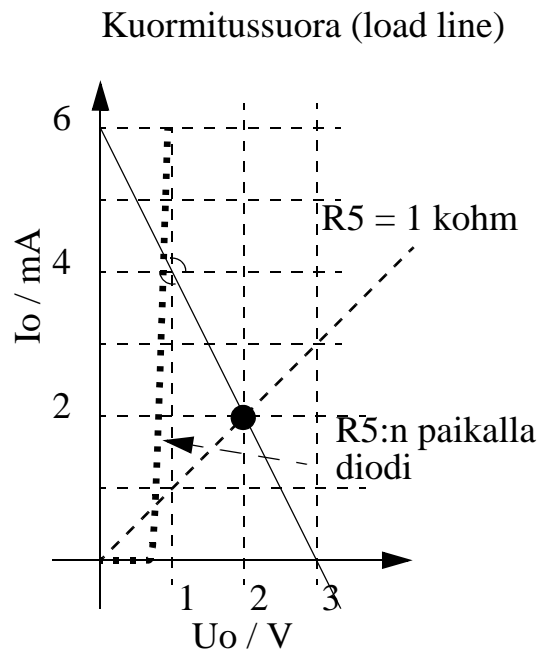
Ekvivalenttipiiriä käyttäen koko verkon toiminta saadaan kuvattua yhdellä yhtälöllä. Samaan ajatukseen perustuu myös ns. parametriesitysten käyttö (ks. Piiriteoria II).



Kuvaan on merkitty solmujännitteet, kun R5 on irti



R5:n kannalta tämä toimii täsmälleen samalla tavalla.



3.5 Lisää verkkoyhtälöiden muodostamisesta

Edellisestä havaitaan, että verkkoyhtälöt voidaan kirjoittaa sekä systemaattisesti ja tehokkaasti, ja yleiseen käyttöön onkin vakiintunut kolme lähes tasavertaista menetelmää:

- Solmupistemenetelmä (NA, nodal analysis), joka perustuu Kirchhoffin virtasumman soveltamiseen verkon jokaisessa riippumattomassa solmupisteessä. Ratkaistavina tuntemattomina ovat solmupisteiden jännitteet
- Silmukkavirtamenetelmä (MA, mesh analysis), joka perustuu Kirchhoffin jännitesumman soveltamiseen jokaiseen verkosta löytyvään riippumattomaan silmukkaan. Ratkaistavina suureina ovat silmukkavirrat.
- Modifioitu solmupiste-esitys (MNA, modified nodal analysis), jossa solmupiste-analyysiä on laajennettu ottamalla tuntemattomiksi solmujännitteiden lisäksi myös muutamien muuten vaikeasti kuvattavien komponenttien haaravirtoja. *Tässä osa yhtälöistä on jännitteiden, osa virtojen summia. (ks. Liite A)*

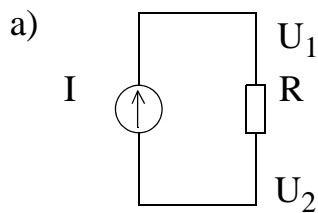
MNA-menetelmä on universaali ja yleisesti käytössä piirisimulaattoriohjelmassa, mutta se tuottaa käsilaskentaa ajatellen tarpeettoman suurikokoisia matriiseja. Käsilaskennassa ja symbolisessa analyysissä yleensäkin on eduksi minimoida yhtälöiden määrä, ja tässä monisteessa käytetään pääasiassa solmupiste-analyysiä. Tällöin joudutaan kuitenkin käyttämään hieman heuristiikkaa yhtälöiden muodostamisessa. Aiheesta kiinnostuneita varten erilaisia menetelmiä on esitelty hieman laajemmin liitteessä A.

Yhtälöiden lukumäärästä

Kuten edellä todettiin, yhtälöryhmästä voidaan ratkaista vain niin monta tuntematonta kuin ryhmässä on riippumattomia yhtälöitä - ja yhtälö on riippumaton, jos sitä ei voi muodostaa toisten yhtälöiden painotettuna summana (eli lineaarikombinaationa). Solmupistemenetelmällä esitetyistä verkoista voidaan yleensä ratkaista solmujännitteiden keskinäiset suhteet, mutta jännitteiden absoluuttitasosta ei voida sanoa mitään, sillä solmupisteitä on yksi enemmän kuin riippumattomia yhtälöitä. Joissain kirjoissa tämä on toisinaan kierretty siten, että siellä esitetään jännitteet aina kahden solmun välisinä jännitteinä. Tietokoneavusteisessa piirianalyysissä (ja tässä monisteessa) menetellään siten, että yksi solmuista kiinnitetään tiettyyn jännitteeseen (0V eli maa) ja muiden solmujen jännite esitetään sen suhteen. Näin muuttujien (solmujännitteiden) määrä saadaan pienennettyä yhtä suureksi kuin riippumattomien yhtälöiden määrä. On syytä muistaa, että

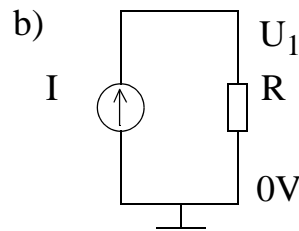
tietokoneavusteisessa piirianalyyssissä on aina kiinnitettävä yksi solmuista maapisteeksi. Spice-sukuisissa simulaattoreissa tälle on varattu solmunumero 0.

Edellistä havainnollistaa seuraava kuva. Kuvan a) esimerkki ei ratkea, sillä KCL:n perusteella muodostetut solmuyhtälöt eivät ole riippumattomia vaan toistensa negaatioita. Kuvassa b) solmun 2 jännite on kiinnitetty, jolloin tuntemattomia on vain yksi (yhtä monta kuin riippumattomia yhtälöitä) ja se voidaan ratkaista.



$$\begin{aligned} \text{solmu 1: } I &= (U_1 - U_2)/R \\ \text{solmu 2: } -I &= (U_2 - U_1)/R \end{aligned}$$

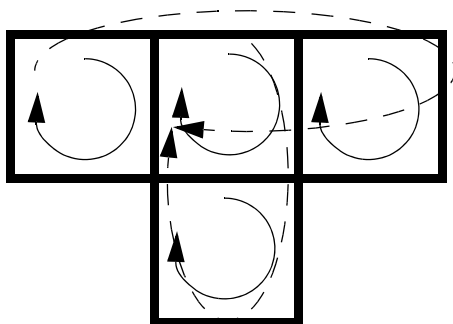
$$\text{ratk.: } U_1 - U_2 = U_1 - U_2$$



$$\text{solmu 1: } I = (U_1 - 0)/R$$

$$\text{ratk.: } U_1 = I R$$

Solmupistemenetelmässä on siis yhden solmun jännite kiinnitettävä, sillä viimeisen solmupisteen virtayhtälö ei ole riippumaton vaan se voidaan laskea muiden yhtälöiden summana. Myös silmukkavirtamenetelmässä voidaan laatia ylimääräisiä silmukoita, jotka sisältävät saman informaation kuin aiemmat silmukat. Niinpä **silmukkavirta-analyyssissä ei voida käyttää sisäkkäisiä silmukoita, sillä niiden sisältämä informaatio ei ole riippumatonta.**



Katkoviivalla merkityt silmukat ovat redundanttisia, joten niitä ei tarvita. Verkkoyhtälöt muodostetaan kiinteällä viivalla piirrettyjen silmukoiden mukaan.

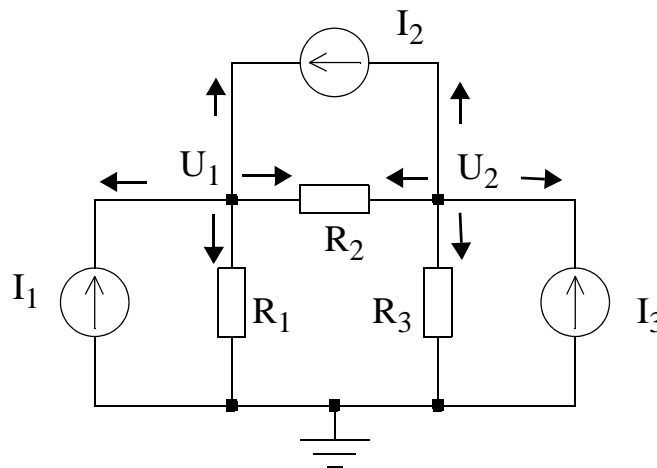
Tarkastellaan seuraavaksi solmupiste- ja silmukkavirtayhtälöiden muodostamista systemaattisesti.

3.6 Solmupisteanalyysi

Solmupistemethodelmä (NA, nodal analysis) lähtee KCL:stä: siinä lasketaan **virtojen summa verkon jokaisessa solmupisteessä** maapistettä lukuunottamatta siten, että solmupisteeseen liittyvät virtalähteet kootaan yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle (tulevat virrat positiivisina ja lähtevät negatiivisina) ja vastusten kautta muihin solmupisteisiin poistuvat virrat positiivisina toisella puolella. Näin oheiselle esimerkille voidaan johtaa yhtälöt

(3.6-1)

$$\begin{aligned} \text{Solmu 1:} & \quad (U_1 - 0) / R_1 + (U_1 - U_2) / R_2 = I_1 + I_2 \\ \text{Solmu 2:} & \quad (U_2 - 0) / R_3 + (U_2 - U_1) / R_2 = I_3 - I_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{G} \cdot \mathbf{U} &= \mathbf{I} \\ [\text{S}] \cdot [\text{V}] &= [\text{A}] \end{aligned}$$

Edellinen muoto kelpaa sellaisenaan esim. Maximalle. Matiasilaskentaa varten muotoa voidaan sieventää korvaamalla resistanssit R_i konduktansseilla $G_i = 1/R_i$

(3.6-2)

$$\begin{aligned} \text{Solmu 1:} & \quad G_1(U_1 - 0) + G_2(U_1 - U_2) = (G_1 + G_2)U_1 - G_2U_2 = I_1 + I_2 \\ \text{Solmu 2:} & \quad G_3(U_2 - 0) + G_2(U_2 - U_1) = -G_2U_1 + (G_2 + G_3)U_2 = I_3 - I_2 \end{aligned}$$

joka on jo helppo kirjoittaa systemaattiseen matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 \\ I_3 - I_2 \end{bmatrix} \quad (3.6-3)$$

Matriisiesityksen yleinen muoto on siis

$$G \cdot u = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = i \quad (3.6-4)$$

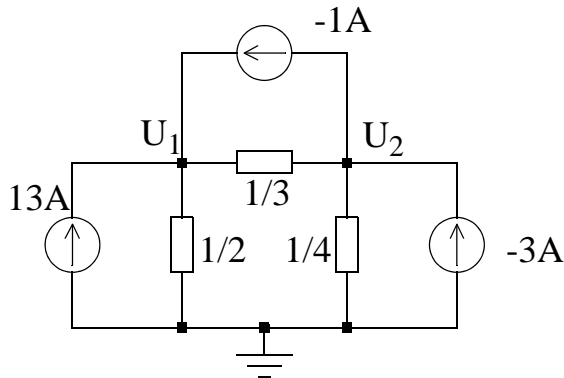
missä i on virtavektori, u (ratkaistava) jännitevektori ja G kytkentää ja komponenttiarvoja ja verkon rakennetta kuvaava neliömatriisi. Solmupisteyhtälöryhmän muodostamiselle on seuraavat selkeät säännöt:

- yhtälöitä muodostettaessa merkitään konduktanssien läpi kulkevien virtojen positiivinen suunta solmusta ulos päin
- virta i_i kuvaa solmuun liittyviä virtalähteitä, ja sen arvo on virtalähteiden kautta solmuun tulevien ja siitä lähtevien virtojen erotus
- matriisin G diagonaalelementti g_{ii} on arvoltaan kaikkien solmupisteeseen i liittyvien konduktanssien summa. Ei-diagonaalelementit g_{ij} muodostetaan siten, että solmupisteiden i ja j väliset konduktanssit lasketaan yhteen ja summa merkitään elementtiin g_{ij} miinusmerkkisenä. Miinusmerkki selittyy yhtälössä (3.6-2) esiintyvällä jännite-erolla $u_i - u_j$. Jos verkossa ei ole ohjattuja lähteitä, $g_{ij} = g_{ji}$, eli matriisi on lävistäjän suhteen symmetrinen.
- **kaikkien konduktanssien yksikkö on siemensjä ($S=1/\Omega = A/V$) !**
- jännitevektorissa u on solmupisteiden jännitteet u_i . Jännitevektoria u ollaan ratkaisemassa, ja se saadaan ratkaisemalla esim. Cramerin menetelmällä

$$G^{-1} \cdot i = u \quad (3.6-5)$$

Esimerkistä huomataan, että virtalähteet I_1 - I_3 sopivat hyvin solmupisteanalyysiin, ja niiden summa (tulevat virrat plussana, lähtevät miinuksena) voidaan sijoittaa suoraan matriisiyhtälön ratkaisuvektoriin i .

Muista tarkistaa suureiden yksiköt !

Esim.

Yksiköt ovat ampeereja ja ohmeja

(resistanssin ja konduktanssin piirrosmerkki on sama, joten on aina selvitettävä, ovatko lukuarvot resistansseja vai konduktansseja)

Solujen 1 ja 2 virtojen summat ovat muotoa ($[S][V] = [A]$):

(3.6-6)

$$\text{solmu 1: } 2(U_1 - 0) + 3(U_1 - U_2) = 13A + (-1)A$$

$$\text{solmu 2: } 3(U_2 - U_1) + 4(U_2 - 0) = -3A - (-1)A$$

Nämä voidaan kirjoittaa matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} 2+3 & -3 \\ -3 & 4+3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13+(-1) \\ (-3)-(-1) \end{bmatrix}$$

(3.6-7)

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Tästä $\det(G) = (5) \cdot (7) - (-3) \cdot (-3) = 26$ ja jännitteet U_1 ja U_2 Cramerin säännön mukaan ovat

$$U_1 = \frac{1}{26} \cdot \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = \frac{12 \cdot 7 - (-2) \cdot (-3)}{26} = \frac{78}{26} = 3 \text{ V}$$

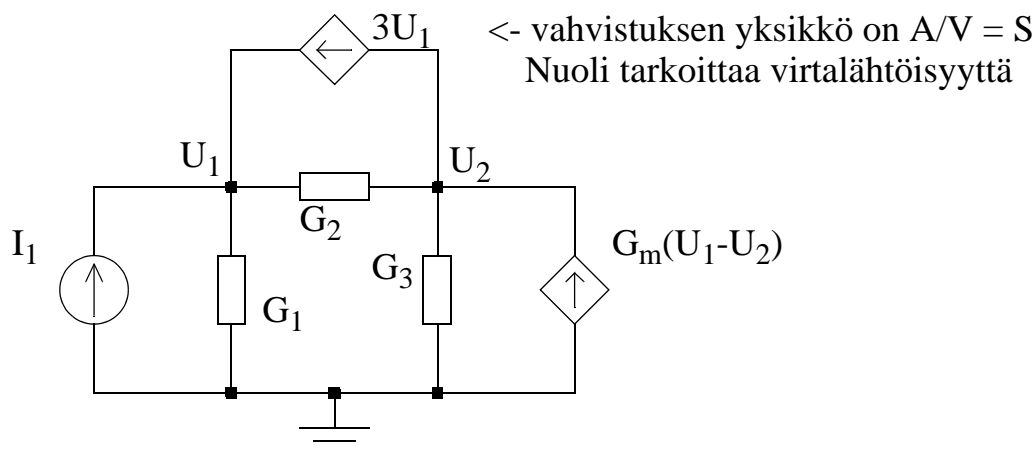
(3.6-8)

$$U_2 = \frac{1}{26} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = \frac{5 \cdot (-2) - (-3) \cdot 12}{26} = \frac{26}{26} = 1 \text{ V}$$

Tämä on aina helpompi tarkistaa kuin laskea !

3.7 Ohjatut lähteet solmupiste-esityksessä

Jänniteohjatut virtalähteet merkitään solmupiste-esityksessä lähteiden vektoriin samalla tavalla kuin riippumattomat virtalähteetkin. Ne voidaan kuitenkin siirtää osaksi G-matriisia, sillä ne ovat samaa muotoa kuin konduktanssitkin: solmujännite kerrottuna jollakin vakiolla.



Yhtälöryhmä muodostetaan edellisen mallin mukaan: virtalähteet oikealle, konduktanssit kertaa solmujännitteet vasemmalle:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 + 3 \cdot U_1 \\ G_m \cdot (U_1 - U_2) - 3 \cdot U_1 \end{bmatrix} \quad (3.7-1)$$

Huomataan, että ohjattujen lähteiden termit $3U_1$ ja $G_m(U_1 - U_2)$ sisältävät solmujännitteitä U_1 ja U_2 . Siirretään ne yhtäsuuruusmerkin vasemmalle puolelle (jolloin etumerkki vaihtuu) ja yhdistetään ko. solmujännitteen kertoimeen:

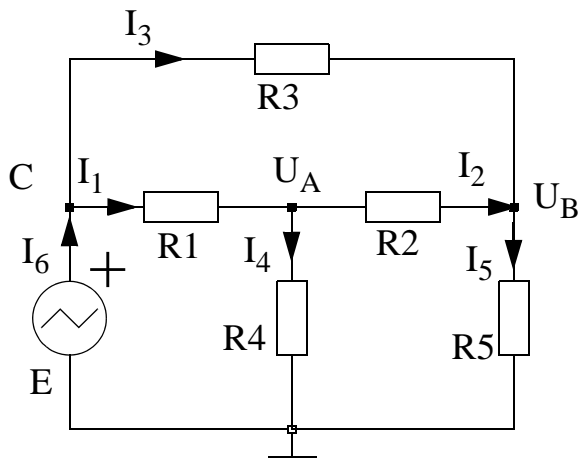
$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 - 3 & -G_2 \\ -G_2 + 3 - G_m & G_2 + G_3 + G_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7-2)$$

Huomaa että ohjattujen lähteiden lisääminen rikkoo G-matriisin symmetrian, eli g_{ij} ei ole aina sama kuin g_{ji} . Tämä johtaa siihen, että verkosta tulee suuntaava: sillä on selkeästi tulo ja lähtö, kun esim. monia puhtaasti passiivisia verkkoja voidaan käyttää kumminkin päin.

3.8 ‘Vääräntyyppisten’ lähteiden käsittely

Transistorikytkentöjä analysoitaessa on hyvin yleistä, että herätteenä on jännitelähde, mutta transistoria mallitetaan jänniteohjatulla virtalähteellä. Tällaisessa tapauksessa jännitelähteestä ei ole haittaa: jännitelähteen yläpään jännitettä pidetään vakiona, eikä ko. solmulle kirjoiteta virtayhtälöä. Muille solmuille virtayhtälö kirjoitetaan, ja jännitelähteen vaikutus otetaan huomioon.

Aiemmassa esimerkissä tehtiin juuri näin: **solmu C ei ole “vapaa”**, sillä jännitelähde asettaa sen jännitteen. Niinpä virtayhtälöt kirjoitetaan vain solmuille A ja B, mutta niiden virtojen summassa otetaan silti huomioon solmua C kohti kulkevat virrat.



$$\text{KCL: } \text{A: } -I_1 + I_2 + I_4 = 0$$

$$\text{B: } I_5 - I_2 - I_3 = 0$$

missä

$$I_1 = (E - U_A)/R_1 \quad I_4 = U_A/R_4$$

$$I_2 = (U_A - U_B)/R_2 \quad I_5 = U_B/R_5$$

$$I_3 = (E - U_B)/R_3$$

Näin solmuista A ja B lähtevien virtojen summat saadaan muotoon

$$G_1(U_A - E) + G_4 U_A + G_2(U_A - U_B) = 0 \quad (3.8-1)$$

$$G_3(U_B - E) + G_5 U_B + G_2(U_B - U_A) = 0$$

josta vakiot oikealle puolelle siirtämällä saadaan selkeä matriisimuoto

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 E \\ G_3 E \end{bmatrix} \quad (3.8-2)$$

Huomaa, että tulos on aivan sama kuin jos jännitelähteen ja vastuksen sarjaankytkennät E-R1 ja E-R3 olisi muutettu häviöllisiksi virtalähteiksi ja liitetty ne solmuihin A ja B.

Esimerkki: Transistorivahvistin

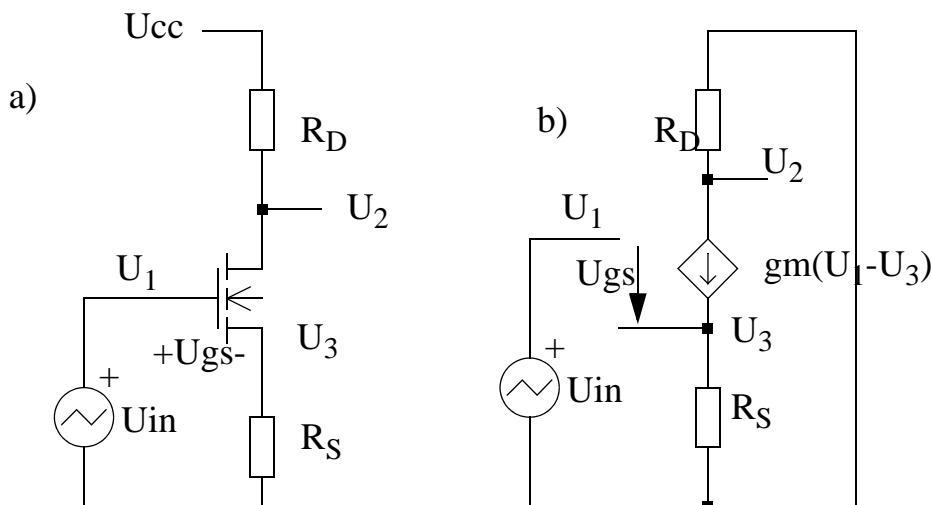
Kuvan a) MOSFET-vahvistimelle voidaan esittää kuvan b) linearisoitu piensignaali malli, jossa jänniteohjattu virtalähde g_m kuvaa transistorin virran riippuvuutta ohjausjännitteestä $U_{GS} = (U_1 - U_3)$. Johdetaan kytkennän jännitevahvistus U_2 / U_{in} :

$$\begin{bmatrix} G_D & 0 \\ 0 & G_S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_m \cdot (U_1 - U_3) \\ g_m \cdot (U_1 - U_3) \end{bmatrix} \quad (3.8-3)$$

$$\begin{bmatrix} G_D & -g_m \\ 0 & G_S + g_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_m \cdot U_1 \\ g_m \cdot U_1 \end{bmatrix} \quad (3.8-4)$$

josta ratkaisemalla (jännite $U_1 = U_{in}$ saa tunnettuna suurena jäädä tunnettujen suureiden sarakkeeseen) saadaan ns. **mitoituskaava**

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{\begin{vmatrix} -g_m \cdot U_{in} & -g_m \\ g_m \cdot U_{in} & G_S + g_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_D & -g_m \\ 0 & G_S + g_m \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-g_m \cdot U_{in} \cdot (G_S + g_m - g_m)}{G_D \cdot G_S + g_m \cdot G_D} \\ &= \frac{-g_m \cdot R_D \cdot U_{in}}{1 + g_m \cdot R_S} \end{aligned} \quad (3.8-5)$$



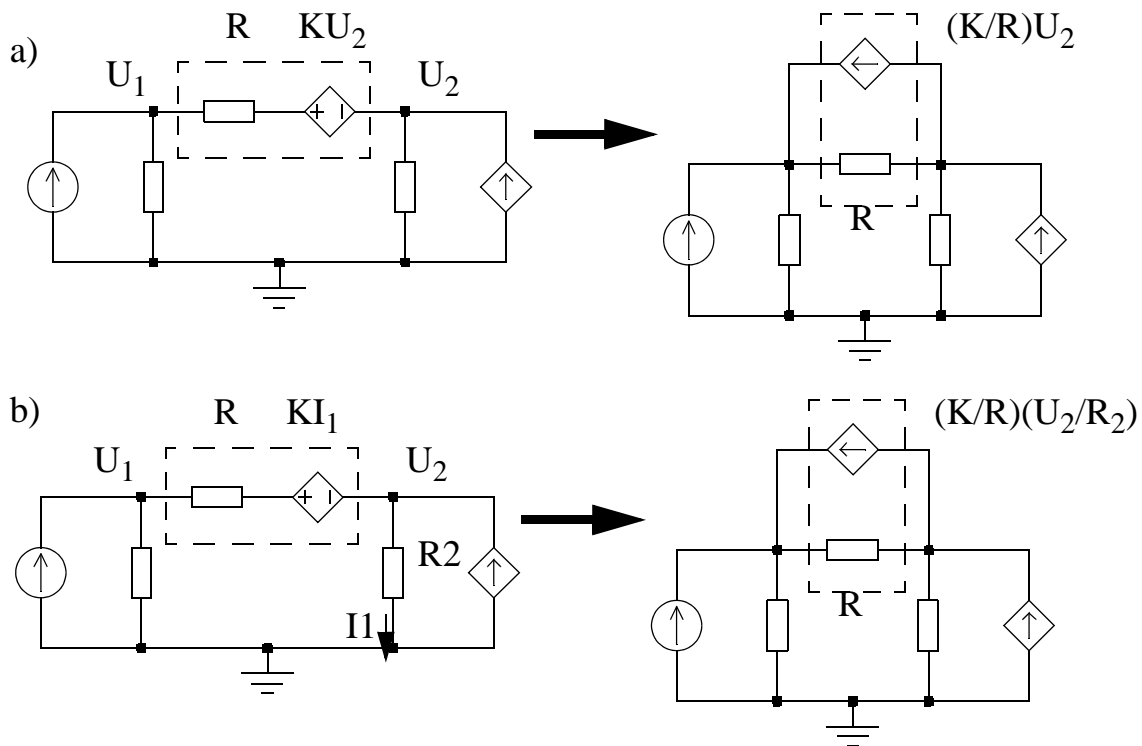
Jännitelähteen muuttaminen virtalähteeksi

Toinen tapa käsitellä jännitelähteitä solmupiste-esityksessä on muuntaa ne sopivan sarjaresistanssin kanssa häviöllisiksi virtalähteiksi. Muunnoksessa sijaiskytkentä lasketaan alkuperäisestä seuraavasti (ks. kuva a). Muista suunta: **nuolen kärki jännitelähteen plussan suuntaan** !

$$I_N = U_T / R_T \quad \text{ja} \quad R_N = R_T$$

Ohjauksen tyypin muuttaminen

Solmupistemethodessa voidaan käsitellä vain solmujännitteillä ohjattuja lähteitä. Kuvan b) lähdettä ohjaa vastuksen R_2 läpi kulkeva virta I_1 , ja tämä ohjaus on muutettava solmujänniteohjaukseksi, mikä käy toteamalla, että $I_1 = U_2/R_2$. Samalla lähde on muutettu jännitelähteestä virtalähteeksi samalla tavoin kuin kuvassa a).



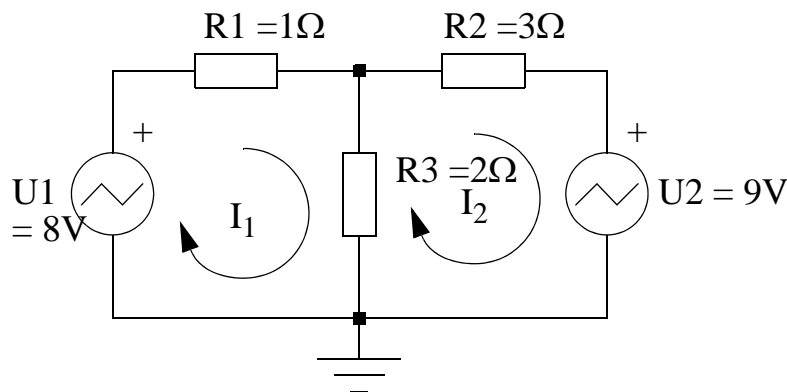
3.9 Silmukkavirtamenetelmä

Silmukkavirta-analyysi (MA, Mesh Analysis) pohjaa KVL:n käyttöön: siinä lasketaan jännitehäviöitä ja -nousuja verkon suljettujen silmukoiden ympäri. Verkosta etsitään riippumattomat (ei-sisäkkäiset) silmukat ja tarkastellaan jännitemuutoksia, kun kierretään silmukan ympäri. Systemaattisuuden vuoksi sovitaan, että kaikki silmukat kierretään samaan suuntaan (**myötäpäivään**).

Kun ei-sisäkkäiset silmukat on tunnistettu, numeroidaan silmukoiden virrat ja muodostetaan niitä käyttäen Kirchhoffin jännitelain mukaiset yhtälöt silmukoille. Yhtälöissä kerätään jännitelähteet yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle (jännitenousut merkitään positiivisina ja jännitelaskut negatiivisina) ja resistansseissa tapahtuvat jännitemuutokset toiselle puolelle siten, että jos virta kulkee komponentin läpi silmukan kiertosuuntaan, häviö merkitään positiiviseksi ja muutoin negatiiviseksi:

(3.9-1)

$$\begin{aligned} \text{Silmukka 1:} \quad & I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_3 = U_1 \\ \text{Silmukka 2:} \quad & (I_2 - I_1) R_3 + I_2 R_2 = -U_2 \end{aligned}$$



$$R \cdot I = U$$

$$[\Omega] \cdot [A] = [V]$$

Kootaan jälleen yhtä muuttujaa (silmukkavirtaa) vastaavat termit yhteen, jolloin

(3.9-2)

$$\begin{aligned} \text{Silmukka 1:} \quad & I_1(R_1 + R_3) - I_2 R_3 = U_1 \\ \text{Silmukka 2:} \quad & -I_1 R_3 + I_2(R_3 + R_2) = -U_2 \end{aligned}$$

josta saadaan suoraan matriisimuodoksi

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ -U_2 \end{bmatrix} \quad (3.9-3)$$

Silmukavirtayhtälöiden matriisimuodon kirjoittamiselle saadaan siis seuraavat ohjeet:

- Valitaan ei-sisäkkäiset silmukat ja merkitään silmukavirrat I_i siten, että silmu-koissa kierretään aina **myötäpäivään**.
- Lasketaan herätevektoriin yhteen silmukassa i olevat jännitelähteet. Jos silmukkaa myötäpäivään kierrettäessä jännite lähteen kohdalla nousee (so. silmukavirta tulee ulos jännitelähteen +navasta), lähde merkitään positiivisena, ja jos laskee, lähde merkitään negatiivisena.
- Kerroinmatriisiin kerätään silmukan varrella olevat resistanssit siten, että diagonaalelementille r_{ii} tulee kaikkien silmukan varrella olevien resistanssien summa. Ei-diagonaalilla (elementiksi r_{ij}) merkitään silmukoiden i ja j välissä olevat resistanssit miinusmerkkisinä. Jos verkossa ei ole ohjattuja lähteitä, $r_{ij} = r_{ji}$, eli kerroinmatriisi on lävistäjän suhteen symmetrinen.

Esim.

Edellisen sivun esimerkissä $R_1=1\Omega$, $R_2=3\Omega$, $R_3=2\Omega$, $U_1=8V$ ja $U_2=9V$.

Matriisiesitykseksi tulee

$$\begin{bmatrix} 1+2 & -2 \\ -2 & 3+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix} \quad (3.9-4)$$

Kerroinmatriisin determinantin arvo on $(3) \cdot (5) - (-2) \cdot (-2) = 11$. I_1 ja I_2 ovat Cramerin sääntöä käyttäen

$$I_1 = \frac{1}{11} \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} = \frac{8 \cdot 5 - (-2) \cdot (-9)}{11} = \frac{22}{11} = 2 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{1}{11} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} = \frac{3 \cdot (-9) - (-2) \cdot 8}{11} = -1 \text{ A} \quad (3.9-5)$$

I_2 :n negatiivinen arvo tarkoittaa sitä, että todellinen virta silmukassa 2 kiertää vastapäivään. Virta esimerkiksi vastuksen R_3 läpi on $I_1 - I_2 = 3 \text{ A}$.

3.10 Ohjatut lähteet silmukkavirtamenetelmässä

Solmupistemethodelmässä kerroinmatriisiin kyettiin sisällyttämään virtalähteitä, joita ohjattiin solmujännitteillä. Vastaavasti silmukkavirtamenetelmässä lähteen on aina oltava jännitelähtöinen, ja ohjattu lähde voidaan siirtää kerroinmatriisiin vain jos se voidaan esittää silmukkavirtojen avulla. Niinpä lähteille on silmukkavirtamenetelmää käytettäessä aina tehtävä seuraavat operaatiot:

- Muunna lähde niin, että se on jännitelähtöinen
- Muunna ohjatun lähteen ohjaus siten, että se voidaan lausua jonkin silmukkavirran avulla.

Esim.

Seuraavan sivun kuvassa a) lähde $0.5u_2(t)$ on solmujännitteellä u_2 ohjattu virtalähde, jolloin se ei sen paremmin lähtötyyppinsä kuin ohjaustapansaakaan perusteella sovellu silmukkavirtaesitykseen.

Aloitetaan muuttamalla $0.5u_2(t)$ virtalähde ja sen rinnalla oleva 3Ω resistanssi jännitelähteeksi, jolloin saadaan kuvan b) kytkentä, jossa lähde $1.5u_2(t)$ on nyt korvannut silmukkavirtamuotoon soveltumattoman virtalähteen. Lähteen ohjaustapa on edelleen väärä, joten solmujännite u_2 on esitettävä silmukkavirtojen I_1 ja I_2 avulla. Havaitaan, että

$$u_2 = 2\Omega \cdot (I_1 - I_2) \quad (3.10-1)$$

mikä sijoittamalla kuvan b) kytkentään saadaan kuvan c) kytkentä. Tälle voidaan nyt kirjoittaa matriisimuotoiset yhtälöt

$$\begin{bmatrix} 1+2 & -2 \\ -2 & 2+3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \cdot (I_1 - I_2) - 4 \end{bmatrix} \quad (3.10-2)$$

josta

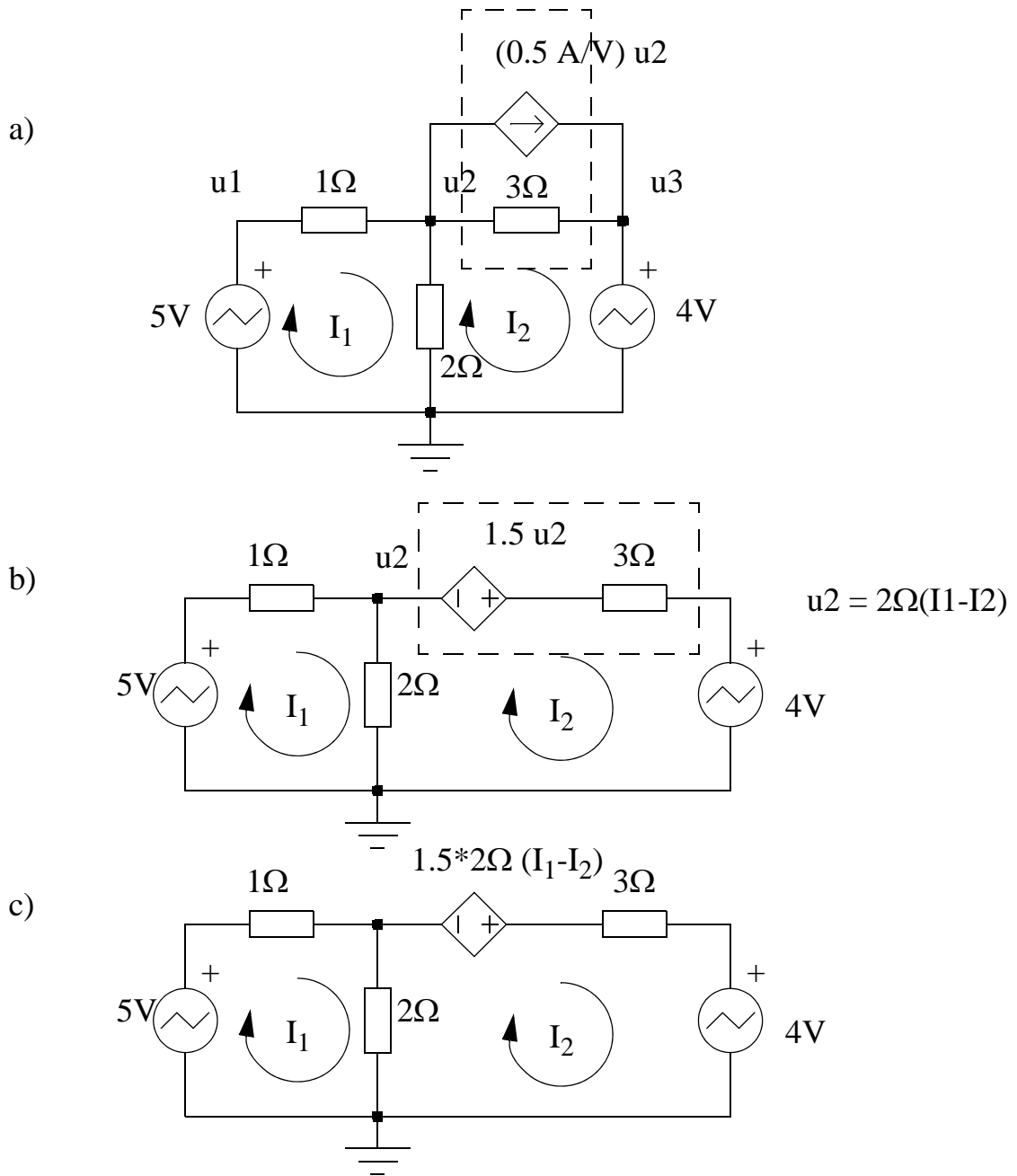
$$\begin{bmatrix} 1+2 & -2 \\ -2-3 & 2+3+3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (3.10-3)$$

Kerroinmatriisin determinantti on $(3) \cdot (8) - (-2) \cdot (-5) = 14$ ja

$$I_1 = \frac{1}{14} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = \frac{8 \cdot 5 - (-2) \cdot (-4)}{14} = \frac{32}{14} \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{1}{14} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = \frac{3 \cdot (-4) - (-5) \cdot 5}{14} = \frac{13}{14} \text{ A}$$

(3.10-4)



Yhteenveto:

Solmupisteyhtälöiden muodostaminen

- Jos verkossa on jännitelähteitä, muuta ne virtalähteiksi sopivan sarjaresistanssin avulla. Vaihtoehtoisesti yhtälöryhmään on sijoitettava tieto, että jännitelähteen päässä olevan solmun jännite ei ole riippumaton vaan jännitelähteen kiinteästi asettama (esim. $V_1 = V_2 + 3V$, jos solmujen 1 ja 2 välissä on 3V jännitelähde)
- Tunnista ja numeroi solmupisteet. Sovi yksi solmupiste maaksi (0 V).
- Kirjoita konduktanssimatriisi: diagonaalelementeiksi g_{ii} tulee kaikkien solmuun i liittyvien konduktanssien summa ja elementiksi g_{ij} tai g_{ji} solmujen i ja j väliset konduktanssit miinusmerkkisenä.
- Kirjoita yhtälöryhmän oikealle puolelle solmuun liittyvät virtalähteet. Tuleva virta on plus- ja lähtevä miinusmerkkistä.
- Jos lähteet ovat ohjattuja, tarkista ovatko ne solmujännitteillä ohjattuja. Jos ei, esitä ohjaus solmujännitteen avulla.
- Siirrä ohjatut lähteet konduktanssimatriisin osaksi.
- Ratkaise yhtälöryhmästä solmujännitteet

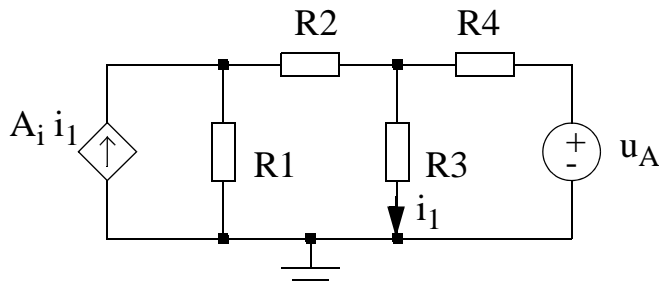
$$G \cdot u = i \quad (3.10-5)$$

Silmukkavirtayhtälöiden muodostaminen

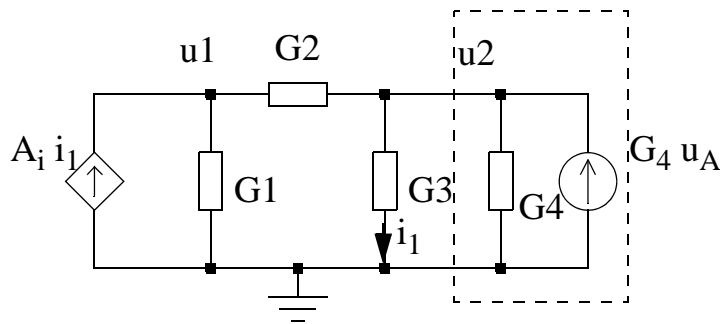
- Jos verkossa on virtalähteitä, muuta ne jännitelähteiksi sopivan rinnakkaisvastuksen avulla.
- Tunnista ja numeroi ei-sisäkkäiset silmukat. Merkitse kaikki silmukkavirrat kiertämään myötäpäivään.
- Kirjoita resistanssimatriisi: diagonaalelementeiksi r_{ii} tulee kaikkien silmukan i kehällä olevien resistanssien summa ja elementiksi r_{ij} tai r_{ji} silmukoiden i ja j yhteisellä rajalla olevat resistanssit miinusmerkkisenä.
- Kirjoita yhtälöryhmän oikealle puolelle solmuun liittyvät jännitelähteet. Jos silmukkavirta kiertää lähteen läpi niin että se tulee ulos plus-navasta, jännite laskeetaan positiivisena, muutoin negatiivisena.
- Jos lähteet ovat ohjattuja, tarkista ovatko ne silmukkavirralla ohjattuja. Jos ei, esitä ohjaus silmukkavirtojen avulla.
- Siirrä ohjatut lähteet resistanssimatriisin osaksi.
- Ratkaise yhtälöryhmästä silmukkavirrat.

$$R \cdot i = u \quad (3.10-6)$$

Esim. Saman piirin ratkaiseminen kummallakin tavalla



Alkuperäinen piiri



Solmupistemethodään sopiva piiri

Solmupistemethodä:

Muutetaan u_A ja R_4 häviölliseksi virtalähteeksi ja kirjoitetaan solmuihin tulevat virtalähteet oikealle ja vastusten läpi kulkevat virrat vasemmalle

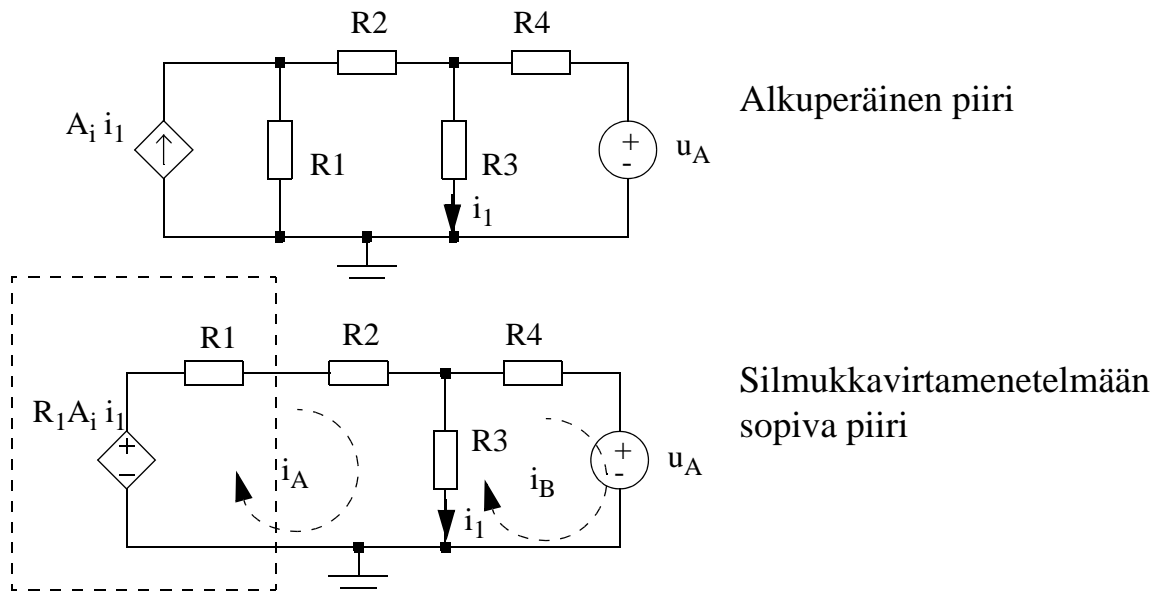
$$\begin{aligned} G_1 \cdot u_1 + G_2 \cdot (u_1 - u_2) &= A_i \cdot i_1 \\ (G_3 + G_4) \cdot u_2 + G_2 \cdot (u_2 - u_1) &= u_A / R_4 \end{aligned} \quad (3.10-7)$$

josta havaitsemalla, että $i_1 = u_2 / R_3 = G_3 u_2$ saadaan matriisimuoto, jossa ohjatut lähteet on esitetty solmujännitteiden avulla

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i G_3 u_2 \\ G_4 u_A \end{bmatrix} \quad (3.10-8)$$

Tällöin ohjatun virtalähteen vaikutus voidaan siirtää vasemmalle puolelle osaksi admittanssimatriisia (so. solmujännitteiden kertoimiksi).

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 - A_i G_3 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_4 u_A \end{bmatrix} \quad (3.10-9)$$

Silmukkvirtamenetelmä:

Muutetaan nyt virtaohjattu virtalähde ja R_1 häviölliseksi jännitelähteeksi ja kirjoitetaan silmukkvirtayhtälöt

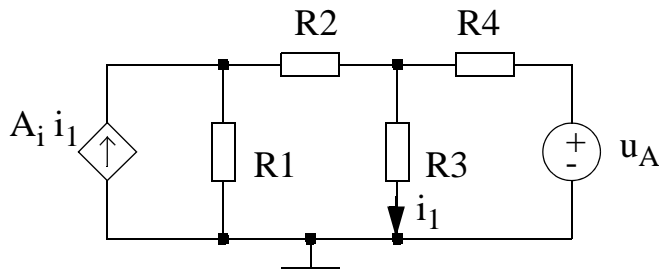
$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) \cdot i_A + R_3 \cdot (i_A - i_B) &= A_i \cdot i_1 \cdot R_1 \\ R_3 \cdot (i_B - i_A) + R_4 \cdot i_B &= -u_A \end{aligned} \quad (3.10-10)$$

Tästä huomaamalla että $i_1 = i_A - i_B$ saadaan ohjaus lausuttua silmukkvirtojen avulla

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i R_1 (i_A - i_B) \\ -u_A \end{bmatrix} \quad (3.10-11)$$

jolloin ohjattu lähde voidaan jälleen siirtää osaksi impedanssimatriisia.

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 - A_i R_1 & -R_3 + A_i R_1 \\ -R_3 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -u_A \end{bmatrix} \quad (3.10-12)$$

Esim. Sama lukuarvoilla

$$\begin{aligned} R_1 &= 2\Omega & A_i &= 3 \text{ [A/A]} \\ R_2 &= 1\Omega & u_A &= 2\text{V} \\ R_3 &= 3\Omega \\ R_4 &= 1\Omega \end{aligned}$$

Silmukavirta-analyysi:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 - A_i R_1 & -R_3 + A_i R_1 \\ -R_3 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -u_A \end{bmatrix} \quad (3.10-13)$$

lukuarvot sijoittaen

$$\begin{bmatrix} 2 + 1 + 3 - 3 \cdot 2 & -3 + 3 \cdot 2 \\ -3 & 3 + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (3.10-14)$$

josta $\det(R) = 9 \text{ ohm} \cdot \text{ohm}$ ja $i_A = 2/3 \text{ A}$, $i_B = 0 \text{ A}$

Solmupisteanalyysi:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 - A_i G_3 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_4 u_A \end{bmatrix} \quad (3.10-15)$$

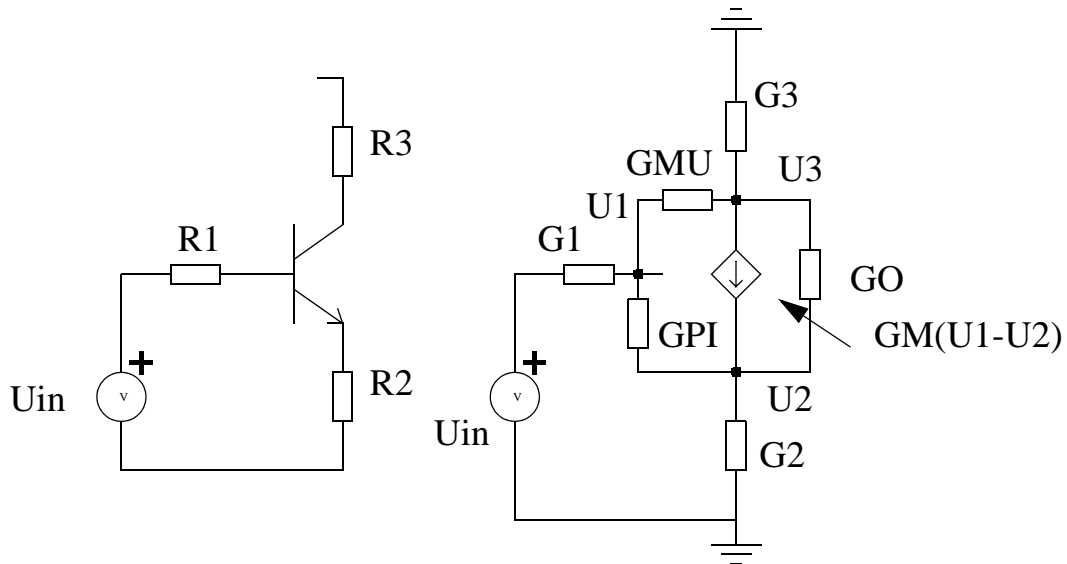
lukuarvot sijoittaen

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} - 3 \cdot \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -1 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/1 \end{bmatrix} \quad (3.10-16)$$

josta $\det(G) = 1.5 \text{ S} \cdot \text{S}$ ja $u_1 = 2 \frac{2}{3} \text{ V}$, $u_2 = 2 \text{ V}$

3.11 Vielä muutamia esimerkkejä

Transistorivahvistin (ks. myös luku 4.2 !!)



Muodostetaan virtojen summat solmuille 1, 2 ja 3:

$$\begin{aligned} G1(U1-U_{in}) + GPI(U1-U2) + GMU(U1-U3) &= 0 \\ GPI(U2-U1) + G2(U2-0) + GO(U2-U3) &= GM(U1-U2) \\ GMU(U3-U1) + G3(U3-0) + GO(U3-U2) &= -GM(U1-U2) \end{aligned}$$

Tästä

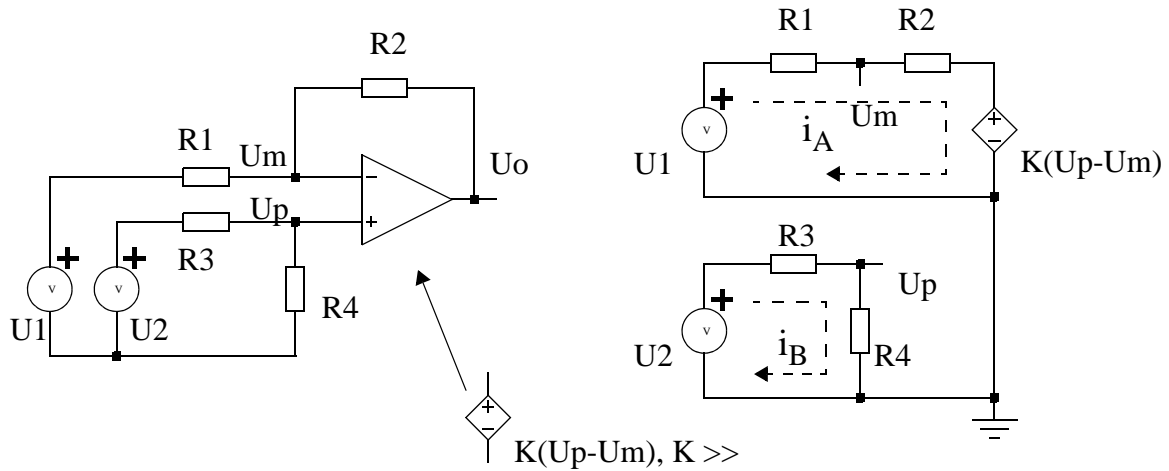
$$\begin{bmatrix} G1 + GPI + GMU & -GPI & -GMU \\ -GPI & GPI + G2 + GO & -GO \\ -GMU & -GO & GMU + G3 + GO \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G1U_{in} \\ GM(U1 - U2) \\ -GM(U1 - U2) \end{bmatrix}$$

ja siirtämällä GM-termit kerroinmatriisiin

$$\begin{bmatrix} G1 + GPI + GMU & -GPI & -GMU \\ -GPI - GM & GPI + G2 + GO + GM & -GO \\ GM - GMU & -GO - GM & GMU + G3 + GO \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G1U_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yleensä lähtö otetaan pisteestä U3. Jos takaisinkytkentää aiheuttavat komponentit otetaan huomioon (GO, GMU erisuuria kuin nolla), U3:n lausekkeesta tulee melkoisen ruma.

Esim. Differentiaalivahvistin



Kuvassa on operaatiovahvistimella toteutettu differentiaalivahvistin. Jos vahvistinta mallitetaan ideaalisella VCVS-lähteellä, saadaan kuvan b) mukainen sijaiskytkentä, jolle voidaan kirjoittaa kaksi silmukavirtayhtälöä.

$$\begin{bmatrix} R1 + R2 & 0 \\ 0 & R3 + R4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 - K(U_p - U_m) \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (3.11-1)$$

jossa lisäksi $U_p = i_B R_4$ $U_m = U_1 - i_A R_1$, jolloin koko yhtälöryhmäksi tulee

$$\begin{bmatrix} R1 + R2 + KR_1 & KR_4 \\ 0 & R3 + R4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + K)U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (3.11-2)$$

Tästä lähtöjännite on ehkä helpoin ratkaista kaavasta $U_o = U_1 - i_A(R1+R2)$. Kun vielä valitaan $R1=R3$ ja $R2=R4$, U_o on lopulta verrannollinen tulojännitteiden U_2 ja U_1 erotukseen. Tätä kutsutaan differentiaali- tai erovahvistimeksi.

$$U_o = \frac{R_4 \cdot (U_2 - U_1)}{R_3 + (R_3 + R_4)/K} \approx \frac{R_4}{R_3} \cdot (U_2 - U_1) \quad (3.11-3)$$

Sama tulos kuin edellä saadaan myös yhdellä yhtälöllä kirjoittamalla virtojen summa solmulle U_m (resistanssien kautta poistuvat virrat plussana, ei kytkettyjä virtalähteitä):

$$(U_m - U_1)/R_1 + (U_m - K(U_p - U_m))/R_2 = 0 \quad (3.11-4)$$

Yhtälössä oleva toinen tuntematon U_p saadaan suoraan silmukasta B jännitejaon perusteella

$$U_p = U_2 R_4 / (R_3 + R_4) \quad (3.11-5)$$

Näistä saadaan ratkaistua U_m

$$U_m = \frac{R_2(R_3 + R_4)U_1 + KR_1R_4U_2}{(R_3 + R_4)((1 + K)R_1 + R_2)} \quad (3.11-6)$$

ja siitä edelleen $K(U_p - U_m)$:n avulla U_o .

Lausekkeista tulee hieman takkuisia. Myöhemmin analogiatekniikan kursseissa käytetään ns. **virtuaalisen maan käsitettä**, jolla voidaan pelkistää laskutoimituksia, kun $K \gg$, kuten operaatiovahvistimissa käytännössä on tapana. Siinä oletetaan suoraan, että jos $K \gg$ ja U_o maltillisen kokoinen, niin $U_p \sim U_m$, jolloin voimme laskea ensin U_p :n ja sen avulla (olettaen että $U_m = U_p$) U_o :n.

4. VERKKOJEN YKSINKERTAISTAMINEN

4.1 Johdanto

Edellä kuvattua verkkoyhtälöiden systemaattista muodostamista tarvitaan, jos verkko on niin suuri, ettei se “suoraan näkemällä” ratkea. Käytännön suunnittelussa halutaan monesti oikaista, ja siihenkin on tarjolla muutamia keinoja. Tähän mennessä opittuja keinoja voidaan käyttää seuraavasti:

- Laske kaikki rinnan- tai sarjaankytkennät valmiiksi. Tätä voi tehostaa muuntamalla häviöllisiä jännitelähteitä virtalähteiksi tai päinvastoin, jolloin muodostuu uusia sarjaan- tai rinnankytkentöjä.
- Käytä jännite- ja virtajaon kaavaa aina kuin mahdollista

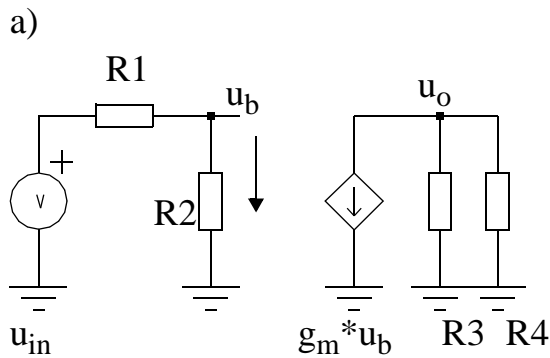
Tässä kappaleessa käydään läpi seuraavat oikaisukeinot:

- Vahvistinkytkennät ovat usein suuntaavia (tulo vaikuttaa lähtöön mutta ei päinvastoin) ja niiden takaisinkytkennät heikkoja, jolloin niiden vasteen voi laskea solmupiste kerrallaan signaalin etenemissuunnassa.
- Superposition käyttö, jossa useiden lähteiden yhteisvaikutusta tutkitaan katsoamalla niiden vaste yksi kerrallaan
- Mielivaltaisen suuren piirin korvaaminen ekvivalenttipiirillä, joka koostuu yhdestä lähteestä ja yhdestä resistanssista.
- Jonkin portin lähtöresistanssin arvioiminen

4.2 Ratkaiseminen solmupiste kerrallaan

Verkkoyhtälöistä voidaan muodostaa yhtälöryhmiä, mutta etenkin vahvistin-suunnittelussa koko yhtälöryhmän kirjoittaminen voidaan usein välttää laskemalla signaalitiellä olevien välipisteiden jännitteet perätysten. Alla on kaksi tyypillistä vahvistinkytkentää, joiden vahvistuksen U_o/U_{in} voi ratkaista tällä tavoin pala kerrallaan.

Paloittain ratkaiseminen onnistuu, jos verkossa ei ole runsaasti takaisinkytkentöjä. Kuvan a) piirissä ei ole lainkaan takaisinkytkentään, kuvan b) kytkennässä RE:n aiheuttaman takaisinkytkennän vaikutus piti purkaa, jotta i_{gm} saatiin ratkaistu. Jos verkossa on runsaasti takaisinkytkentöjä, eri solmujen yhtälöitä ei voi erottaa toisistaan näin helposti, vaan koko piiriä kuvaava yhtälöryhmä on kirjoitettava ja ratkaistava yhdellä kertaa. Tämä onnistuu luontevimmin matriisimuodossa.



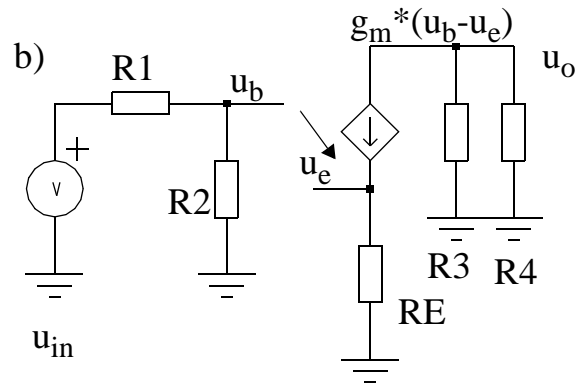
$$u_b = \frac{R2}{R1 + R2} \cdot u_{in}$$

$$i_{gm} = g_m \cdot u_b$$

$$u_o = -(g_m \cdot u_b) \cdot (R3 \parallel R4)$$

$$= -g_m \cdot (R3 \parallel R4) \cdot \frac{R2 \cdot u_{in}}{R1 + R2}$$

$$R3 \parallel R4 = \frac{R3 \cdot R4}{R3 + R4}$$



$$u_b = \frac{R2}{R1 + R2} \cdot u_{in}$$

$$i_{gm} = g_m \cdot (u_b - u_e)$$

$$u_e = RE \cdot i_{gm}$$

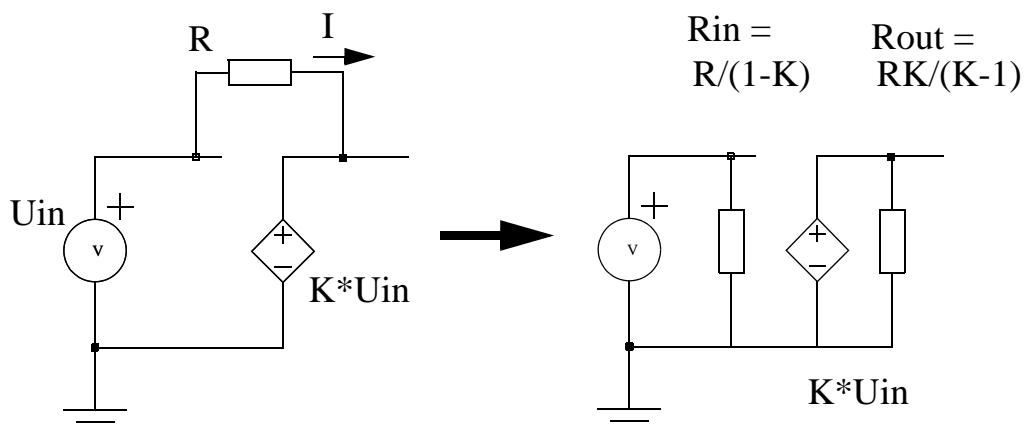
$$i_{gm} = \frac{g_m \cdot u_b}{1 + g_m \cdot RE}$$

$$u_o = -(R3 \parallel R4) \cdot i_{gm}$$

$$= \left(\frac{-g_m \cdot (R3 \parallel R4)}{1 + g_m \cdot RE} \cdot \frac{R2 \cdot u_{in}}{R1 + R2} \right)$$

4.3 Millerin teoreema

Vailla takaisinkytkentöjä olevien piirien aste kerrallaan laskeminen on niin tehokasta, että takaisinkytkentöjä mieluusti jopa puretaan laskennan helpottamiseksi. Tässä yleisin keino on Millerin teoreema, jolla jännitevahvistimen yli oleva resistanssi tai kapasitanssi korvataan tulon ja lähtöön sijoitetulla maatetulla komponentilla.



Kuvassa vasemmalla on takaisinkytkentävästus R jänniteohjatun jännitevahvistimen yli. Vahvistimen tulossa on jännite U_{in} ja lähdössä $K \cdot U_{in}$, joten vastuksessa kulkee virta

$$I = \frac{U_{in} - K \cdot U_{in}}{R} = \frac{(1 - K) \cdot U_{in}}{R} \quad (4.3-1)$$

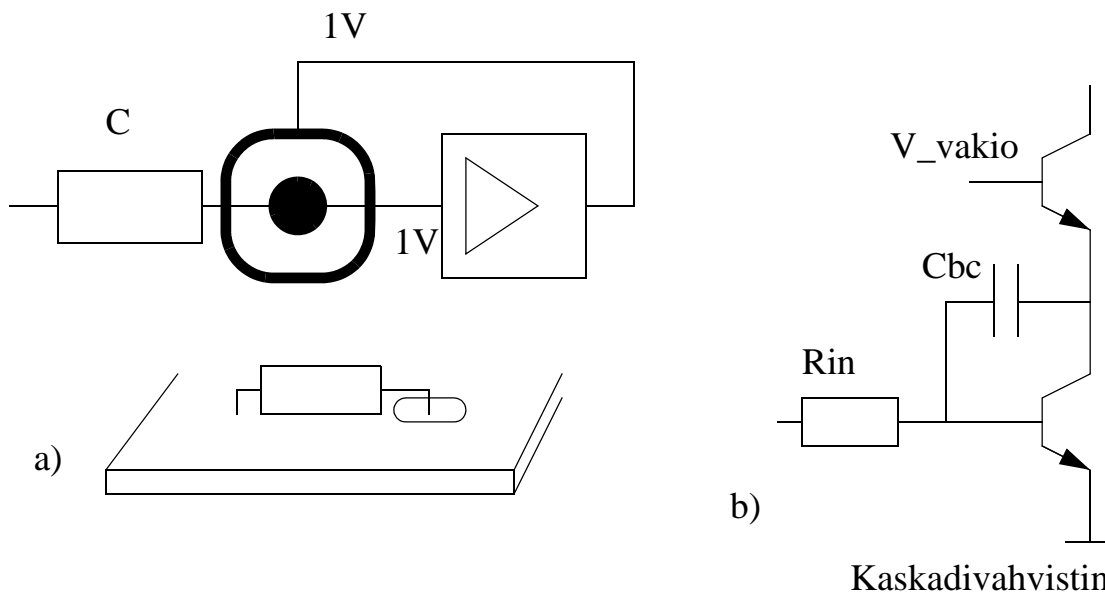
Näin vahvistimen tulo- ja lähtöpuolelta katsottuna resistanssi näyttää seuraavilta

$$R_{in} = \frac{U_{in}}{I} = \frac{R}{(1 - K)} \quad R_{out} = \frac{K \cdot U_{in}}{-I} = \frac{K \cdot R}{(K - 1)} \quad (4.3-2)$$

Tämä on approksimaatio ja hukkaa osan piirin toimintaan liittyvästä tiedosta (etenkin sen mahdollisuuden, että signaali voi edetä suoraan vahvistimen ohi vastusta pitkin), mutta sillä on monia käyttösovelluksia. Esimerkiksi kääntävän vahvistimen yli oleva kapasitanssi näkyy ns. Miller-efektillä kerrottuna $1-K$ -kertaisena, ja toisaalta suoran 1 -vahvistimen yli olevan komponentin vaikutus katoaa kokonaan.

Esim.

Vuotovirtojen vaikutusta pienennetään monesti Miller-efektillä. Kuvassa a) on piirilevyllä asennettu näytteenottokondensaattori, joka vähitellen tyhjenee piirilevyn pintaa pitkin kulkevan vuotovirran kautta (vuotoresistanssi kuivalla piirilevyllä on n. 10 Gohmia (0.1 nA virta voltin jännitteellä). Kun kondensaattorin jännite mitataan ja ajetaan puskurivahvistuksella ($A_u = 1$, eli sama jännite) kondensaattorin jalan ympärillä olevaan johdinrenkaaseen, vuotovirta ei näe jännite-eroa ja kutistuu olemattomiin - Miller-teoreemalla laskien vuotoresistanssin arvo kasvaa äärettömäksi.

**Esim.**

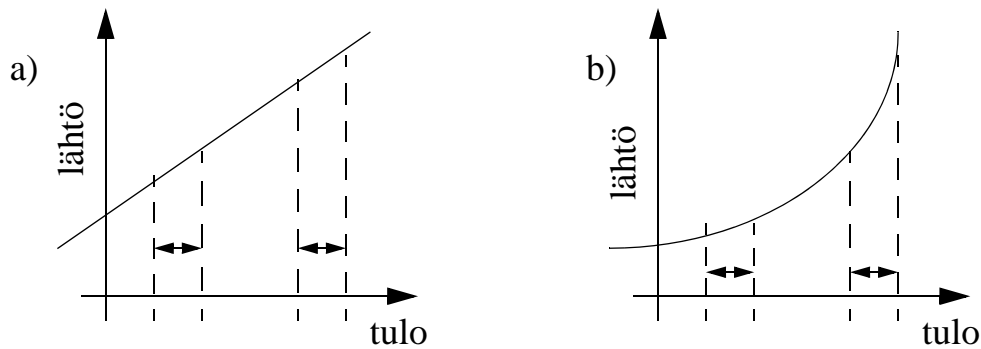
Kapasitiivinen Miller-efekti on yleisimpiä syitä vahvistimen kaistan rajoittumiseen suurilla taajuuksilla. Jos meillä on transistorivahvistin, jolla on kääntävä jännitevahvistus $A_u = -50 \text{ V/V}$, ja sen tulon ja lähdön välillä on pieni hajakapasitanssi $C_{bc} = 1 \text{ pF}$, se näkyy tulosolmuun $1 - A_u$ -kertaisena, eli

$$C_{in} = C_{bc} \cdot (1 - A_u) = 1 \text{ pF} \cdot 51 = 51 \text{ pF}.$$

Miller-kapasitanssia minimoidaan monesti 2-asteisilla kaskadivahvistimilla (kuvassa oikealla), joissa ensimmäisen asteen vahvistus on pienehkö vaikka kokonaisvahvistus on suuri.

4.4 Superpositiomenetelmä

Linearisissa systeemissä (kuva a) tietynsuuruinen lisäys jossakin tulosuureessa aiheuttaa aina suhteessa samansuuruisen lisäyksen lähtösuureessa. Epälineaarisissa systeemeissä (kuva b) näin ei ole, vaan pienen muutoksen vaikutus riippuu sitä, mikä on tulosignaalin arvo.

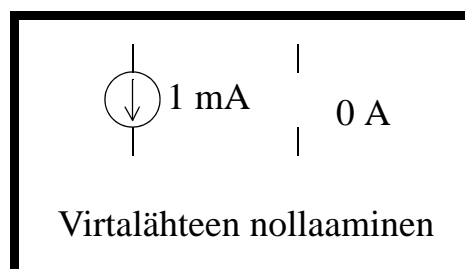
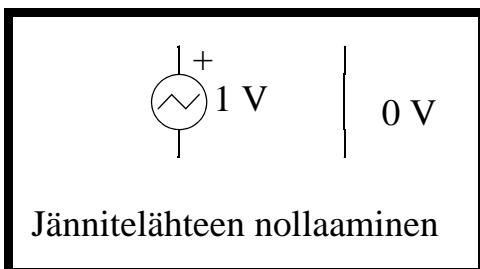


Jos systeemi on lineaarinen tai linearisoitu, em. ominaisuutta voidaan käyttää hyväksi laskennan helpottamiseksi. Tämä kulkee superpositioperiaatteen (kerrostmismenetelmän) nimellä ja kuuluu kokonaisuudessaan näin:

Kun lineaarisessa verkossa on useita riippumattomia lähteitä, niiden yhteisvaikutus saadaan laskemalla yhden lähteen vaikutus kerrallaan ja summaamalla lopuksi kaikkien lähteiden vaikutukset yhteen.

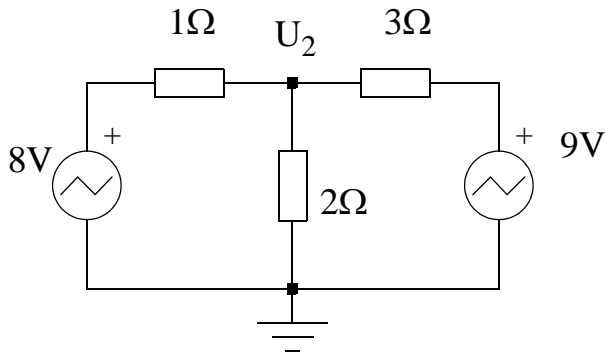
Käytännössä menetellään näin:

- Ohjatut lähteet jätetään verkkoon, mutta riippumattomat lähteet merkitään nolliksi. Jännitelähde korvataan siis oikosululla ($U=0$) ja virtalähde avoimella piirillä eli katkoksella ($I=0$).
- Sijoitetaan riippumattomat lähteet yksi kerrallaan verkkoon ja lasketaan niiden aiheuttama vaste halutussa lähtösuureessa.
- Lopuksi summataan kaikkien lähteiden vaikutukset yhteen.

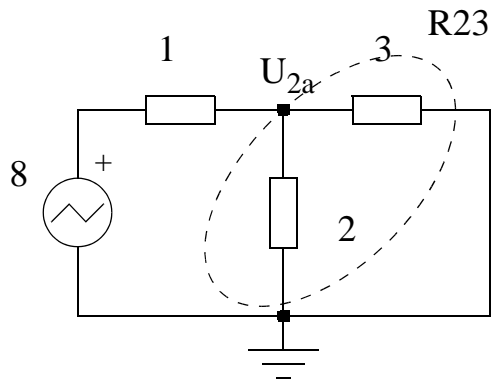


Esim.

Lasketaan superpositioperiaatetta käyttäen oheisesta piiristä jännite U_2 : käsitellään kumpikin lähde erikseen ja ratkaistaan välipisteen jännite vaikkapa jännitejakoa käyttämällä. Lopuksi summataan saadut välipisteen jännitteet yhteen.

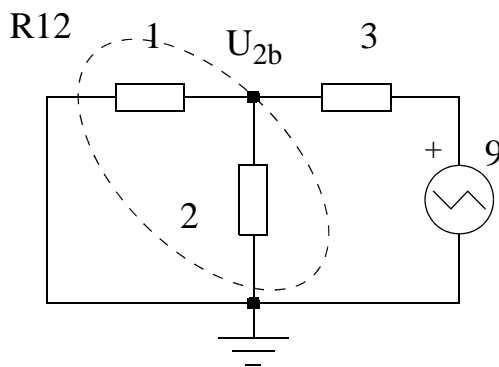


Huom! Ohjattuja lähteitä ei kestä poistaa.



$$R_{23} = (3) \cdot (2) / (2+3) = 6/5 \Omega$$

$$U_{2a} = 8V (R_{23} / (R_{23} + 1\Omega)) \\ = 8V (6/11) = 48/11 V$$

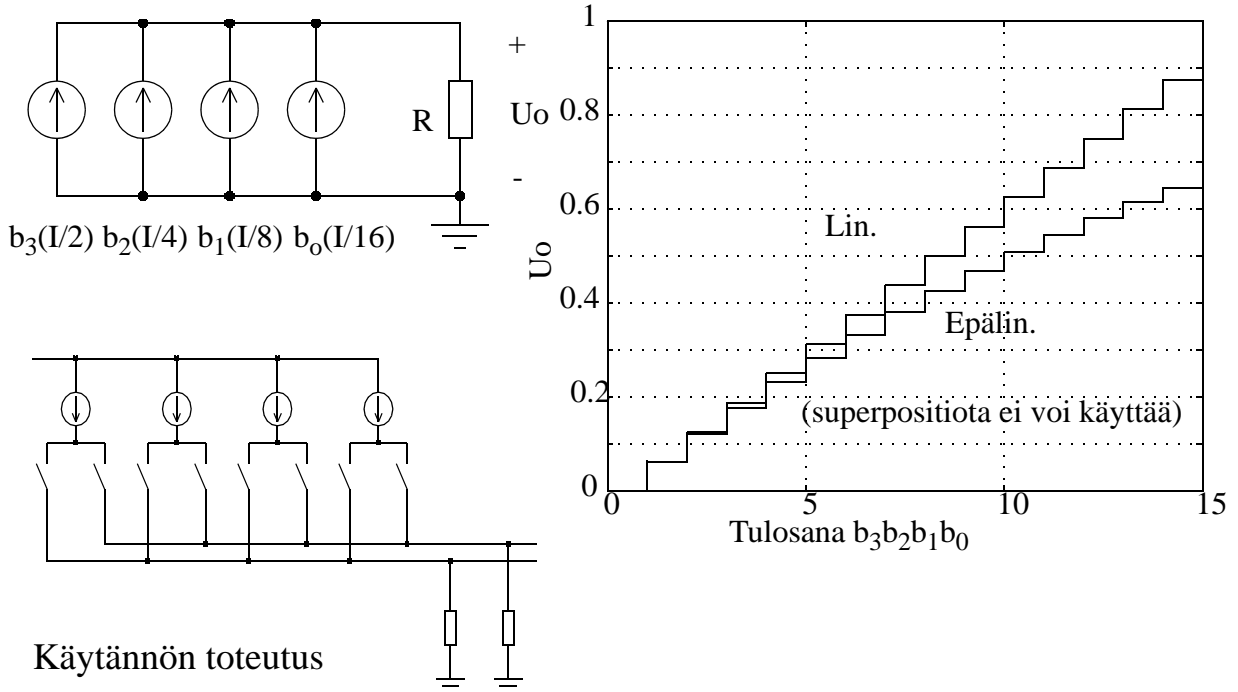


$$R_{12} = (1) \cdot (2) / (1+2) = 2/3 \Omega$$

$$U_{2b} = 9V (R_{12} / (R_{12} + 3\Omega)) \\ = 9V (2/11) = 18/11 V$$

$$U_2 = U_{2a} + U_{2b} = 48/11 + 18/11 = 66/11 = 6V$$

Esim. Digitaali-analogia -muunnin



Kuvan piiri vastaa yleisesti käytettyä virtalähtöistä (current-steering -tyyppistä) D/A-muunninta, jossa binääripainotetut virrat summataan lähtösolmussa, ja virta muutetaan jännitteeksi sopivassa vastuksessa. Superposition perusteella lähtöjännite

$$U_o = R \cdot I \cdot \left(\frac{b_3}{2} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_1}{8} + \frac{b_0}{16} \right) \quad (4.4-1)$$

missä $b_i = 0$ tai 1 . Näin lähtöön saadaan binääriluvulla (biteillä b_0 - b_3) ohjattava jännite.

Muuntimen toiminnan perusajatus on, että kunkin bitin painoarvo on sama riippumatta siitä, mikä on muiden bittien tila - esim. bitti b_1 aiheuttaa aina $IR/8$:n suuruisen lähtöjännitteen muutoksen. Kuvassa on esitetty muuntimen vaste sekä lineaarisessa ($I=1$, $R=1$) että epälinearisessa tapauksessa ($U_o = R(I - 0.3I^2)$). Vertaamalla esim. askelia, joissa tuloksena muuttuu $0 \rightarrow 1$ ja $14 \rightarrow 15$ huomataan, että epälin. tapauksessa vähiten merkitsevän bitin b_0 vaste riippuu muiden bittien tilasta.

4.5 Theveninin ja Nortonin ekvivalenttipiirit

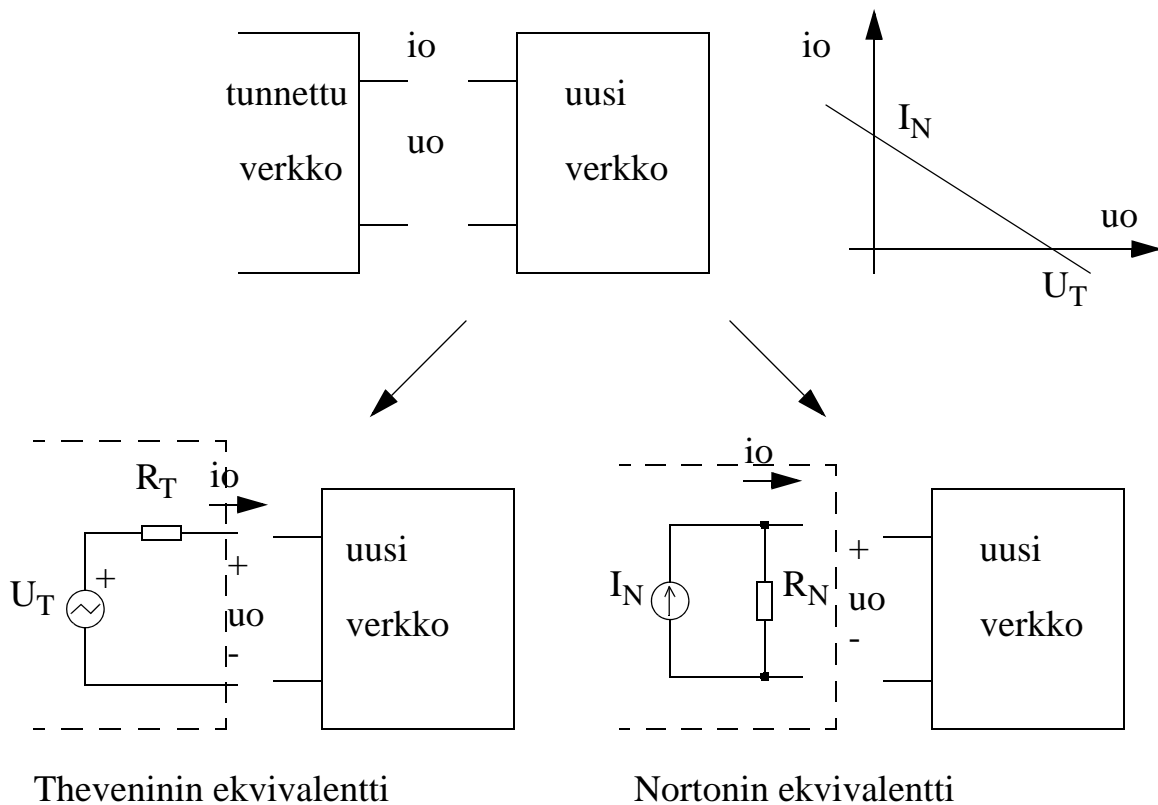
Sähkötekniikassa on usein tarpeen tarkastella, kuinka jokin tunnettu, laajempi kokonaisuus kuormittaa jotakin muuta, yleensä vasta suunnitteilla olevaa osuutta, ts. minkäläisen jännite-virta -riippuvuuden tunnettu verkko aiheuttaa osien rajapintaan. Helpoimmin tämä tapahtuu siten, että tunnettu osakokonaisuus pelkistetään **mahdollisimman yksinkertaiseksi jännite-virta -riippuvuudeksi, jota voidaan lineaaristen verkkojen tapauksessa mallittaa yhdellä häviöllisellä lähteellä.** Mallitustavan mukaan puhutaan joko

- **Theveninin ekvivalenttipiiristä**, jos verkko on mallitettu jännitelähteen ja vastuksen sarjaankytkennällä. Tällöin

$$u_o = U_T - i_o R_T \quad (4.5-1)$$

- **Nortonin ekvivalenttipiiristä**, jos verkko on mallitettu virtalähteen ja vastuksen rinnankytkentänä. Tällöin

$$i_o = I_N - G_N u_o \quad (4.5-2)$$



4.6 Ekvivalenttipiirin muodostaminen

Ekvivalenttipiiri voidaan muodostaa mm. seuraavilla tavoilla:

- mitataan piirin tyhjäkäyntijännite U_{OC} ja oikosulkuvirta I_{SC} . Theveninin ja Nortonin lähteet saadaan nyt seuraavasti:

$$U_T = U_{OC} \quad I_N = I_{SC} \quad R_T = R_N = U_{OC}/I_{SC} \quad (4.6-1)$$

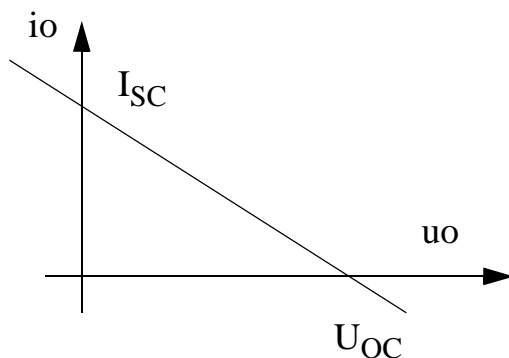
- ajetaan piiriä testivirralla I_O ja mitataan portissa näkyvä jännite U_O virran funktiona. U_O :n vakio-osa antaa tyhjäkäyntijännitteen ja virrasta riippuvan osan kerroin lähtöimpedanssin R_T :

$$U_O = U_T - R_T \cdot I_O \quad (4.6-2)$$

- ajetaan piiriä testijännitteellä U_O ja mitataan portissa näkyvä virta I_O jännitteen funktiona. I_O :n vakio-osa antaa oikosulkuvirran ja jännitteestä riippuvan osan kertoimen käänteisluku lähtöimpedanssin R_T :

$$I_O = I_{SC} - U_O/R_T \quad (4.6-3)$$

- lähtöresistanssi voidaan määrittää myös tutkimalla lähtöportista näkyvää resistanssia: nollataan piirissä olevat lähteet (oikosuljetaan jännitelähteet ja katkaistaan virtalähteet) ja lasketaan lähtöportin pinnien välissä näkyvä resistanssi. Tästä lisää myöhemmin.



Esim. Jännitereferenssi säätövastuksella

Kuvassa a) on 3-napainen säätövastus, jonka keskiliuku voidaan asettaa mihin paikkaan hyvänsä päiden välille, jolloin keskiliulle saadaan säädettävä jännite välillä $0..U_{cc}$. Jos keskiliu'un sijaintia alhaalta alkaen merkitään x :llä ($0 < x < 1$), saadaan kuvan b) mukainen sijaiskytkentä.

Nyt tyhjäkäyntijännite U_{OC} saadaan jännitejaolla kuvan c) kytkennästä:

$$U_{OC} = \frac{xR}{xR + (1-x)R} \cdot U_{cc} = xU_{cc} \quad (4.6-4)$$

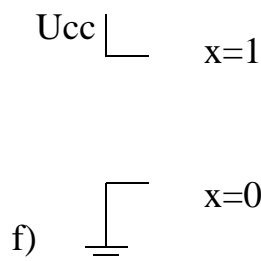
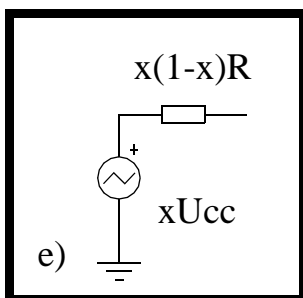
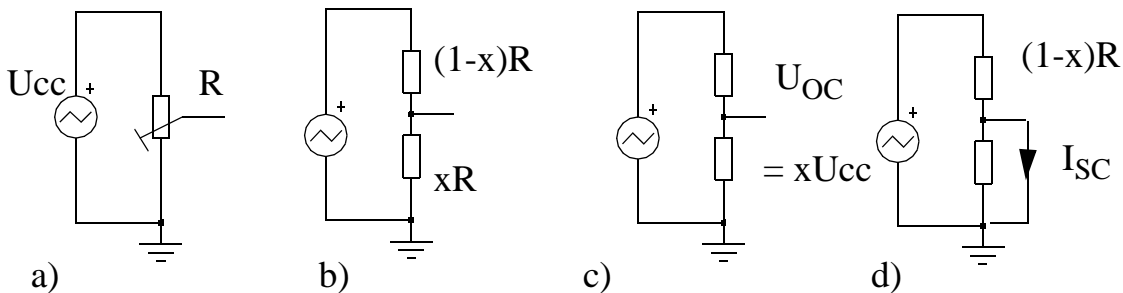
eli lähtöjännite säätyy lineaarisesti. Oikosulkuvirta saadaan kuvan d) kytkennästä:

$$I_{SC} = \frac{U_{cc}}{(1-x)R} \quad (4.6-5)$$

jolloin lähtöresistanssiksi tulee

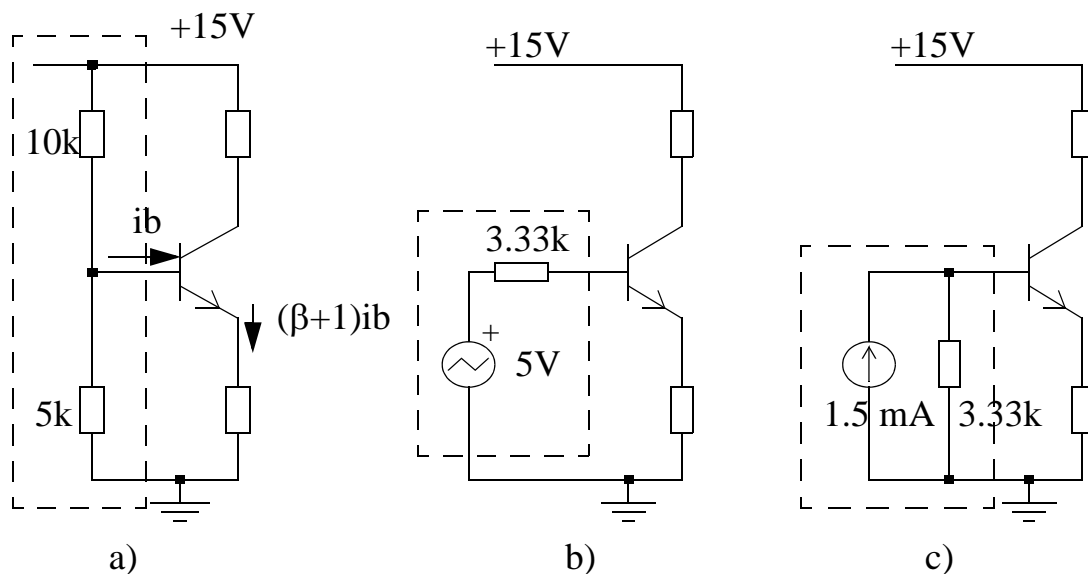
$$R_T = \frac{U_{OC}}{I_{SC}} = x(1-x)R = \frac{(xR) \cdot ((1-x)R)}{xR + (1-x)R} \quad (4.6-6)$$

Trimmerin ekvivalenttipiiri on siis kuvan e) mukainen, ja sen lähtöresistanssi riippuu voimakkaasti trimmerin asetuksesta: se on suurimmillaan $R/4$ kun trimmeri on puolessa välissä ja pienimmillään kuvan f) mukaan 0 kun trimmeri on laidassa.



Esim. Transistorin biasointipiiri

Kuvassa a) on esitetty yksinkertainen vahvistinkytkentä, jonka toimintapiste on asetettu transistorin kannalla olevilla $10\text{k}\Omega$ ja $5\text{k}\Omega$ vastuksilla ja $+15\text{V}$ käyttöjännitteellä. Transistori tarvitsee toimiakseen vastusverkosta pienen kantavirran i_b , jonka suuruus riippuu transistorin virtavahvistuksesta. Niinpä verkko on analysoitava yleensä monella virtavahvistuskertoimen β arvolla. Laskennan helpottamiseksi kantavastukset voidaan korvata vastaavalla Theveninin ekvivalenttipiirillä (b), jolloin transistorin toimintapisteen asettava piiri pelkistyy yhdeksi silmukaksi ja peräkkäisten analyysien teko on paljon helpompaa. Theveninin ekvivalenttipiiri voidaan muuntaa myös Nortonin ekvivalentiksi (c), joskaan se ei tässä tapauksessa helpota analyysia.



Esim. Tyhjäkäyntijännite U_{OC} lasketaan jännitejaolla:

$$U_{OC} = +15\text{V} \cdot 5\text{k} / (10\text{k} + 5\text{k}) = 5\text{V}$$

Oikosulkuvirta lasketaan kytkemällä vastusten välinen piste maahan:

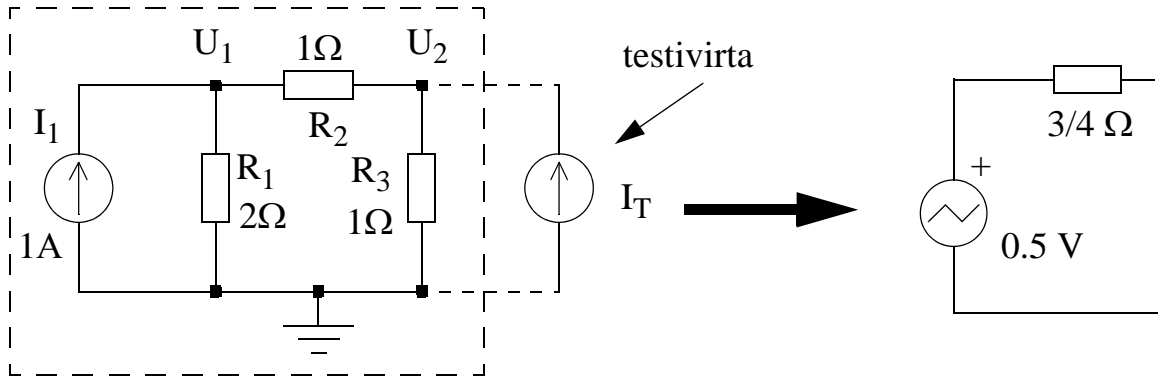
$$I_{SC} = I_N = 15\text{V}/10\text{k} = 1.5 \text{ mA}$$

$$R_N = R_T = U_{OC} / I_{SC} = 5\text{V} / 1.5 \text{ mA} = 3.33 \text{ k}\Omega \quad (= 5\text{k} \parallel 10\text{k})$$

$$(\text{myös näin: } R_T = (5\text{k}) \cdot (10\text{k}) / (5\text{k} + 10\text{k}) = 3.33\text{k})$$

Esim. Testivirran käyttäminen

Muodostetaan piirin I_1 , R_1 - R_3 Theveninin ekvivalentti kiusaamalla piiriä **testivirralla** I_T ja laskemalla U_2 sen funktiona



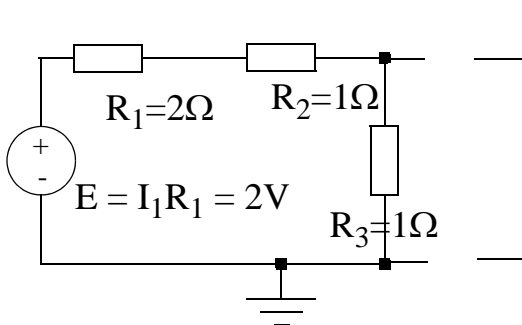
$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_T \end{bmatrix} \quad (4.6-7)$$

Tästä

$$U_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 & I_1 \\ -G_2 & I_T \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{vmatrix}} = \frac{(G_1 + G_2) \cdot I_T + G_2 \cdot I_1}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3} = \frac{\frac{3}{2} \cdot I_T + 1 \cdot 1}{2} \quad (4.6-8)$$

eli lähtöjännitteen Theveninin ekvivalentti voidaan muodostaa 0.5V jännitelähteen ja $3/4$ vastuksen sarjaankytkennällä.

Vaihtoehtoisesti voimme ratkaista tyhjäkäyntijännitteen U_{OC} ja oikosulkuvirran I_{SC} muuttamalla parin I_1 - R_1 jännitelähteeksi E - R_1 :

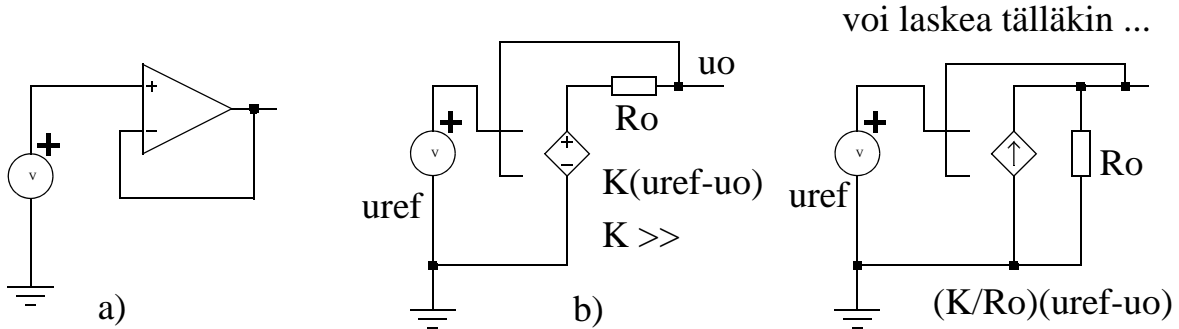


$$U_{OC} = \frac{R_3 \cdot E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{2} V$$

$$I_{SC} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3} A$$

$$R_T = \frac{U_{oc}}{I_{Sc}} = \frac{3}{4} \Omega$$

Esim. Puskurivahvistin



Kuvassa on operaatiovahvistimella toteutettu puskurivahvistin, jolla lisätään referenssijännitteen u_{ref} virranantokykyä (u_{ref} :n lähtöresistanssi voi nyt olla iso). Mallitetaan operaatiovahvistinta jänniteohjatulla jännitevahvistimella VCVS ja sarjaresistanssilla R_o , ja muodostetaan piirin Theveninin ekvivalenttipiiri.

Jos lähtöä u_o ei kuormiteta, $i_o=0$ ja jännitehäviö lähtöresistanssissa $R_o = 0$, jolloin

$$u_o = K \cdot (u_{ref} - u_o), \text{ josta}$$

$$u_o = u_{ref} \cdot \frac{K}{1+K} \quad (4.6-9)$$

eli $u_o < u_{ref}$, mutta jos $K \gg 1$, $u_o \sim u_{ref}$. Sitten lasketaan oikosulkuvirta I_{SC} kytkemällä u_o suoraan maahan, jolloin $u_o=0$ ja jännitelähteen koko jännite näkyy lähtöresistanssin R_o yli. Nyt oikosulkuvirta on

$$I_{SC} = K \cdot (u_{ref}-0) / R_o$$

Näistä voidaan laskea puskurivahvistimen lähtöresistanssi R_T tyhjäkäyntijännitteen U_{OC} ja oikosulkuvirran I_{SC} suhteena

$$R_T = U_{OC}/I_{SC} = R_o/(1+K)$$

eli lähtöjännitteestä otettu takaisinkytkentä pienentää piirin lähtöresistanssia kertoimella $1/(1+K)$. Puskuripiirin Theveninin ekvivalentti on siis seuraava:

$$U_T = \frac{K U_{ref}}{1+K} \quad R_T = \frac{R_o}{1+K} \quad (4.6-10)$$

4.7 “Näkyvä resistanssi”

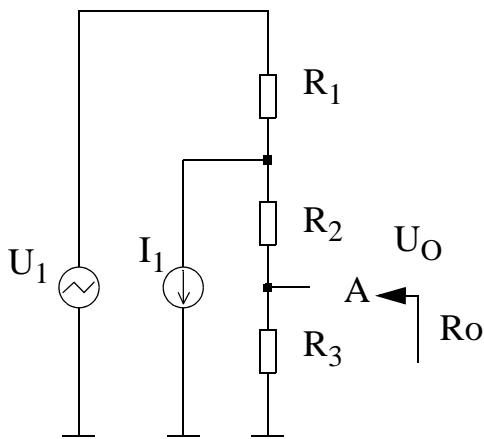
Mm. Theveninin ja Nortonin ekvivalenttipiireissä tarvitaan verkon lähtöresistanssia, s.o. sitä resistanssia, joka lähtöportin pinnien välistä saadaan mitattua eli “näkyvä”. Tämä jossain portissa näkyvä resistanssi voidaan laskea helposti nolllaamalla verkossa olevat riippumattomat lähteet ja katsomalla, mitä lähtöporttiin jää roikkumaan. Kuten superpositio-kappaleessa todettiin, jännitelähde nolllataan oikosulkemalla ja virtalähde nolllataan katkaisemalla verkko siitä kohti.

Esim.

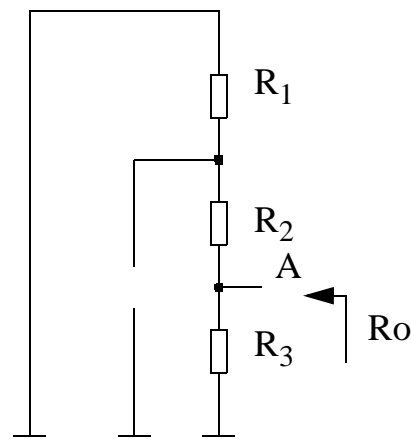
Alla olevassa verkossa solmusta A maahan näkyvä resistanssi saadaan nolllaamalla lähteet ja laskemalla solmun A ja maan välinen resistanssi, joka on

$$R_o = R_3 \parallel (R_1 + R_2),$$

sillä portista A pääsee maahan kahta reittiä: joko vastusten R_1 ja R_2 kautta, tai vastuksen R_3 kautta.



$$U_O = U_1 * R_3 / (R_1 + R_2 + R_3) - I_1 * R_1 / (R_1 + R_2 + R_3) * R_3$$

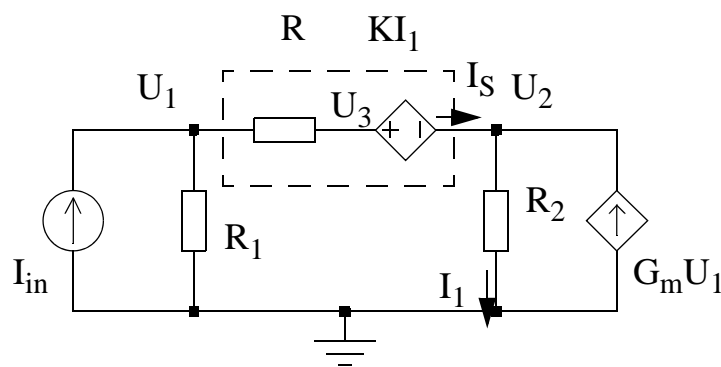


$$R_O = R_3 * (R_1 + R_2) / (R_1 + R_2 + R_3)$$

Esimerkki. Piirin muokkaamisen vaikutus yhtälöryhmän kokoon

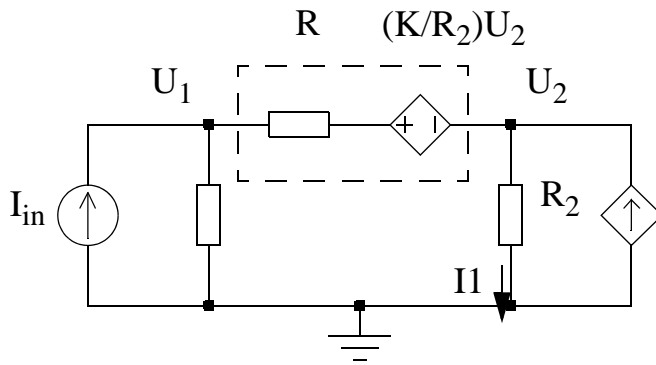
Ohessa on ohjattuja lähteitä sisältävä piiri, joka esitetään ensin modifioituna solmupiste-esityksenä (s.o. siinä muodossa jossa piirisimulaattori sen laskee), mutta muokataan se sitten lähteenmuunnoksilla tavalliseksi solmupiste-esitykseksi. Samalla tuntemattomien määrä pienenee viidestä kahteen.

MNA-muodossa tuntemattomiksi on otettu solmujännitteiden lisäksi jännitelähteiden virrat ja virtaohjattujen lähteiden ohjausvirrat I_S ja I_1 .

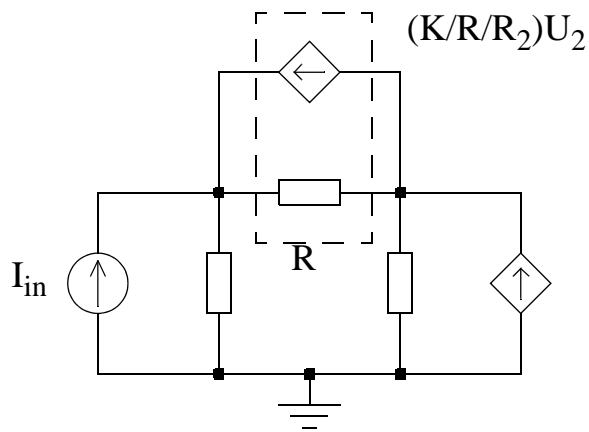


$$\begin{aligned}
 U_1/R_1 + (U_1 - U_3)/R &= I_{in} \\
 U_2/R_2 - I_S &= G_m U_1 \\
 (U_3 - U_1)/R + I_S &= 0 \\
 U_3 - U_2 &= K \cdot I_1 \\
 U_2 &= I_1 R_2
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{bmatrix}
 G_1 + G & 0 & -G & 0 & 0 \\
 -G_m & G_2 & 0 & -1 & 0 \\
 -G & 0 & G & 1 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & -K \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -R_2
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 I_S \\
 I_1
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 I_{in} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Muutetaan seuraavaksi virtaohjattun jännitelähteen ohjaus jännitteen U_2 avulla lausutuksi ($I_1 = U_2/R_2$), jolloin tuntemattomista voi karsia I_1 :n pois. Kun tämän jälkeen vielä muutetaan jännitelähde (sarjaresistanssineen) häviölliseksi virtalähteeksi, voidaan koko piirin toiminta esittää kahdella solmupisteyhtälöllä.



$$\begin{bmatrix} G_1 + G & 0 & -G & 0 \\ -G_m & G_2 & 0 & -1 \\ -G & 0 & G & 1 \\ 0 & -1 - K/R_2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{in} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} G_1 + G & -G - K/(RR_2) \\ -G - G_m & G_2 + G + K/(RR_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. REAKTIIVISET PIIRIELIMET

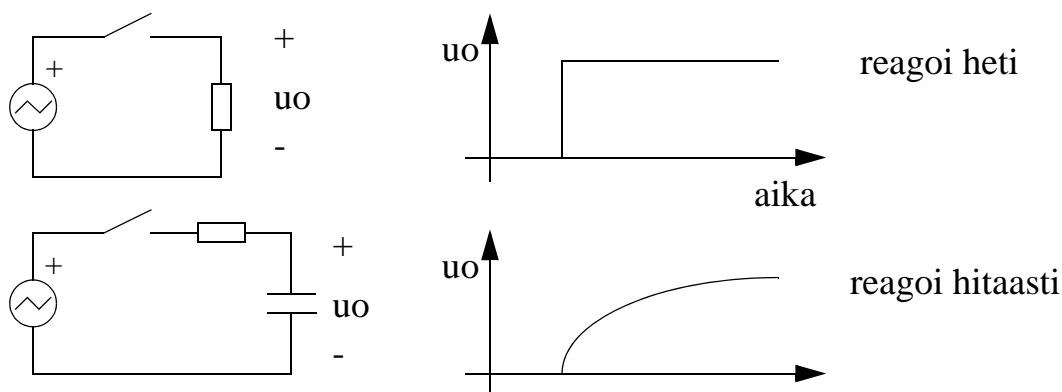
5.1 Johdantoa

Tähän asti on käsitelty pelkästään resistiivisiä verkkoja, joiden yleinen piirre on se, että niillä ei ole **muistia**: jännite- tai virtalähteen arvon muuttaminen vaikuttaa välittömästi solmujännitteiden ja haaravirtojen arvoihin. Näistä poiketen reaktiivisilla piirielimillä eli kapasitansseilla ja induktansseilla on kyky varastoida energiaa, jolloin yksittäisten solmupisteiden aaltomuoto voi poiketa merkittävästi herätteen aaltomuodosta.

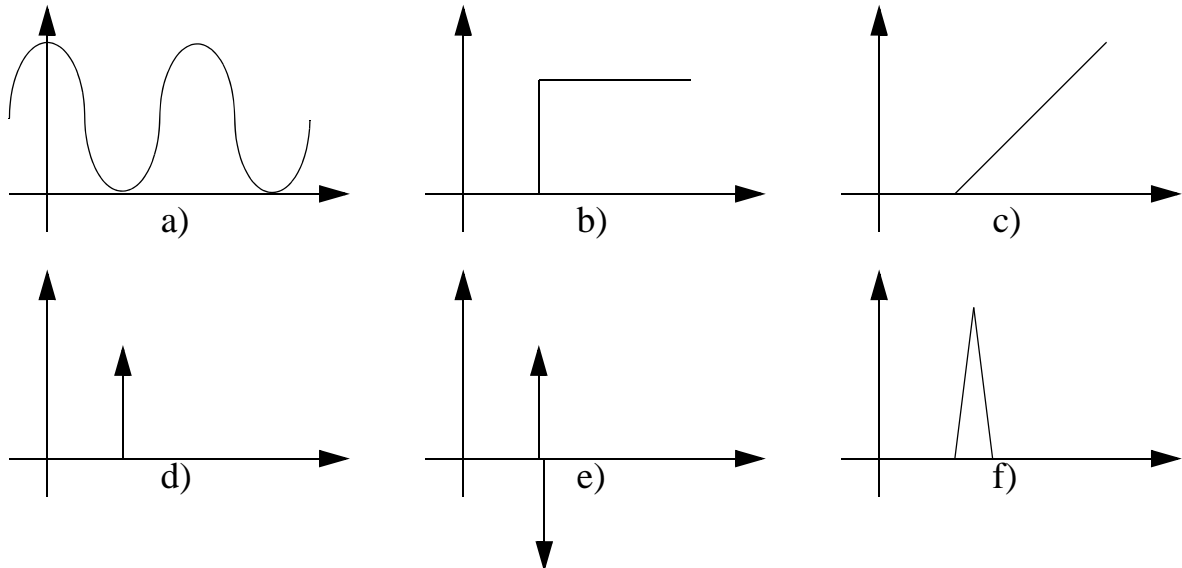
Reaktiivisten piirielinten vaikutus näkyy siten, että niitä sisältävillä verkoilla on nyt herätteestä poikkeavat

- aikavaste (transienttivaste): herätteen muutos aiheuttaa solmujännitteissä ja haaravirroissa vasteen, joka seuraa herätteen muotoa erilaisilla reaktiivisten komponenttien aiheuttamilla **aikavakioilla**.
- taajuusvaste: verkon vaste eritaajuisille sinimuotoisille signaaleille on erilainen, jotkin taajuudet voivat korostua ja jotkin toiset vaimentua.
- vaihe-ero: sinimuotoisilla signaaleilla jännitteen ja virran vaihe ei ole enää sama, vaan virran maksimi voi sattua eri aikaan kuin jännitteen maksimi.

Reaktiivisten piirielementtien käsittely johtaa integraali- ja differentiaaliyhtälöiden käsittelyyn. Linearisissa verkoissa differentiaaliyhtälöt ovat lineaarisia, jolloin niiden analyysi käsin on mahdollista, joskin työlästä. Piiritekniikassa käytetäänkin hyvin usein ns. integraalimuunnoksia (etenkin Laplace-muunnosta), joilla reaktiivisten piirielinten käsittely palautuu samanlaiseksi kuin resistiivisten komponenttienkin. Tällöin edellä käsiteltyjä verkkojen analyysimenetelmiä voidaan käyttää myös reaktiivisten verkkojen analysointiin.



5.2 Yleisiä herätteiden aaltomuotoja



Sinignaali

Sini (a) on herätteenä yleinen, joskaan sen transienttivastetta ei lineaarisille verkoille yleensä analysoida, vaan sinivasteen analyysi tehdään useimmiten osoitinlaskennan keinoin (ks. kpl 7).

Askel (Heavisiden funktio)

Hyvin yleinen heräte niin sähkö- kuin säätötekniikassakin. Askeleen (b) matemaattinen malli on yksikköaskelfunktio $u(t)$, joka on määritelty seuraavasti

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (5.2-1)$$

Ramppi

Ramppikin (c) on sangen yleinen heräte erilaisissa säätöteknessä ongelmissa. Matemaattinen malli voi olla esimerkiksi

$$r(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ t, & t > t_0 \end{cases} \quad (5.2-2)$$

Impulssi (d,f, Diracin funktio)

Signaali, jonka pinta-ala on yksi mutta leveys on nolla - impulssin amplitudin täytyy siis lähetä ääretöntä. Matemaattinen käsite, jolla on kuitenkin tärkeä merkitys aikavasteiden käsittelyssä: luvuissa 5-6 puhutaan verkon vapaasta vasteesta tai **impulssivasteesta**, joka kuvaa minkälaisella aaltomuodolla alkutilan energia purkautuu. Tämä vaste saadaan mitattua ajamalla piiriä impulssilla, mutta koska impulssivasteen mittaaminen käytännössä on vaikeaa, impulssin sijaan käytetään joko kuvan f) kaltaisia approksimaatioita tai askelfunktiota, sillä askelvasteesta derivoimalla saa impulssivasteen.

Derivoitu impulssi (e)

Vielä vaikeammin teknisesti toteutettavissa oleva signaali. Joidenkin verkkojen impulssivaste on muodoltaan derivoitu impulssi.

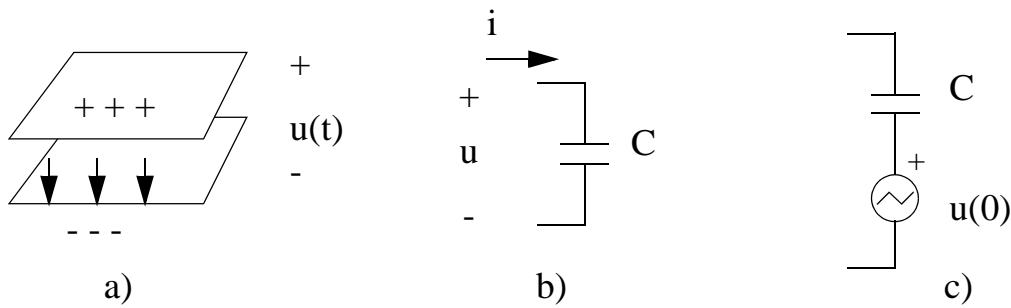
Kaistarajoitettu impulssi

Joissakin mittalaitteissa impulssi toteutetaan kaistarajoitettuna, jolloin siitä tulee värähtelevä $\sin(x)/x$ -tyyppinen signaali

5.3 Kapasitanssi : $Q = CU$

Kapasitanssissa kahden johdelevyn välillä on jännite-ero, jolloin levyissä oleviin varauksiin on sitoutunut energiaa, joka voi purkaantua kun kondensaattorin levyt yhdistetään. Positiivisten ja negatiivisten varausten väliin voidaan kuvitella sähkökenttä, ja sähkökenttämallia käyttäen voidaan laskea kapasitanssi hyvin monimuotoisille kappaleille. Yksinkertaisin kapasitanssirakenne on tasokondensaattori, jolle pätee kaava (5.3-1), jossa A on levyjen pinta-ala, l niiden välinen etäisyys ja $\epsilon_r \epsilon_0$ eristeaineen permittiivisyys

$$C = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{l} \quad (5.3-1)$$



Kapasitanssiin kertyvä varaus on muotoa (5.3-2). Nähdään siis, että varaus kasvaa lineaarisesti jännitteen kasvaessa, ja kapasitanssiarvo vastaa $Q-U$ -kuvaajan kulmakerrointa (ks. seuraava kuva f)

$$\begin{aligned} q(t) &= C \cdot u(t) \\ &= \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.3-2)$$

Yhtälöstä (5.3-2) voidaan johtaa kapasitanssin virta-jännite -riippuvuutta kuvaava yhtälöt (5.3-3). Myös kapasitanssin yksikkö As/V (s/Ω) eli **faradi (F)** on helppo muistaa kaavasta (5.3-2).

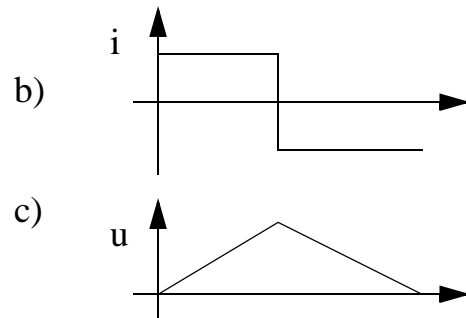
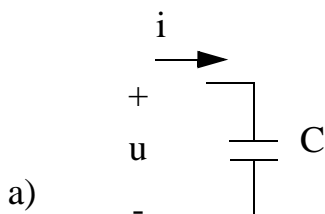
$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \\ i(t) &= C \cdot \frac{du}{dt} \end{aligned} \quad (5.3-3)$$

I-V-yhtälön integraalimuodosta havaitaan, että kondensaattoriin voi olla varastoituneena jännitettä, joka voidaan mallittaa sen **alkutilana**: ajan hetkellä $t=t_0$ (monesti $t_0 = 0$) kondensaattorilla on tietty alkujännite $u(t_0)$. Tämän piirimalli on esitetty kuvassa c, jossa itse kapasitanssissa C ei ole alkujännitettä, vaan alkutila on mallitettu erillisellä jännitelähteellä $u(t_0)$.

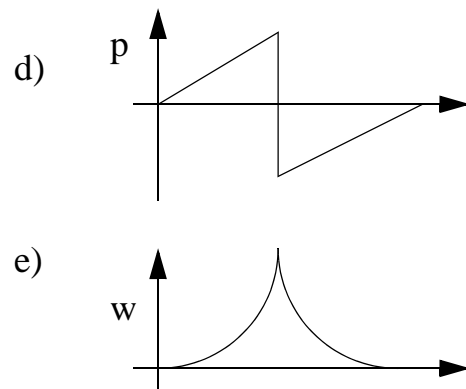
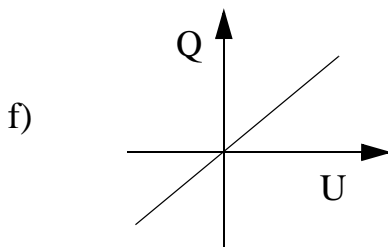
$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + u(t_0) \quad (5.3-4)$$

Kapasitanssiin siirtyvä teho kuvataan yhtälöllä (5.3-5). Jos kuvan a) merkinnöillä ja suunnilla siirtyvä teho on positiivinen, energiaa varastoituu kapasitanssiin, ja jos hetkellinen teho on negatiivinen, kapasitanssi luovuttaa energiaa. On syytä huomata, että resistanssi pelkästään kuluttaa energiaa, kun taas reaktiiviset komponentit eivät kuluta sitä, vaan toimivat häviöttöminä varastoina, joihin talletettu energia voidaan palauttaa piiriin. Tätä on havainnollistettu kuvissa b-d), joissa kondensaattoria ohjataan vakiovirralla, jolloin sen yli oleva jännite muuttuu.

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) \\ &= C \cdot u(t) \cdot \frac{du}{dt} \end{aligned} \quad (5.3-5)$$



Jännite on (virran integraali)/C



Kapasitanssiin varastoitunut energia on laskettavissa tehon aikaintegraalina. Kaava (5.3-5) integroimalla saadaan yhtälö (5.3-6), jonka viimeisessä vaiheessa on oletettu, että alkuhetkellä kapasitanssin jännite on ollut nolla. Nähdään, että kapasitanssiin varastoitunut energia kasvaa jännitteen toisessa potenssissa (ks. kuva e).

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^t C \cdot u(\tau) \cdot \frac{du}{d\tau} d\tau = \int_{u(-\infty)}^{u(t)} C \cdot u(t) du \\ &= \frac{C \cdot (u(t))^2}{2} - \frac{C \cdot (u(-\infty))^2}{2} \\ &= \frac{C \cdot (u(t))^2}{2} \end{aligned} \quad (5.3-6)$$

Esim.

Olkoon verkkolaitteessa häiriönpoistajana 1 mF (iso!!) kapasitanssi, johon latautuu ääritapauksessa 330 V jännite. Tällöin kondensaattoriin varastoituneen energian määrä on

$$W = 0.5 \cdot 1e-3 \cdot (330)^2 = 54.4 \text{ J}$$

Tällä energiamäärällä lämmittäisi n. 0.5 g ruumiinlämpöistä vettä 60-asteiseksi, eli polttaa yhden sormen melko rumaksi, ja vartalossa kiertävä virta voi olla riittävä pysäyttämään sydämenkin. Sairaalaelokuvissa defibrillaattoriin ladataankin enimillään 300 J energiaa ennen kuin sillä yritetään kääntää sydämen rytmiä.

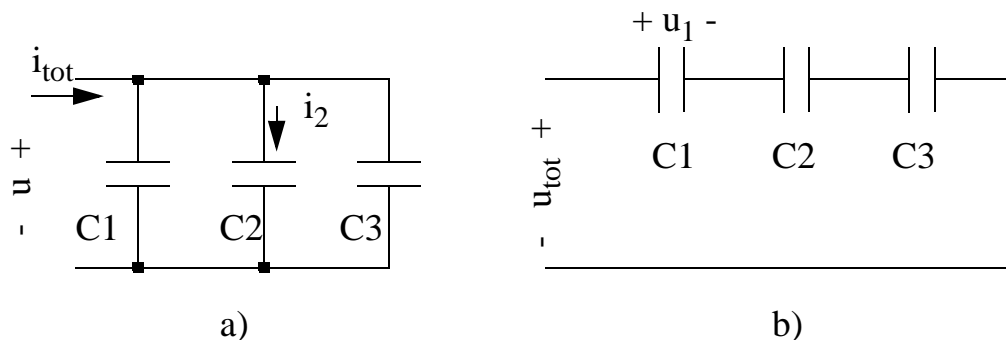
Katsotaan vertailun vuoksi normaalissa 1.5 V taskulampun paristossa (tyyppi-merkintä LR20 tai D) ja auton akussa olevat energiamäärät:

$$\text{paristo: } W = 1.5\text{V} \cdot (18 \text{ Ah}) = 1.5\text{V} \cdot 18 \text{ A} \cdot 3600 \text{ s} = 97 \text{ kJ}$$

$$\text{akku: } W = 12\text{V} \cdot (40 \text{ Ah}) = 12\text{V} \cdot 40\text{A} \cdot 3600 \text{ s} = 1.7 \text{ MJ}$$

Havaitaan siis, että suureenkaan kondensaattoriin ei voi varastoida kovin paljoa energiaa (esim. 1 desilitrassa kevytmaitoa on n. 190 kJ energiaa). Energiamäärät eivät siis riitä lämmitys- tms. tarkoituksiin, mutta kylläkin hyvin elektroniseen signaalinkäsittelyyn, sillä luontaisten kohinamekanismien (termisen lämpöliikkeen) energiamäärä on suuruusluokkaa $kT = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 0.4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$, jolloin pienikin signaalienergia riittää ylittämään kohinan energian.

5.4 Kapasitanssien rinnan- ja sarjaankytkennät



Kuvan a) mukaisessa kondensaattorien rinnankytkennässä kaikkien kondensaattorien yli on sama jännite u , joten KCL:n ja kaavan (5.3-3) perusteella

$$\begin{aligned} i_{tot} &= i_1 + i_2 + i_3 \\ &= (C_1 + C_2 + C_3) \cdot \frac{du}{dt} \end{aligned} \quad (5.4-1)$$

josta yleistäen rinnankytkettyjen kapasitanssien yhteinen kapasitanssi on

$$C_{par} = \sum C_i \quad (5.4-2)$$

Vastaavasti kuvassa b) virta kaikkien kapasitanssien läpi on sama, jolloin KVL:n ja kaavan (5.3-3) perusteella

$$\begin{aligned} u_{tot} &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.4-3)$$

josta yleistäen sarjaankytkettyjen kapasitanssien yhteinen arvo on

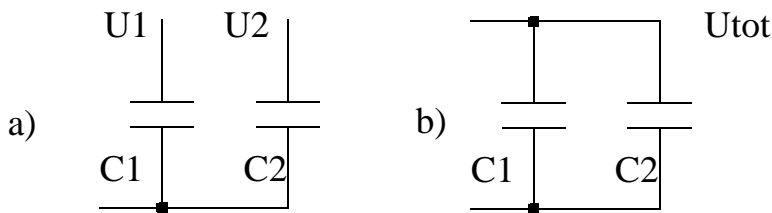
$$C_{ser} = \frac{1}{\sum \frac{1}{C_i}} \quad (5.4-4)$$

Esim. Varauksen säilymlaki

Kytetään kaksi kondensaattoria yhteen. Kuvassa a) $C_1 = C_2 = 1 \text{ nF}$ ja $U_1 = 1 \text{ V}$ ja $U_2 = 10 \text{ V}$. Kondensaattoreissa on siis varausta $Q_1 = C_1 \cdot U_1 = 1 \text{ nC}$ ja $Q_2 = C_2 \cdot U_2 = 10 \text{ nC}$ ja energiaa $W_1 = 0.5 \text{ nJ}$ ja 50 nJ . Kun kondensaattorit yhdistetään, varaus jakaantuu nyt rinnankytkettyjen kondensaattorien kesken. Tällöin

$$U_{\text{tot}} = Q_{\text{tot}} / C_{\text{tot}} = (1+10) \text{ nC} / (1+1) \text{ nF} = 5.5 \text{ V}$$

Tällöin kokonaisenergia on enää $15.1 \text{ nJ} < 50.5 \text{ nJ}$. Siis *kokonaisvaraus säilyy, mutta kokonaisenergia pienenee*. Ilmiö on samanlainen kuin kimmottomassa törmäyksessä, jossa liikemäärä säilyy mutta energia hupenee. Tässä energiaa palaa lämmöksi oikosulkujohtimen resistanssissa, kun kondensaattorien yhdistäminen saa hetkellisen virran kiertämään silmukassa.

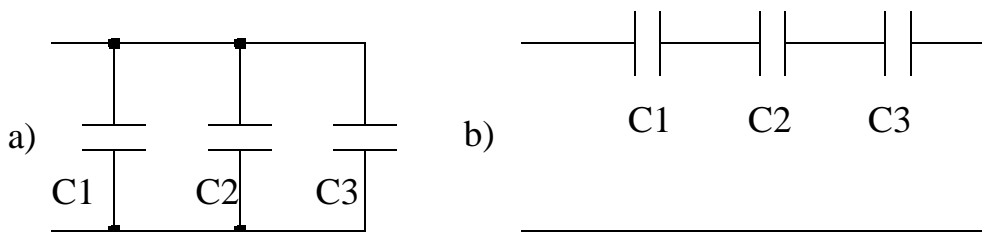


Esim.

Kuvassa $C_1=C_2= 4 \text{ uF}$ ja $C_3 = 1 \text{ nF}$. ($\text{u} = 10^{-6}$ ja $\text{n} = 10^{-9}$)

a) -kohdassa kokonaiskapasitanssin $C_{\text{tot}} = 4 \text{ uF} + 4 \text{ uF} + 1 \text{ nF} = 8.001 \text{ uF}$,

b) -kohdassa $C_{\text{tot}} = 1/(1/4 \text{ uF} + 1/4 \text{ uF} + 1/1 \text{ nF}) = 0.9995 \text{ nF}$.



Sarjaankytkentä siis pienentää kapasitanssia, rinnankytkentä kasvattaa.

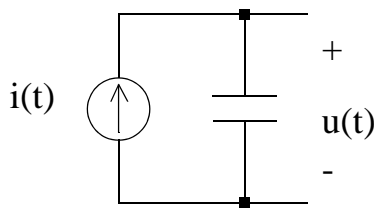
5.5 Kapasitiivisten piirien aaltomuotoja

Koska varauksen määrä on jatkuva, myös kondensaattorin jännite on jatkuva ajan funktio (jännite ei voi muuttua askelmaisesti muuten kuin siinä tapauksessa, että kondensaattoria ohjataan impulssimaisella virralla). Kaavoja

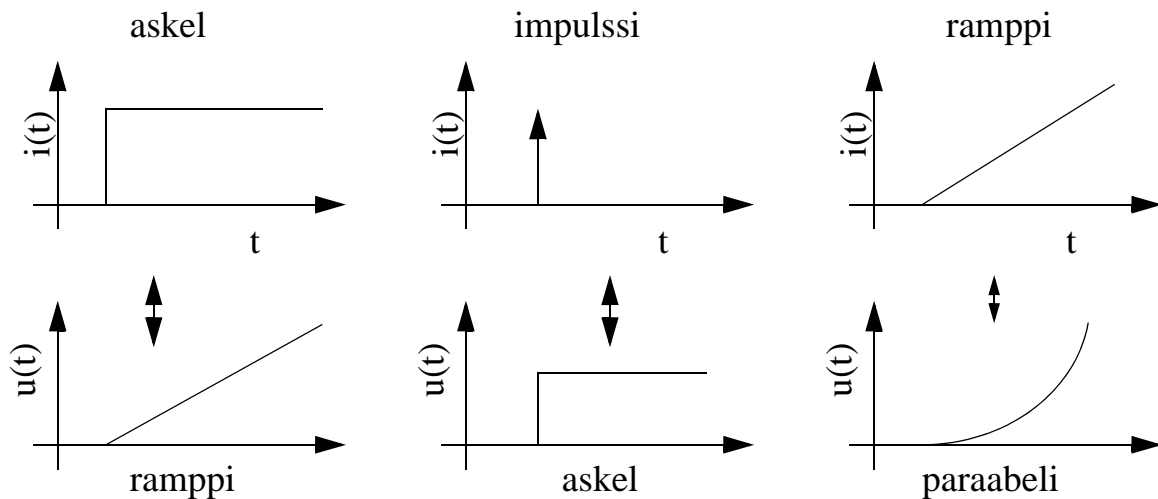
$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \tag{5.5-1}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$$

käyttäen on helppo todeta että esim. kun kondensaattorin virta muuttuu askelmaisesti, sen jännitteeseen tulee ramppimainen muutos. Vastaavasti askelmainen muutos kondensaattorin jännitteessä aiheuttaa impulssimaisen virran, jonka amplitudi on hyvin suuri mutta jonka siirtämä varaus vastaa täsmälleen arvoa $Q = CU$.

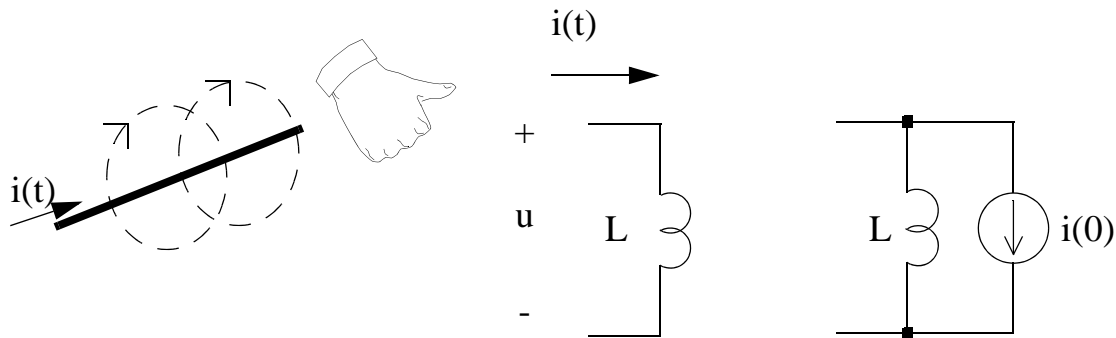


Jännite ~virran integraali



5.6 Induktanssi: magneettivuo = $L \cdot I$

Induktanssi kykenee varastoimaan energiaa magneettikentäksi: mitä suurempi virta induktanssin läpi kulkee, sitä suurempi on magneettikentän voimakkuus. Induktanssin fyysinen toteutus on kela, jonka induktanssia voidaan kasvattaa lisäämällä rinnakkaisten johdinkierrosten lukumäärää tai kelan permeabiliteettiä μ_r esim käyttämällä ferromagneettista kelasydäntä.



Kapasitanssiin kertynyt varaus oli muotoa $Q=CU$. Induktanssilla vastaavassa asemassa on magneettivuo $\lambda(t)=n\phi(t)$, jonka arvo lasketaan kaavalla

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= L \cdot i(t) \\ &= \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (5.6-1)$$

ja jonka yksikkö on weber-kierros tai Vs. Induktanssin yksikkö on Vs/A (Ωs) eli henry (H). Tästä voidaan johtaa induktanssin virta-jännite -yhtälöt:

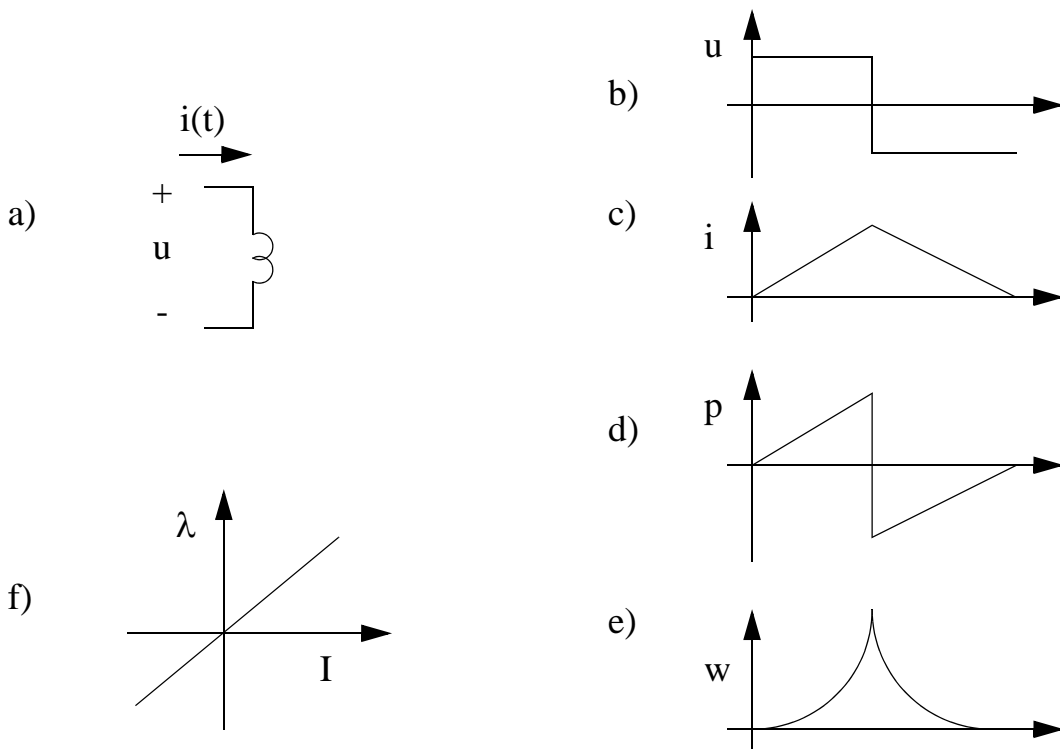
$$\begin{aligned}i(t) &= \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \\ u(t) &= L \cdot \frac{di}{dt}\end{aligned}\quad (5.6-2)$$

Yhtälöiden integraalimuodosta havaitaan jälleen, että induktanssin alkutila voidaan esittää virtana: analyysin alkuhetkellä kulkee jokin virta $i(t_0)$, ja sen muutos voidaan analysoida integroimalla jännitettä analysointiajalta. Alkuehtoa symboloi kuva b, jossa on alkutilan virta ja induktanssi, jonka alkutila on $i=0$

$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau + i(t_0) \quad (5.6-3)$$

Induktanssiin tai siitä pois siirtyvä teho määritellään kaavalla (5.6-4), jossa kuvan a) merkinnöillä positiivinen teho tarkoittaa energian varastoitumista induktanssiin ja negatiivinen varastoidun energian purkamista induktanssista. Kuvissa b-e induktanssia ohjataan tasajännitteellä, jolloin sen virta alkaa lineaarisesti kasvaa. Tällöin teho kasvaa virran 1. ja varastoitunut energia virran 2. potenssissa. Kun ohjaavan jännitteen suunta muutetaan, induktanssin energiatila $w(t)$ ei voi muuttua silmänräpäyksellisesti, vaan virta i pienenee jälleen vähitellen. Samalla teho vaihtaa etumerkkiään, ts. induktanssi alkaa luovuttaa varastoimaansa tehoa.

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) \\ &= L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i(t) \end{aligned} \quad (5.6-4)$$



Tehon lausekkeesta integroimalla saadaan induktanssiin varastoitunut energia $w(t)$.

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^t L \cdot \frac{di}{d\tau} \cdot i(\tau) d\tau = \int_{i(-\infty)}^{i(t)} L \cdot i(t) di \\ &= \frac{L \cdot (i(t))^2}{2} - \frac{L \cdot (i(-\infty))^2}{2} \\ &= \frac{L \cdot (i(t))^2}{2} \end{aligned} \quad (5.6-5)$$

Huomaa tämä:

Koska energia on verrannollinen induktanssin virtaan, sen askelmainen muuttaminen vaatisi hetkellisesti ääretöntä tehoa. Niinpä induktanssin virta muuttuu yleensä jatkuvasti, ja siihen voi syntyä askelmaisia muutoksia vain jos sen yli oleva jännite nousee äärettömyyteen (impulssiksi)

Energian säilymislakien takia kapasitanssin jännite ja induktanssin virta pyrkivät muuttumaan jatkuvasti, ilman askelmaisia muutoksia. Askelmaiset muutokset vaativat (tai aiheuttavat) ääretöntä hetkellistä tehoa eli impulssimaista (äärettömän korkeaa) jännite- tai virtaerätettä.

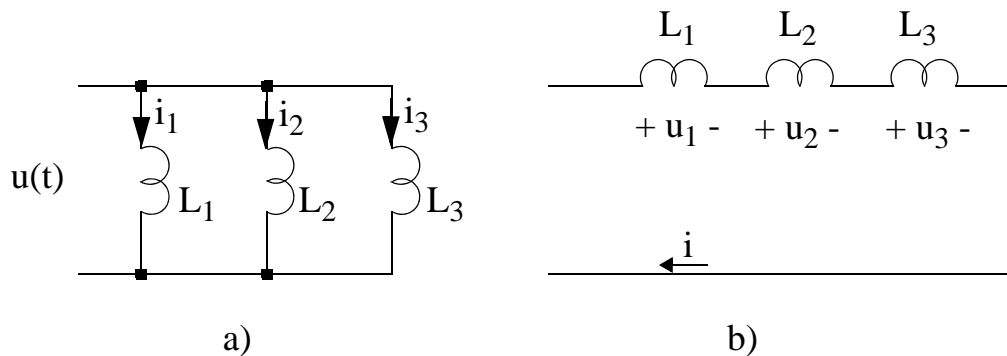
Perinteisen käämiksi kiedotun induktanssin mitoituskaava on seuraava:

$$L = \mu_r \cdot \mu_o \cdot \frac{n^2 A}{l} \quad (5.6-6)$$

jossa μ_o , μ_r ovat absoluuttinen ja suhteellinen permeabiliteetti, n on käämin kierosten lukumäärä, l käämin pituus ja A sen poikkipinta-ala. Muuntajalaskujen kannalta on tärkeä muistaa, että $L \sim n^2$.

Käytännön induktansseissa esiintyy myös keskinäisinduktanssia (ks. kpl 5.9) ja kelasydämen saturoitumista, joka liian suurella virtatasolla romahduttaa induktanssiarvon.

5.7 Induktanssien rinnan- ja sarjaankytkennät



Kuvassa a) jännite kaikkien induktanssien yli on sama, jolloin KCL:n ja kaavan (5.6-2) perusteella

$$\begin{aligned} i_{tot} &= i_1 + i_2 + i_3 \\ &= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right) \cdot \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.7-1)$$

josta yleistäen rinnankytkettyjen induktanssien yhteinen arvo on

$$L_{par} = \frac{1}{\sum \frac{1}{L_i}} \quad (5.7-2)$$

Vastaavasti kuvassa b) Kirchoffin jännitelakia ja kaavaa $u = L di/dt$ käyttäen todetaan, että kaikkien sarjaankytkettyjen induktanssien virta on sama i ja niiden yli oleva kokonaisjännite on muotoa

$$\begin{aligned} u_{tot} &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &= (L_1 + L_2 + L_3) \cdot \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (5.7-3)$$

josta yleistäen sarjaankytkettyjen induktanssien yhteinen induktanssi on

$$L_{ser} = \sum L_i \quad (5.7-4)$$

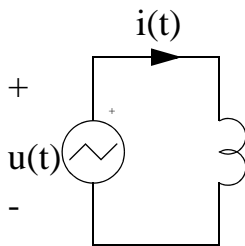
5.8 Induktiivisten piirien aaltomuotoja

Energian säilymisestä seuraa, että induktanssin virta ei voi muuttua askelmaisesti muuten kuin siinä tapauksessa, että sitä ohjataan impulssimaisella jännitteellä. Muulloin induktanssin virta on jatkuva ajan funktio. Kaavoja

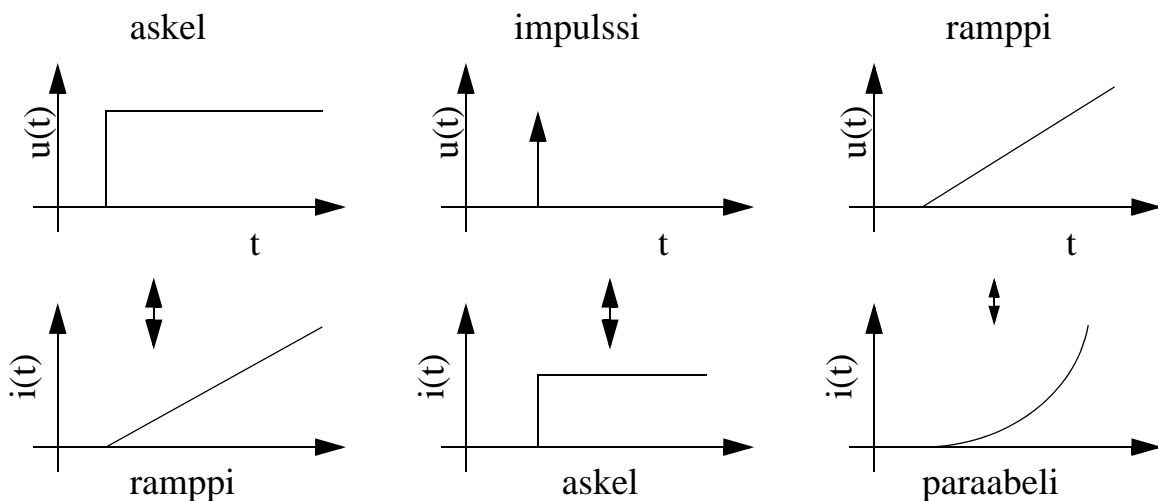
$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \tag{5.8-1}$$

$$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$

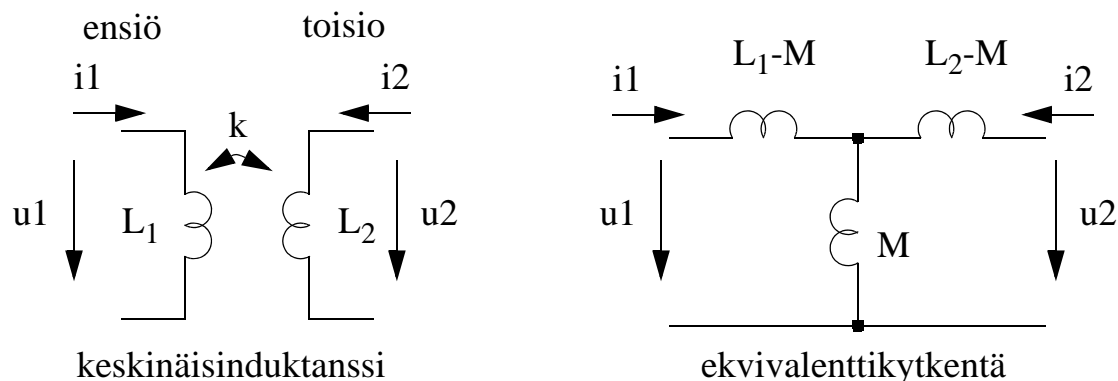
käyttäen on helppo todeta että esim. kun induktanssin jännite muuttuu askelmaisesti, sen virtaan tulee ramppimainen muutos. Vastaavasti askelmainen muutos induktanssin virrassa aiheuttaa impulssimaisen jännitteen, jonka amplitudi on hyvin suuri. Tätä ominaisuutta käytetään mm. polttomoottorin sytyspuolassa, jossa induktanssin virran katkaisemisella saadaan aikaan kipinöintiin tarvittava hyvin korkea jännite.



jännite = L*(virran derivaatta)



5.9 Keskinäisinduktanssi



Kaksi tai useampaa käämiä voi jakaa saman magneettikentän, jolloin niiden vuon muutokset kytkeytyvät toisiinsa. Piiriteknisesti tämä mallitetaan **keskinäisinduktanssilla**, joka toimii kuin toisen piirin virran ohjaama induktanssi. Kahden käämin tapauksessa pätee yhtälöpari (huomaa virtojen suunnat)

$$\begin{aligned} u_1(t) &= L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \\ u_2(t) &= L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (5.9-1)$$

missä induktanssit toisiinsa kytkevän keskinäisinduktanssin M arvo on

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad (5.9-2)$$

ja k on magneettikenttien kytkeytymistä kuvaava kerroin, $|k| < 1$. Ideaalisessa muuntajassa magneettivuo kytkeytyy täydellisesti, jolloin $k=1$ tai -1 .

Näistä seuraa perinteiset muuntajayhtälöt ensiö- ja toisiokäämin jännitteiden ja virtojen välille.

$$u_2 = m \cdot u_1 \quad i_2 = \frac{-1}{m} \cdot i_1 \quad (5.9-3)$$

missä $m = n_2/n_1 = \sqrt{L_2/L_1}$ on muuntajan muuntosuhde ($L \sim n^2$).

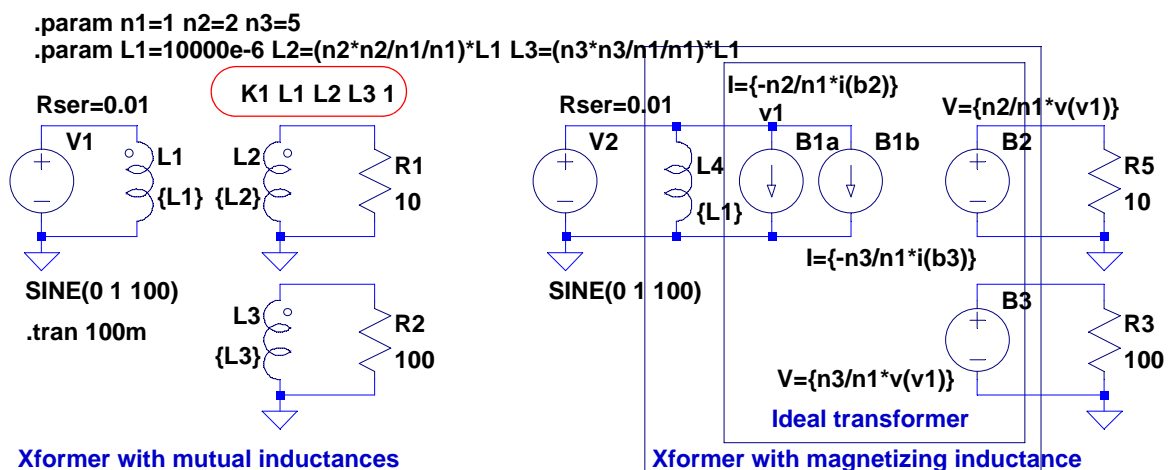
Yhtälön (5.9-1) derivaatoista kuitenkin huomataan, että **reaalisella muuntajalla on aina jokin induktanssien ja kuorman suuruudesta riippuvasta alarajataajuus**, jonka alapuolella se ei toimi vaan näyttää liki oikosululta.

Oheisessa kuvassa on kolmekääminen muuntaja (yksi ensiökäämi ja kaksi toisiota - engl primary ja secondary). Spice-simulaattorissa sen voi mainiosti mallittaa keskinäisinduktanssin avulla, elementti K1 kytkee induktanssien L1,L2,L3 magneettivuot yhteen ja tekee niistä muuntajan.

Yleensä muuntosuhde kuvataan jännitteen- tai virtamuuntosuhteen avulla. Tämä on suoraan verrannollinen käämien kierrosmääriin n , jolloin käämien induktanssit muuttuvat suhteessa $\sim n^2$. Oikeanpuoleinen kuva onkin muuntajan ideaalinen malli, jossa toisioissa on jänniteohjatut jännitelähteet, jotka toistavat ensiökäämin jännitteen vahvistuksella n_i/n_1 . Koska muuntaja on passiivinen komponentti, ensiökäämin on otettava sisään sama määrä tehoa kuin toisiot antavat ulos, ja tätä varten ensiökäämin sijaiskytkennässä on virtaohjattu virtalähteitä, jotka toistavat toisio-käämien virrat samoin muuntosuhteella $-n_i/n_1$. Etumerkki pitää huolen siitä, että tehovirrat menevät oikein: toisioista ulos, ensiöstä sisään.

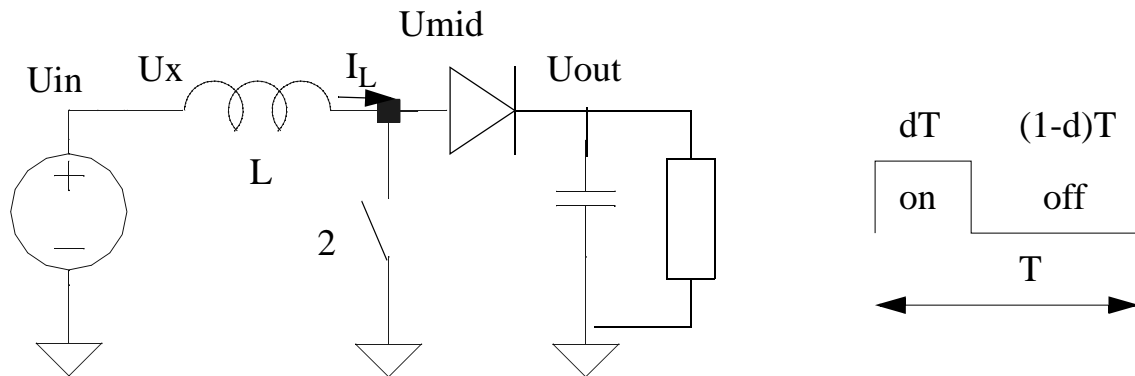
Oikeanpuoleisessa mallissa on ideaalisen muuntajan lisäksi myös L4:llä merkitty magnetoitumisinduktanssi (**magnetizing inductance**). Se toimii keskitettynä energiavarastona (induktanssi kun pystyy varastoimaan energiaa) ja mallittaa muuntajan taajuuskäyttäytymistä: jos L1 (vast. L4) on liian pieni, ensiökäämi oikosulkee tulosignaalin, ja ensiöpuolen virta kasvaa kohtuuttomaksi.

Transformer models



Esim.

Boost-tyyppinen hakkuri pystyy muodostamaan tulojännitettä suurempia lähtöjännitteitä käyttäen kelaä väliaikaisena energiavarastona.



Kun kuvan kytkin johtaa, kela on suoraan jännitelähteen ja maan välissä, jolloin sen läpi kulkeva virta seuraa yhtälöä

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t (U_{in} - 0) d\tau = \frac{U_{in} \cdot t}{L} + i(0) \quad (5.9-4)$$

eli kasvaa lineaarisesti ajan funktiona, ja samalla kelaan varastoitunut energia kasvaa neliöllisesti. Ajan $d \cdot T$ kuluttua ($0 < d < 1$) kuluttua kytkin avataan, jolloin virta ei pääse enää maahan. Koska kelaan on varastoitunut runsaasti energiaa, sen virta ei voi katketa vaan etsii uuden reitin indusoimalla kelan ylitse korkean jännitteen: $u = L \cdot di/dt$. Virran katketessa di/dt lyö reippaasti negatiiviselle puolelle, jolloin kelan yli vasemmalta oikealle oleva jännite muuttuu negatiiviseksi, eli oikean pään jännite nousee ylemmäksi kuin vasemman. Tämä riittää avaamaan diodin ja johtamaan virran pitokondensaattoriin ja sen rinnalla olevaan kuormaan, vaikka U_{out} on yleensä selvästi suurempi kuin U_{in} .

Tämän jakson aikana kelan yli olevan jännite on $U_{in} - U_{out} < 0$, jolloin kelavirta pienenee samalla kun energiaa puretaan diodin läpi kondensaattoriin ja kuormaan. Kytkin suljetaan taas, ennen kuin kelavirta menee nolaksi, ja jakso alkaa alusta. Asettuneessa tilanteessa kelavirran muutos on yhtäsuuri kummankin vaiheen aikana, joten

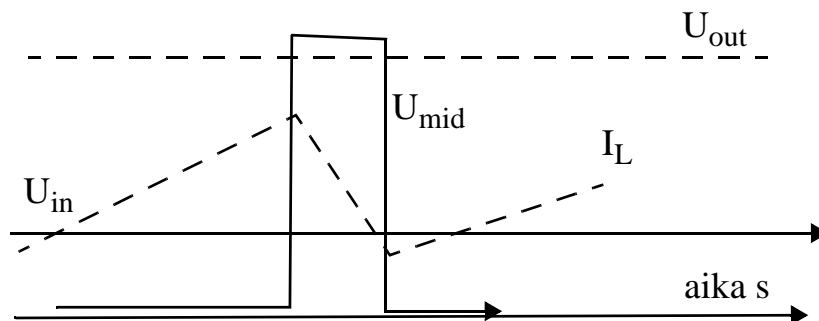
$$\frac{U_{in} \cdot d \cdot T}{L} = \frac{-(U_{in} - U_{out}) \cdot (1 - d) \cdot T}{L} \quad (5.9-5)$$

eli Boost-hakkurin muuntosuhde on muotoa

$$U_{out} = \frac{1}{1-d} \cdot U_{in} \quad (5.9-6)$$

jossa d on pulssisuhde. Käytännön hakkurissa takaisinkytkentäpiiri mittaa lähtöjännitteen, vertaa sitä haluttuun, ja säättää pulssisuhdetta sen mukaisesti.

Huomionarvoista tässä esimerkissä on, että vaikka jännitelähde oikosuljetaan kelalla maihan, jännitelähteestä otettava virta ei mene hukkaan, vaan sillä ladataan kelaan energiaa, joka sitten toisella jaksolla siirretään lähtöön. Hakkuriteholähteen hyötysuhde on teoriassa 100%, mutta käytännössä kelan ja kytkimen sarjaresistanssi ja diodin $V_d \cdot I$ -häviöt syövät jonkin verran tehoa.



6. YHDEN AIKAVAKION RLC-PIIRIEN AIKAVASTEET

6.1 Johdanto

Seuraavassa perehdytään erilaisten RLC-piirien aikavasteiden laskemiseen. Yksinkertaisten RC- ja RL-verkkojen käyttäytymisen tuntemisella on merkitystä myöhemmin, kun analysoidaan erilaisten verkkojen ja vahvistimien vastetta ja asetumisaikaa.

Katselemme tässä luvussa lähinä kytkimellä ohjattuja RC- ja RL-piirejä, jotka alkavat tietyistä DC-tilanteesta ja päätyvät toiseen. Toiminnan ymmärtämisen kannalta auttaa, kun muistaa, että

energiansäilymlain takia kondensaattorin jännite ja induktanssin virta ei muutu askelmaisesti vaan jatkuvasti.

Asettumisen loppu- ja alkutila on helppo arvioida, ja niiden välinen siirtymä on kuvattava differentiaaliyhtälöllä. Monessa mallinnusongelmassa tämä differentiaaliyhtälö on aina ja joka tapauksessa pystyttävä kuvaamaan, vaikka sen ratkaisu tehtäisiinkin koneellisesti. Kerrataan tässä kuitenkin vielä pikaisesti differentiaaliyhtälöiden käsiratkaisuratkaisumenetelmiä, ja yritetään samalla hahmottaa miten aikavasteet rakentuvat.

Esiintyvät differentiaaliyhtälöt ovat yleensä (differentiaaliyhtälöiksi) helposti ratkaistavia. Ne ovat

- tavallisia, ts. niissä derivoidaan vain yhden muuttujan, ajan, suhteen. Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä tarvitaan vain jakautuneitten suureitten tapauksessa, kuten laskettaessa lämpövirtoja tai potentiaalijakaumia 3-ulotteisissa kappaleissa tai jännitteitä ja virtoja siirtojohdoissa, joissa ne ovat paitsi ajan, myös paikan funktioita.
- lineaarisia, ts. niissä esiintyy jännitteitä ja virtoja ja niiden derivaattoja vain vakioilla kerrottuina.
- vakiokertoimisia, ts. jännitteiden ja virtojen ja niiden derivaattojen kertoimet eivät ole ajan tai muun suureen funktioita.

Tässä differentiaaliyhtälöitä ratkotaan pääsääntöisesti alkuarvojen ($y(0)$, $y'(0)$, ...) perusteella, mutta joissain jaksollisten signaalien käyttäytymistä kuvaavissa tapauksissa voidaan ottaa käyttöön myös reunaehtoja ($y(0)$, $y(T)$, ...).

6.2 Differentiaaliyhtälöiden ratkaisutapoja

Tässä monisteessa sähköisiä piirejä kuvaavat differentiaaliyhtälöt ovat lineaarisia ja tavallisia, vain ajan suhteen derivoituja differentiaaliyhtälöitä. Tutkitaan aluksi ensimmäisen asteen yhtälöitä, jotka ovat muotoa

$$x'(t) + B \cdot x(t) = u(t) \quad (6.2-1)$$

missä $u(t)$ on heräte ja $x(t)$ piirin tila (joku jännite tai virta). Tällaisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi on useita vakiintuneita menetelmiä:

Vakion varioiminen

Differentiaaliyhtälöitä ratkotaan siten, että ratkaistaan ensin ns. **homogeeninen** yhtälö, jossa heräte $u(t)=0$, ja sen jälkeen etsitään yksi erityisratkaisu tapaukselle, jossa $u(t) = u(t)$. Kokonaisratkaisu on siis homogeenisen yhtälön ratkaisun (**vapaa vaste**) $x_h(t)$ ja erityisratkaisun (**pakotettu vaste**) $x_p(t)$ summa:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (6.2-2)$$

Sähkötekniikassa homogeenisen yhtälön ratkaisua sanotaan piirin **vapaaksi vastteeksi** ja erityisratkaisua pakotetuksi vastteeksi.

Ratkaistaan ensin homogeeninen yhtälö (vapaa vaste)

$$x'(t) + B x(t) = 0: \quad (6.2-3)$$

Siirtelemällä termejä saadaan

$$dx/x = -B dt \quad (6.2-4)$$

josta

$$\ln x = -Bt + K_0 \rightarrow x = e^{K_0} e^{-Bt} = K e^{-Bt}. \quad (6.2-5)$$

Oletetaan nyt kerroin K ajan funktioksi $K(t)$ ja sijoitetaan homogeenisen yhtälön ratkaisu (6.2-5) yhtälöön (6.2-1):

$$-K B e^{-Bt} + K' e^{-Bt} + B K e^{-Bt} = K' e^{-Bt} = u(t) \quad (6.2-6)$$

josta

$$K = D + \int (u(\tau) \cdot e^{B\tau}) d\tau \quad (6.2-7)$$

ja näin **koko ratkaisu on muotoa**

$$x(t) = D \cdot e^{-Bt} + e^{-Bt} \cdot \int (u(\tau) \cdot e^{B\tau}) d\tau \quad (6.2-8)$$

Toinen tapa löytää erityisratkaisut on käyttää hyvää arvausta. Oheiseen tauluk-
koon on koottu erilaisilla herätteillä toimivia alkuarvauksia:

Taulukko 3: Hyviä arvauksia erityisratkaisuisiksi

Heräte	Erityisratkaisu
K_0	A
$K_0 t$	A + Bt
$K_0 + K_1 t$	A + Bt
$K_0 + K_1 t + K_2 t^2$	A + Bt + Ct ²
$K_0 e^{-bt}$ (b eris. kuin aikavakio)	Ae^{-bt}
$K_0 e^{-at}$ (a = aikavakio)	Ate^{-at}
$K_0 \sin(bt)$	$A \sin(bt) + B \cos(bt)$
$K_0 \cos(bt)$	$A \sin(bt) + B \cos(bt)$
$K_0 u(t) + K_1 \delta(t)$	A + B · u(t)

Vastaava tulos saadaan myös seuraavalla menetelmällä:

Integroiva tekijä

Kerrotaan yhtälön (4.1-1) kumpikin puoli termillä e^{Bt} :

$$e^{Bt} x'(t) + e^{Bt} B x(t) = d(e^{Bt} x(t)) = e^{Bt} u(t) \quad (6.2-9)$$

josta puolittain integroimalla ja e^{-Bt} :lla kertomalla saadaan

$$\begin{aligned} x(t) &= D \cdot e^{-Bt} + e^{-Bt} \cdot \int (u(\tau) \cdot e^{B\tau}) d\tau \\ &= e^{-Bt} \cdot \left(x(0) + \int (u(\tau) \cdot e^{B\tau}) d\tau \right) \\ &= e^{-Bt} \cdot x(0) + \int (u(\tau) \cdot e^{-B(t-\tau)}) d\tau \end{aligned} \quad (6.2-10)$$

Kaavan (6.2-8) ja (6.2-10) integraalitermiä kutsutaan herätteen ja piirin vapaan vasteen (impulssivasteen) **konvoluutiointegraaliksi**, jota merkitään myös lyhyemmin $u(t)*h(t)$, missä $h(t)$ on piirin **impulssivaste**. Termi $x(0)$ on systeemin alkutila.

Laplace-muunnos

Laplace-muunnos on erittäin kätevä ratkaisumenetelmä, jossa myös alkuehdot kulkevat automattisesti mukana. Muunnoksesta puhutaan enemmän kurssissa Piiriteoria 2 (ja vähän luvussa 9). Muunnetaan esimerkin vuoksi yhtälö (6.2-1):

$$sX - x(0) + BX = U \quad (6.2-11)$$

josta

$$X = \frac{U + x(0)}{s + B} = \frac{U}{s + B} + \frac{x(0)}{s + B} \quad (6.2-12)$$

Tästä käänteismuuntamalla

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \cdot \exp(-Bt) + x(0) \cdot e^{-Bt} \\ &= \int (u(\tau) \cdot e^{-B(t-\tau)}) + x(0) \cdot e^{-Bt} \end{aligned} \quad (6.2-13)$$

missä * tarkoittaa konvoluutiota.

Yleistäen voidaan todeta, että lineaarisen verkon vaste on muotoa

$$\begin{aligned} & \textit{alkuarvot kertaa verkon vapaa vaste} \\ & + \textit{vapaan vasteen ja herätteen konvoluutio} \end{aligned}$$

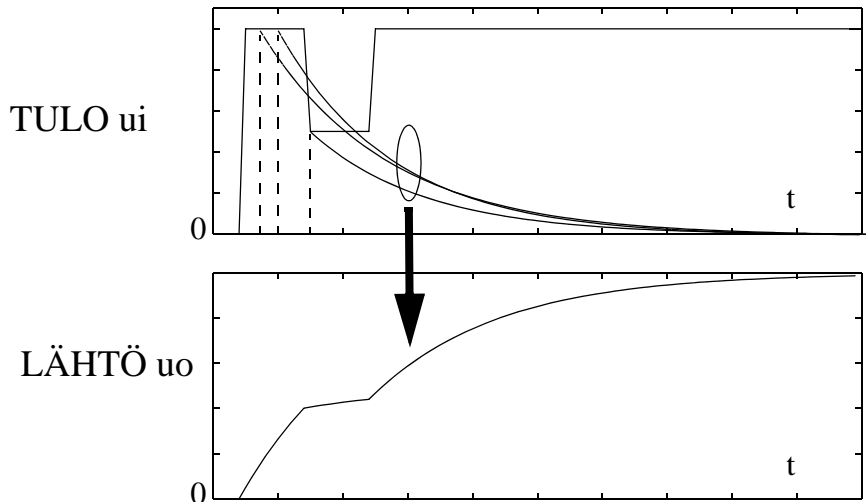
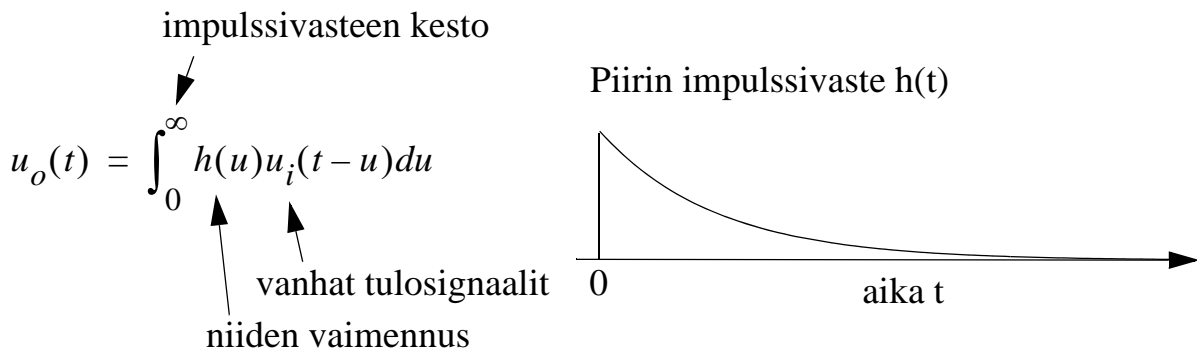
Verkon vapaa vaste, jota yleisesti sanotaan impulssivasteeksi, koostuu lineaarisilla verkoilla aina eksponentiaalisista termeistä e^{-Bt} , jossa B voi olla myös kompleksinen. Jos B on kompleksinen, toinen ratkaisu on aina e^{-B^*t} , missä B^* on B :n kompleksikonjugaatti, jolloin vaste on sinimuotoinen. B :n reaaliosan etumerkistä riippuen vaste on joko vaimeneva tai eksponentiaalisesti kasvava.

Pakotetun vasteen ratkaiseminen on työläämpää, sillä se vaatii kaavassa (4.1-8) olevan konvoluutiointegraalin laskemisen. Yleisimmille heränteille on taulukoitu tunnettuja ratkaisuja, ja koska differentiaaliyhtälöt ovat lineaarisia, ratkaisut eivät ole ylivoimaisen vaikeita.

Laplace-muunnosta käyttäen lineaariset differentiaaliyhtälöt pelkistyvät helposti käsiteltävään rationaaliseen muotoon eli tuloiksi, summiksi ja osamääriksi. Lisäksi Laplace-muunnosta voidaan käyttää suoraan myös taajuusvasteen analysointiin, kuten myöhemmin tullaan näkemään, joten Laplace-muunnoksen käyttäminen sähköpiirien analysoinnissa on hyvin yleistä. Tässä aloitetaan kuitenkin tavanomaisilla differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmillä ja johdetaan siitä sinimuotoisille signaaleille soveltuva ns. osoitinlaskenta, jossa sinimuotoisen signaalin amplitudi ja vaihe voidaan kuvata yhdellä kompleksiluvulla.

6.3 Konvoluution merkitys

Käytännössä konvoluutiointegraali tarkoittaa sitä, että piirin tulosignaalin aiempi historia vaikuttaa lähtöön niin pitkälle kuin piirin luontainen impulssivaste $h(t)$ kestää: tulosignaalin voidaan kuvitella koostuvan peräkkäisistä impulsseista, joista kukin näkyy lähdössä piirin impulssivasteen muotoisena, ja lähtösignaali on näiden vasteiden summa. Konvoluutio yleensä levittää tulosignaalin muotoa, sillä terävät muutokset näkyvät (joskin vaimenevana) lähdössä pitempään.

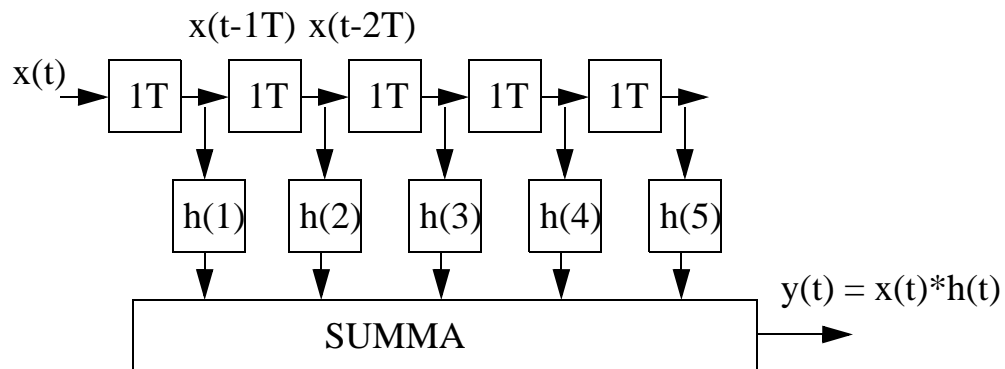


Konvoluution perusajatus:

Lähtö = Summa kaikista käynnissä olevista impulssivasteista painotettuna tulosignaalin amplitudilla impulssivasteen käynnistymishetkellä.

Oheisessa kuvassa on havainnollistettu konvoluution muodostumista diskreetiaikaisella mallilla: tulosta $x(t)$ viivästetyt versiot kerrotaan impulssivasteen arvoilla ja summataan yhteen. Näin lähdössä näkyy signaalin edellisiä arvoja impulssivasteen muodolla painotettuna. Tällä tavoin toimii mm. digitaalinen FIR-suodatin (Finite Impulse Response).

Impulssivasteen ja signaalin konvoluution muodostuminen diskreetiaikaisessa tapauksessa



Esim.

Aika (näytehetki):

t	1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---	---

Tulossa impulssi:

x(t)	1	0	0	0	0	0	0
y(t)	0	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)	h(5)	0

Tulossa askel:

x(t)	1	1	1	1	1	1	1
y(t)	0	h(1)	h(1) +h(2)	h(1) +h(2) +h(3)	h(1) +h(2) +h(3) +h(4)	h(1) +h(2) +h(3) +h(4) +h(5)	h(1) +h(2) +h(3) +h(4) +h(5)

6.4 Aikavasteen muodostaminen

Piirin aikavastetta kuvaava differentiaaliyhtälö muodostetaan seuraavasti:

- Kirjoitetaan Kirchoffin **jännite- tai virtayhtälö**(t) analysoitavalle verkolle
- Järjestetään yhtälö siten, että vasemmalle puolelle jää ratkaistava funktio $y(t)$ ja sen derivaattoja ja oikealle puolelle heräte $in(t)$, joka on joko vakio tai ajan funktio

$$y'(t) + Ay(t) = in(t) \quad (6.4-1)$$

- Ratkaistaan homogeeninen yhtälö, ts. merkitään heräte $u(t)$ nollassi ja etsitään homogeenisen yhtälön ratkaisu eli **impulssivaste** $Ky_h(t)$. Yhden aikavakion piireille se on aina eksponentiaalinen, ja aikavakion arvo on $1/A$:

$$y_h(t) = K e^{-At} \quad (6.4-2)$$

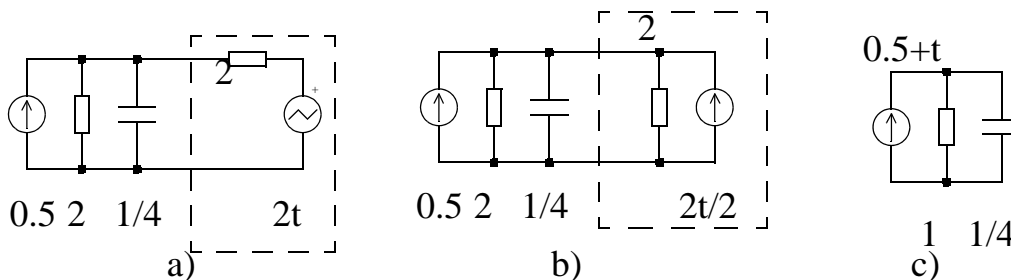
- Etsitään herätettä vastaava erikoisratkaisu $y_p(t)$. Nyt differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (6.4-3)$$

josta alkuehtoja käyttäen ratkaistaan vakio K .

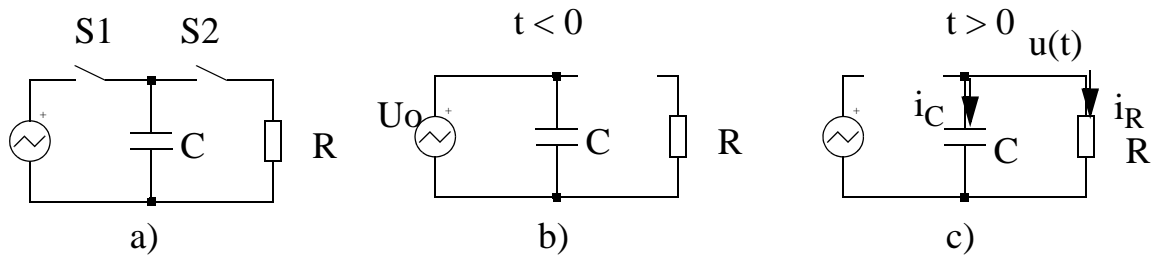
Esimerkki

Differentiaaliyhtälön yksinkertaistamiseksi voidaan käyttää kaikkia aiemmin esitettyjä keinoja. Kuvan a) kytkennän ajasta riippuva jännitelähde on kuvassa b) korvattu virtalähteellä, jolloin rinnakkain olevat vastukset ja virtalähteet voidaan yhdistää kuvan c) mukaisesti.



Esimerkki

Kuvassa a kytkin S1 johtaa, kun $t < 0$ ja S2 johtaa, kun $t > 0$. Näin piirin alkutila ajanhetkellä $t=0$ voidaan muodostaa kytkennästä b ja varsinainen transientti syntyy piirissä c kun kondensaattorin C jännite purkautuu vastuksen R kautta.



Tilanteessa b) kondensaattori C latautuu jännitteeseen U_0 . Tilanteen c) alussa **C:n alkujännite on siis U_0** , mikä saa siis vastuksessa R kulkemaan virran i . Kirchhoffin virtalain (KCL) perusteella voidaan kirjoittaa seuraava diff. yhtälö:

$$\begin{aligned}
 i_R + i_C &= 0 \\
 \frac{u}{R} + C \cdot \frac{du}{dt} &= 0 \\
 \frac{u}{RC} + \frac{du}{dt} &= 0
 \end{aligned} \tag{6.4-4}$$

Ryhmittelemällä (huomaa miinusmerkki!)

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{RC} \tag{6.4-5}$$

tälle saadaan integroimalla ja ottamalla puolittain exp() ratkaisuksi

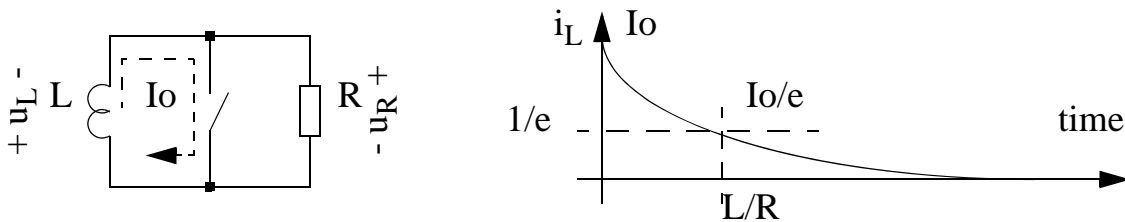
$$\begin{aligned}
 \log(u) &= \log(A) - t/RC \\
 u(t) &= A \cdot e^{-t/RC}
 \end{aligned} \tag{6.4-6}$$

jonka vakio voidaan ratkaista alkutilan $u(0) = U_0 = A$ perusteella:

$$u(t) = U_0 \cdot e^{-t/RC} \tag{6.4-7}$$

Esimerkki

Kytin johtaa kun $t < 0$ ja siirtyy johtamattomaksi ajanhetkellä $t = 0$, jolloin vastus on virraton ($i_R = 0$) ja kelaan läpi kulkee alkutilan virta $i_L = I_0$. Koska kelaan varastoitunut energia ei muutu hetkellisesti, kela painaa nyt virran I_0 vastukseen R . KVL:n perusteella voidaan kirjoittaa differentiaaliyhtälö



$$\begin{aligned}
 u_L + u_R &= 0 \\
 L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R &= 0 \\
 \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i &= 0
 \end{aligned} \tag{6.4-8}$$

jonka ratkaisu edelliseen tapaan integroimalla ja ottamalla $\exp()$ on

$$\begin{aligned}
 \log(i) &= \log(A) - tR/L \\
 i(t) &= A \cdot e^{-\frac{tR}{L}}
 \end{aligned} \tag{6.4-9}$$

josta alkuehtoa $i(0) = I_0$ käyttäen saadaan

$$i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{tR}{L}} \tag{6.4-10}$$

Huom.

Jos virta tai jännite on muotoa $\exp(-t/\tau)$, missä τ on piirin aikavakio, niin se

- puolittuu ajassa $t = \tau \ln(2) = 0.69\tau$
- putoaa $1/e$:nteen osaan (37%:iin) ajassa τ
- putoaa 0.01 osaan ajassa $t = \tau \ln(100) = 4.6\tau$
- putoaa 0.001 osaan ajassa $t = \tau \ln(1000) = 6.9\tau$

6.5 DC-tilanteen arvioiminen

Jos verkon heräte on askelmainen, kyse on käytännössä dc-tilanteen muutoksesta, joka asettuu jonkin ajan kuluessa (5..7 kertaa verkon aikavakion suuruudessa ajassa tila on asettunut lähes täydellisesti). Asettuneessa tilanteessa (n.k. steady-state -tilassa) jännitteet ja virrat eivät enää muutu, jolloin

$$\frac{di}{dt} = 0 \quad (6.5-1)$$

$$\frac{du}{dt} = 0$$

jolloin myös kondensaattorin virta ja induktanssin yli oleva jännite menevät nol-laksi:

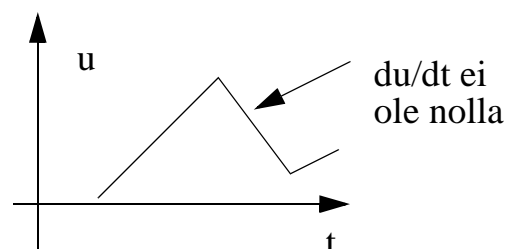
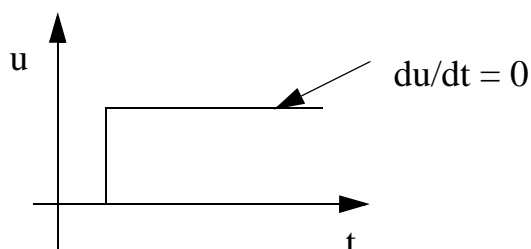
$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = 0 \quad (6.5-2)$$

$$i_C = C \cdot \frac{du}{dt} = 0$$

Tällöin verkon **dc-tilanne** voidaan analysoida yksinkertaisesti seuraavasti:

- korvataan **induktanssit oikosululla** ($u_L = 0$) ja
- korvataan **kapasitanssit avoimella piirillä** ($i_C = 0$) ja
- lasketaan verkon dc-jännitteet ja dc-virrat

Tällä tavoin on helppo arvioida esim. verkon alku- ja asymptoottista lopputilaa askelmaisten herätteiden tapauksessa. On kuitenkin syytä muistaa, että jos heräte on joku muu ajan funktio kuin askel tai impulssi (esim. sini), derivaatat eivät lähesty nol-laa, vaan alkutransienttien jälkeenkin induktanssien yli voi olla jännitettä ja kapasitansseissa voi kulkea muuttuvan herätteen aiheuttamaa virtaa.



6.6 Verkkojen askelvasteita

Seuraavassa ratkotaan oheisten piirien aikavasteita, kun herätteenä on askelmainen jännitemuutos ajanhetkellä $t=0$:

$$u_i(t) = U_o \cdot \text{step}(t), \quad (6.6-1)$$

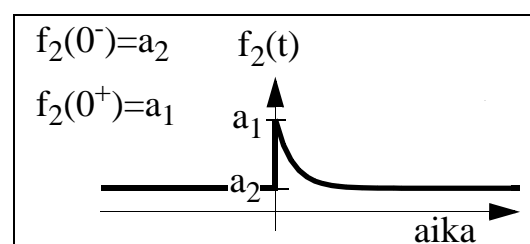
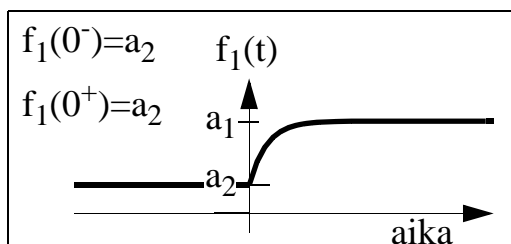
missä $\text{step}(t)$ (tai Heaviside(t)) on yksikköaskelfunktio. Jatkossa askelfunktion derivaattaa eli impulssifunktiota on merkitty symbolilla $\delta(t)$ (tai Dirac(t)). Haetaan yhtälöille ratkaisut ja yritetään

Yhden aikavakion systeemeissä askelvasteet ovat yleistä muotoa

$$\text{vaste} = \text{loppuarvo} + (\text{alkuarvo} - \text{loppuarvo}) \cdot \exp(-\text{aika} / \text{aikavakio})$$

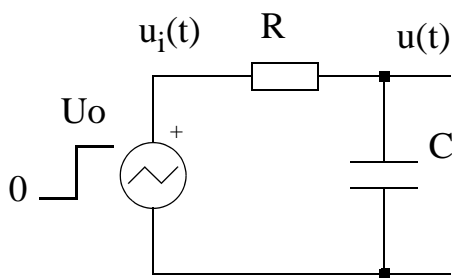
Näistä alku- ja loppuarvon näkee monesti “suoraan”, mutta aikavakion arvo on vaikeampi havaita, ja varmemmalla pohjalla ollaan, jos differentiaaliyhtälö kirjoitetaan ja ratkaistaan ihan alusta alkaen.

Askelmainen heräte voi aiheuttaa joko epäjatkuvan tai jatkuvan vasteen, siitä riippuen missä muodossa ja mihin kohti piiriä askel tuodaan. Alla vasemmassa kuvassa lähtösuure $f_1(t)$ on jatkuva, jolloin $f_1(0^-) = f_1(0^+)$, kun taas oikeanpuoleisessa kuvassa lähtösuure $f_2(t)$ on selvästi epäjatkuva, hypäten askelmaisesti.

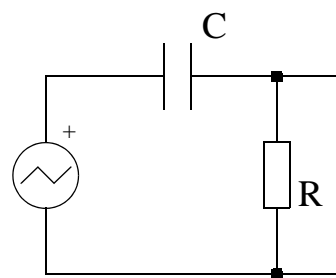


Seuraavissa esimerkeissä analysoidaan alla kuvattujen piirien vastetta, kun herätteenä on askelmaisesti ajanhetkellä $t=0$ nollassa arvoon U_0 muuttuva jännite. Askelvastetehtävien ratkaisemisessa on seuraavat tärkeät (ja tentissäkin arvostetut) vaiheet:

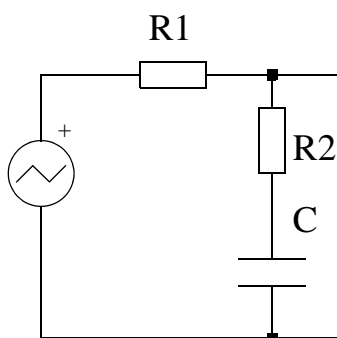
- kirjoitetaan systeemin toimintaa kuvaava differentiaaliyhtälö. Käytännön ongelmassa ratkaisun muodon voi monesti arvata, mutta uusien piirirakenteiden analyysissä (ja tenttitehtävissä) on välttämätöntä muodostaa ensin differentiaaliyhtälö, jolle voi hakea ratkaisua
- tunnista alkuehdot
- ratkaise differentiaaliyhtälö: homogeenisen yhtälön ratkaisu ja herätteen toteuttava erikoisratkaisu. Laplace-muunnosta käyttäen nämä voidaan kirjoittaa yhdelläkin kertaa
- **tarkista ratkaisu arvioimalla piirin DC-tilanne ennen ja jälkeen transientin**



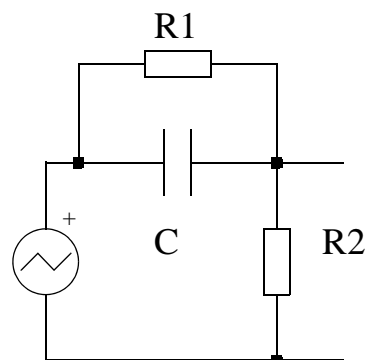
a)



b)



c)



d)

Kohta a)

Verkosta voidaan KVL:n perusteella kirjoittaa yhtälö silmukkavirralle, mutta siitä pitäisi erikseen integroida lähtöjännite $u(t)$. Kirjoitetaan sen sijaan lähtösolmulle virtayhtälö, jolloin saadaan suoraan lähtöjännitettä $u(t)$ kuvaava diff.yht.

$$i_C + i_R = 0$$

$$C \cdot \frac{du}{dt} + \frac{u - u_i}{R} = 0 \quad (6.6-2)$$

$$C \cdot \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} = \frac{u_i}{R}$$

Merkitimällä oikea puoli nolllaksi saadaan homogeeninen yhtälö $Cu' + u/R = 0$, jonka ratkaisu on muotoa

$$du/u = -dt/RC \quad \rightarrow \quad u_h(t) = Ke^{-t/RC}. \quad (6.6-3)$$

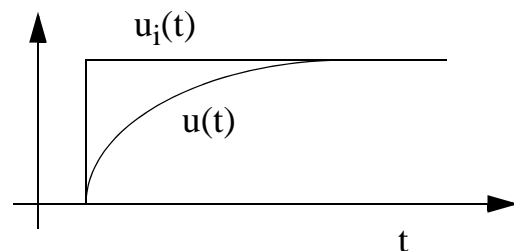
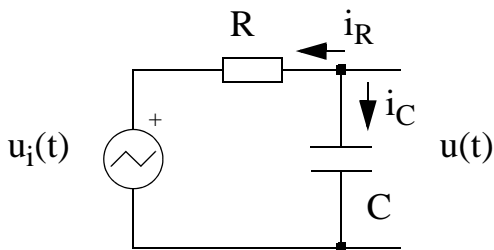
Heräte $u_i(t)$ on askel, joten kokeillaan erityisratkaisuksi muotoa $u_p(t) = A + B\text{step}(t)$. Askel-termi on jätettävä pois, koska sen derivaatta olisi impulssi, jota ei näy yhtälön oikealla puolella. Näin yritteeksi riittää pelkkä vakio A , jolloin

$$C \cdot 0 + A/R = U_o/R, \quad \text{josta } A = U_o \quad (6.6-4)$$

Kokonaisratkaisu on homogeenisen yhtälön ja erityisratkaisun summa, jolloin

$$u(t) = u_p(t) + u_h(t) = U_o + Ke^{-t/RC} = U_o(1 - e^{-t/RC}) \quad (6.6-5)$$

Vakio K on ratkaistu alkuehdosta $u(0^-) = 0$, mikä pakottaa $K = -U_o$.



Havainnot:

- steady-state -tilanteessa lähtöjännite $u(t)$ on sama kuin tulojännite $u_i(t)$
- aluksi C on tyhjä ja sen jännite lähtee muuttumaan jatkuvasti, s.o. ilman askelmuutoksia, jolloin myös energia $Cu^2/2$ muuttuu jatkuvasti

Kohta b)

Taas virtayhtälö (KCL) antaa suoraan $u(t)$:ta kuvaavan yhtälön

$$i_C + i_R = 0$$

$$C \cdot \frac{d(u - u_i)}{dt} + \frac{u}{R} = 0 \quad (6.6-6)$$

$$C \cdot \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} = C \cdot \frac{du_i}{dt}$$

Merkitimällä oikea puoli nolllaksi saadaan homogeeninen yhtälö, jonka ratkaisu ($t > 0$) on jälleen muotoa

$$u_h(t) = Ke^{-t/RC}. \quad (6.6-7)$$

Nyt heräte on derivoitu askel eli impulssi ($u_i(t) = U_o \text{step}(t)$), joten kokeillaan erityisratkaisuksi termiä $u_p(t) = A + B\text{step}(t)$, jolloin saadaan

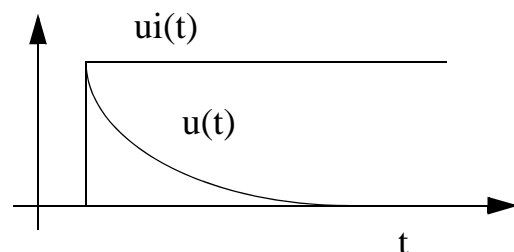
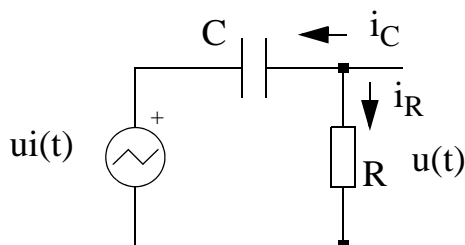
$$CB\delta(t) + (A+B\text{step}(t)) / R = C \delta(t) U_o, \quad (6.6-8)$$

josta pakottamalla vakio-osan ja impulssin $\delta(t)$ kertoimet kummallakin puolen yhtälöä samoiksi ($CB=CU_o$ ja $(A+B\text{step}(t))/R=0$) saadaan $B = U_o$ ja $A = -U_o$. Nyt

$$u(t) = U_o (-1 + \text{step}(t)) + Ke^{-t/RC} \quad (6.6-9)$$

josta alkuehto $u(0^-)=0$ antaa $K = U_o$, jolloin ratkaisu on

$$u(t) = U_o e^{-t/RC}, \text{ kun } t > 0. \quad (6.6-10)$$



Havainnot:

- steady-state -tilanteessa lähtöjännite menee nolllaksi (DC ei pääse läpi)
- kondensaattori C vetää lähdön ylös, kunnes siihen latautuu u_i :tä vast. jänn.

Kohta c)

Silmukavirtayhtälö koko lenkissä antaa

$$(R_1 + R_2) \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt = U_o \cdot \text{step}(t) \quad (6.6-11)$$

joka derivoimalla saadaan

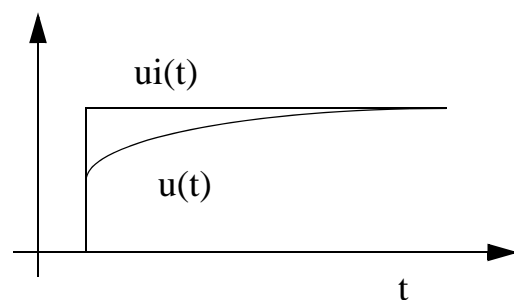
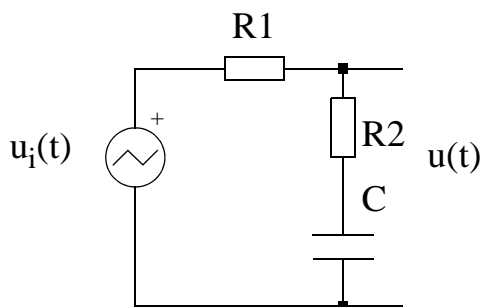
$$(R_1 + R_2) \cdot \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} \cdot i(t) = U_o \cdot \delta(t) \quad (6.6-12)$$

Homogeeninen ratkaisu on muotoa $i_h(t) = K \exp(-t/C(R_1+R_2))$, ja kokeilemalla erikoisratkaisuksi vakion ja askelen summaa $i_p(t) = A + B \text{step}(t)$ saadaan kokonaisvirraksi

$$i(t) = \frac{U_o \cdot \text{step}(t)}{R_1 + R_2} \cdot \exp\left(\frac{-t}{C(R_1 + R_2)}\right) \quad (6.6-13)$$

ja haarassa R2-C muodostuvaksi lähtöjännitteeksi $u_o(t) = i(t) \cdot R_2 + \frac{1}{C} \cdot \int i dt$

$$u(t) = U_o \cdot \text{step}(t) \cdot \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \exp\left(\frac{-t}{C(R_1 + R_2)}\right)\right) \quad (6.6-14)$$



Havainnot:

- kun C on aluksi tyhjä, lähtö nousee vain $R_2/(R_1+R_2)$ -osaan tulojännitteestä
- kondensaattorin lataantuessa lähtö nousee tulojännitteen tasolle
- latausvirta kulkee kummankin vastuksen läpi, joten aikavakio on $C(R_1+R_2)$

Kohta d)

KCL lähtösolmussa antaa yhtälön

$$C \cdot \frac{d(u - u_i)}{dt} + \frac{(u - u_i)}{R_1} + \frac{u}{R_2} = 0 \quad (6.6-15)$$

$$C \cdot \frac{du}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot u = C \cdot \frac{du_i}{dt} + \frac{u_i}{R_1}$$

Merkitsemällä oikea puoli nolllaksi saadaan homogeeninen yhtälö, jonka ratkaisu on muotoa

$$u_h(t) = Ke^{-t/\tau} \quad (6.6-16)$$

missä

$$\tau = CR_1R_2/(R_1+R_2) \quad (6.6-17)$$

Nyt heräte on impulssin ja askelen summa, ja sille voidaan kokeilla erityisratkaisuksi termiä $u_p(t) = A + B\text{step}(t)$, jolloin saadaan

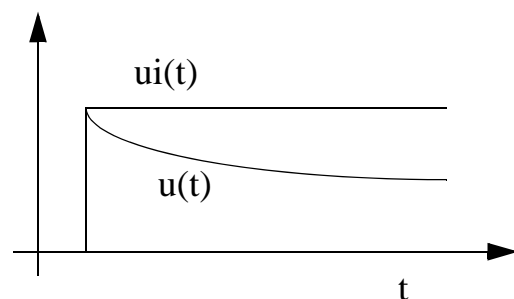
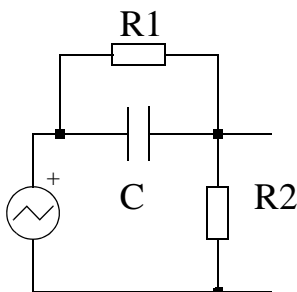
$$CB\delta(t) + (A+B\text{step}(t)) (1/R_1+1/R_2) = C \delta(t) U_o + U_o/R_1, \quad (6.6-18)$$

josta $B = U_o$ ja $A = -U_o R_1/(R_1+R_2)$. Tällöin siis

$$u(t) = U_o (-R_1/(R_1+R_2) + \text{step}(t)) + Ke^{-t/\tau} \quad (6.6-19)$$

josta alkuehto $u(0^-)=0$ antaa $K = U_oR_1/(R_1+R_2)$, jolloin ratkaisu ($t > 0$) on

$$u(t) = U_o (\text{step}(t) - R_1/(R_1+R_2) (1-e^{-t/RC})) \quad (6.6-20)$$



- aikavakiossa näkyy nyt vastusten rinnankytkentä: C latautuu ja purkautuu kahta eri reittiä

Ja esimerkiksi Maplella ratkaistuna ...

Maple (käynnistyy Unix-koneissa komennolla `xmple &`) on symboliseen laskentaan pystyvä ohjelma, jolla voi tarkistaa tekemiään laskelmia. Ohessa on esimerkin c) laskemiseen tarvittavat Maplen komennot:

```
restart;                                # tyhjä puskurimuistin
infolevel[dsolve] := 3;                # näyttää tarkemmin mitä tekee

ode := i(t)*(R1+R2) + (1/C)*int(i(t),t) = U*Heaviside(t);
                                           # yhtälö (6.6-11)

oded := diff(ode,t);                    # sama differentiaalimuodossa (6.6-12)

dsolve({oded,i(0)=0},i(t));             # i(t):n ratkaisu kun i(0)=0

subs(% ,R2*i(t)+(1/C)*int(i(t),t));     # lasketaan lähtöjännite sijoittamalla
                                           # em. i(t):n ratkaisu R2 ja C:een

simplify(%);                             # siistitään saatua tulosta
```

Maplessa symboli `%` tarkoittaa viimeisen operaation tulosta, jota voidaan muokata edelleen. Symbolia `#` on käytetty yllä kommentimerkinä, mutta ko. kommentteja ei tarvitse antaa. `Heaviside()` tarkoittaa askelfunktiota, `Dirac()` impulssifunktiota.

6.7 Signaalilähteen tyypin vaikutus

Verkon topologian lisäksi sen aikavakioihin vaikuttaa se, minkätyyppisellä lähteellä sitä ohjataan: jännitelähde kykenee antamaan tarvittaessa äärettömän määrän virtaa, kun taas virtalähde antaa aina vakiovirran. Näitä kutsutaan yleensä nimellä

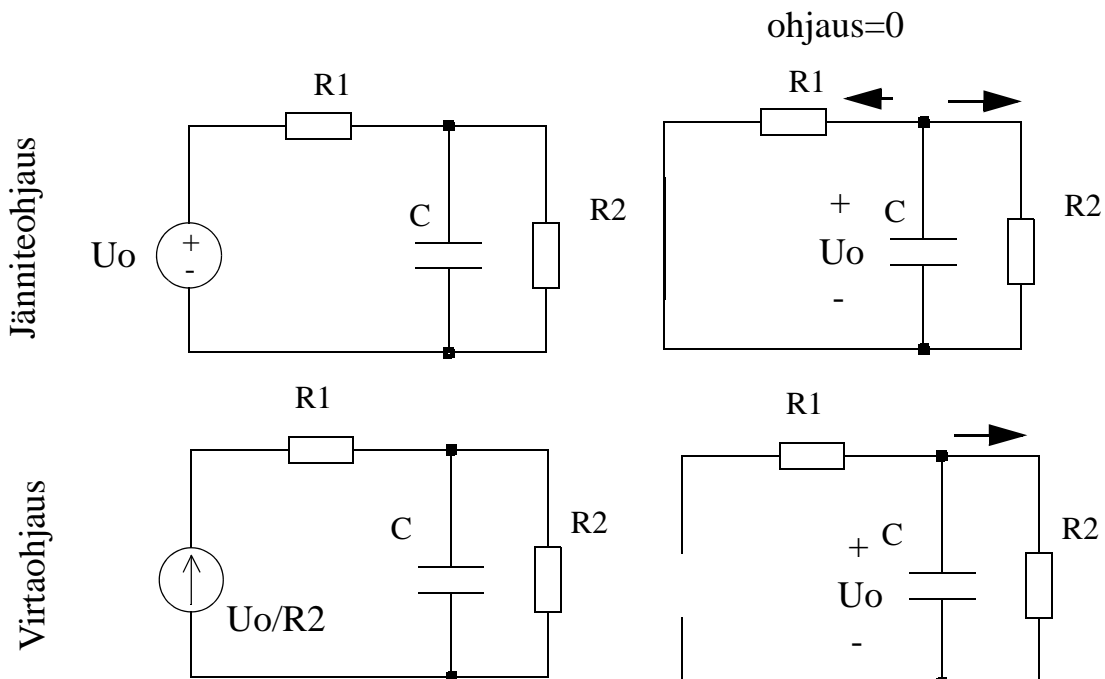
short-circuit time constant (SC): jännitelähde tulkitaan tarvittaessa äärettömästi virtaa antavaksi oikosuluksi, joten piirin aikavakiot voidaan laskea oikosulke-malla jännitelähteet.

open-circuit time constant (OC): virtalähde tulkitaan vain vakiovirran antavaksi lähteeksi, joten piirin aikavakiot voidaan laskea avaamalla virtalähteet.

Esim.

Oheisessa kuvassa on sama piiri jännite- ja virtalähteellä ohjattuna. Oletetaan, että kapasitanssiin C latautuu jokin jännite ja sitten ohjaus palautuu nolnaan, so. jännitelähde kuvataan oikosulkuna ja virtalähde katkoksenä. Nyt C :n varaus pääsee purkautumaan jännitelähteen tapauksessa $R1$:n ja $R2$:n rinnankytkennän kautta, mutta virtalähteen tapauksessa vain $R2$:n kautta. Siis

Piirin aikavakiot riippuvat ohjauksen tyypistä !!



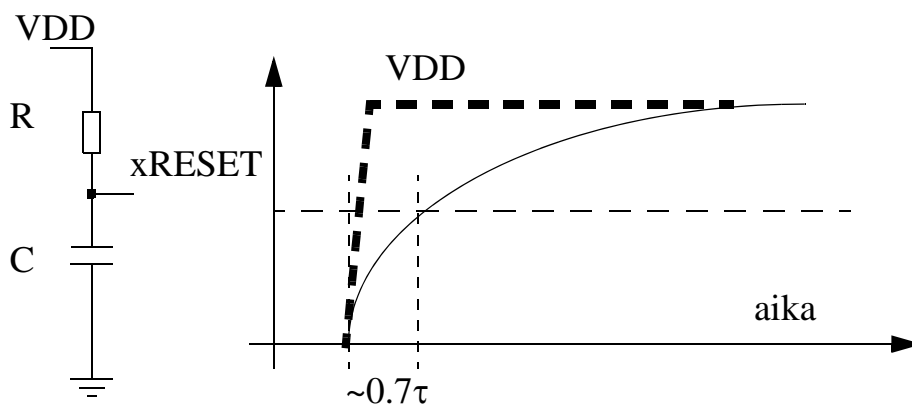
6.8 Muutamia esimerkkejä

Reset-piiri

Oheisessa kuvassa on esitetty yksinkertainen reset-piiri, joka antaa laitteelle alhaalla aktiivisen reset-signaalin kun käyttöjännitteet kytketään päälle. Kun laite kytketään päälle, käyttöjännite VDD nousee, mutta reset-signaalia xRESET hidastetaan RC-aikavakiolla. xRESET-signaalin aaltomuoto on

$$xRESET(t) = VDD \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (6.8-1)$$

joka saavuttaa kynnystason VDD/2 ajassa $t = RC \ln(2) = 0.69RC$. Näin käynnistysvaiheeseen saadaan alkuun alhaalla aktiivinen ohjauspulssi, joka pakottaa piirin tiettyyn alkutilaan. Jos tarvitaan ylhäällä aktiivinen reset-signaali, vaihdetaan R:n ja C:n järjestys.



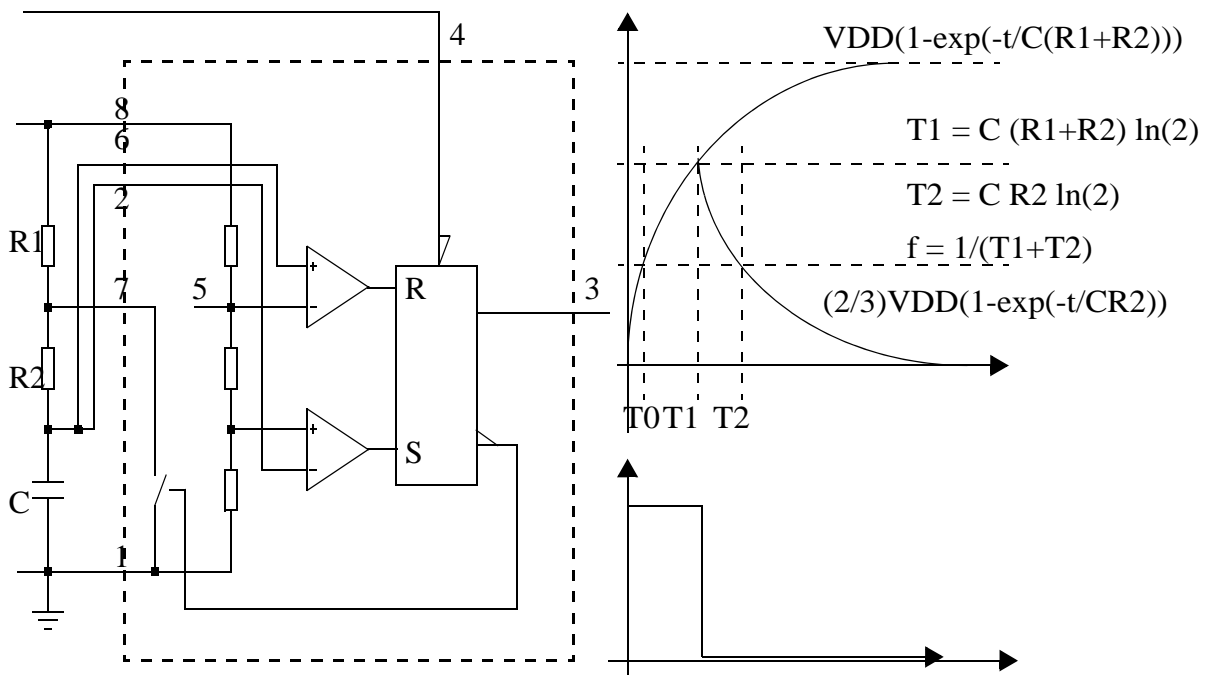
RC-alipäästöpiirin viive t_D (0%:sta 50% tasoon) ja nousuaika t_R (muutos 10% tasosta 90%:iin) ovat muotoa

$$\begin{aligned} t_D &= RC \cdot \ln(2) \approx 0,7RC \\ t_R &= RC \cdot \ln(9) \approx 2,2RC \end{aligned} \quad (6.8-2)$$

Ajastinpiiri 555

Vanha 555 ajastinpiiri on edelleen maailman käytetyimpiä diskreettikomponentteja. Sillä voidaan tuottaa joko määrälävyisiä pulsseja tai jaksollista värähtelyä, ja sen lähtöaste kykenee ohjaamaan esim. relettä ($I_{out} = 200 \text{ mA}$). Piiri koostuu kahdesta komparaattorista, joiden kynnystasot ovat $(1/3) \cdot VDD$ ja $(2/3) \cdot VDD$, ja aikavakiot asetetaan kahdella ulkoisella vastuksella ja yhdellä ulkoisella kondensaattorilla.

Kondensaattori C latautuu kohti käyttöjännitettä vastusten $R1+R2$ kautta. Kun kondensaattorin jännite ylittää tason $(2/3) \cdot VDD$, sitä aletaan purkaa $R2$:n kautta kohti nollaa volttia. Pulssikäytössä $R2$:ta ei tarvita, mutta jaksollisessa käytössä $R2$:lla vaikutetaan lähdon alhaalla olevan jakson pituuteen. Pulssimoodissa kondensaattorin jännite latautuu nollasta tasoon $(2/3) \cdot VDD$ ja puretaan sitten. Jaksollisessa käytössä kondensaattorin jännite sahaa välillä $(1/3) \cdot VDD - (2/3) \cdot VDD$.

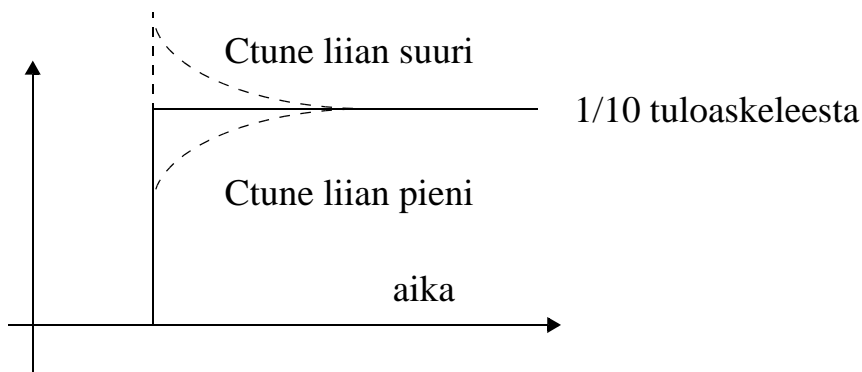
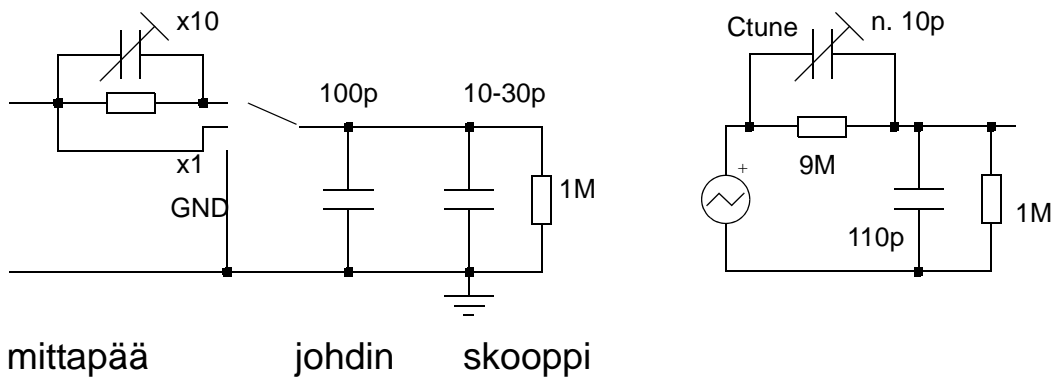


Esim. tehdään kapasitanssimittari RC-piirillä, komparaattorilla ja laskurilla.

Esim. Oskilloskoopin x10 vaimentava mittapää

Oskilloskoopin mittajohdon kapasitanssi on n. 100 pF/m, mikä aiheuttaa kovan kapasitiivisen kuormituksen mitattavaan pisteeseen - tämän takia esim. mitattavan logiikkaportin viive voi moninkertaistua. Johdon kapasitanssi voidaan erottaa kuormasta suurella sarjaresistanssilla, mutta tällöin mittajohdon aikavakio kasvaa hyvin suureksi, mikä syö mittauksen kaistanleveyden ja pulssimuodot pyöristyvät. Tämä korjataan ohituskondensaattorilla Ctune, jolloin mittapäässä on itse asiassa kaksi rinnakkaista 1:10 vaimenninta: resistiivinen ja kapasitiivinen jännitejako. Tällä mittapään tulokapasitanssi on saatu pudotettua siedettävään n. 10 pF arvoon

Jännitejaon tarkkuus riippuu oskilloskoopin tulokapasitanssista, joten mittapää on viritettävä: skoopin CAL-lähdöstä saadaan sakara-aaltoa, ja mittapään säätöruuvia pyörittämällä saadaan askelvaste tasaiseksi.

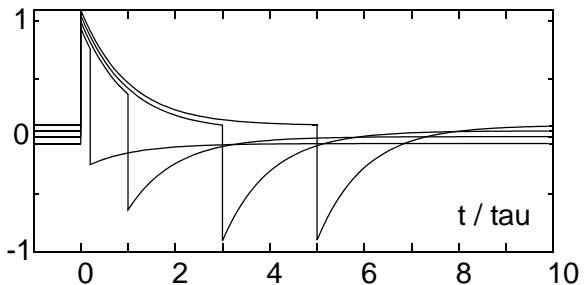
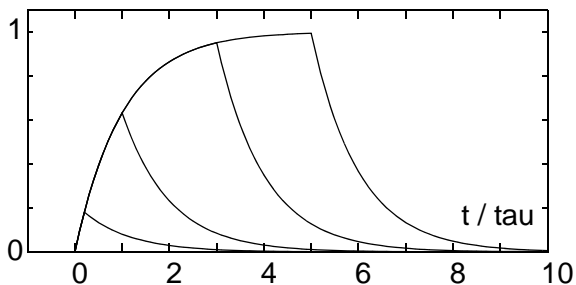
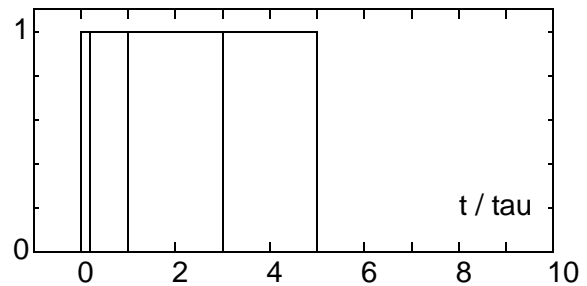
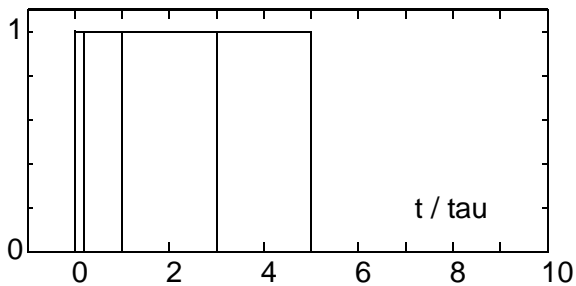
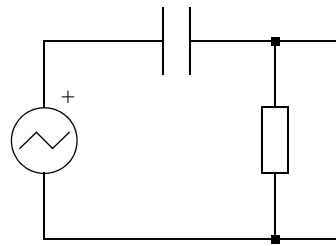
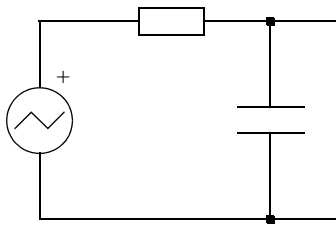


Esim. Ali- ja ylipäästösuodattimen askelvasteet

Alla olevassa kuvassa on esitetty 1. asteen ali- ja ylipäästösuodattimen askelvas- teet pulsseille, joiden leveys on 0.2, 1, 3 ja 5 kertaa aikavakio tau.

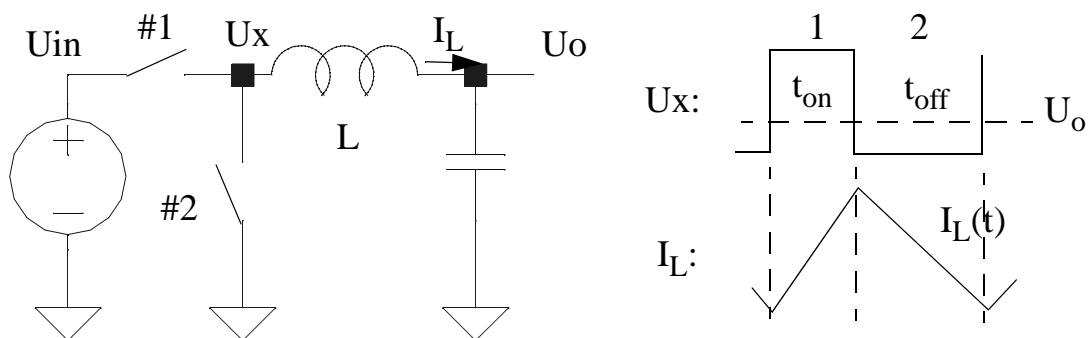
Alipäästösuodattimessa lyhyt pulssi ei ehdi nousta täyteen amplitudiin, vaan pulssi jää matalaksi tynkápulssiksi. Kun pulssinleveys on >4 kertaa aikavakion mit- tainen, pulssi ehtii nousta liki täyteen amplitudiinsa.

Kapea pulssi läpäisee hyvin ylipäästösuodattimen, mutta leveämmän pulssin taso **sakkaa** (laskee kohti nollaa), ja vastaavasti takareuna lyö tuloaskelen verran alaspäin, jolloin lähtö menee negatiiviselle puolelle. Leveästä pulssista näkyy läh- dössä oikeastaan vain reunat: ylöspäin oleva piikki nousevalla reunalla ja alaspäin oleva piikki laskevalla reunalla.



Esim. Alashakkurin (Buck) toiminta

Alashakkurissa kelan tulopäätä kytketään jaksollisesti vuoron perään maahan (0 V) ja jännitteeseen U_{in} tietyllä pulssisuhteella t_{on}/T . Tällöin lähtöjännite U_o (joka on suodatettu raskaasti, eikä juurikaan muutu jakson aikana) asettuu tiettyyn DC-arvoon, joka voidaan laskea seuraavasti:



Jakso 1: Kelan vasen pää on kytketty jännitelähteeseen U_{in} , ja kelavirta I_L kasvaa seuraavan yhtälön mukaisesti

$$I_L(t_{on}) = I_L(0) + \frac{1}{L} \cdot \int_0^{t_{on}} (U_{in} - U_o) dt = I_L(0) + \frac{(U_{in} - U_o) \cdot t_{on}}{L} \quad (6.8-3)$$

Jakso 2: Kelan vasen pää on kytketty maihin, jolloin kelavirta pienenee

$$I_L(T) = I_L(t_{on}) + \frac{1}{L} \cdot \int_0^{t_{off}} (0 - U_o) dt = I_L(t_{on}) + \frac{-U_o \cdot t_{off}}{L} \quad (6.8-4)$$

Tasapainotilanteessa U_o on asettunut sellaiseksi, että virran muutokset kummankin jakson aikana kompensoivat toisensa ($I_L(T) = I_L(0)$). Siis

$$\frac{(U_{in} - U_o) \cdot t_{on}}{L} = \frac{U_o \cdot t_{off}}{L} \quad (6.8-5)$$

josta Buck-muuntimelle

$$\frac{U_o}{U_{in}} = \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} = \frac{t_{on}}{T} \quad (6.8-6)$$

Jännitteenmuutos tapahtuu lähes häviöttä, eli hyvällä hyötysuhteella.

7. SINIMUOTOISTEN SIGNAALIEN ESITTÄMINEN OSOITINLASKENNALLA

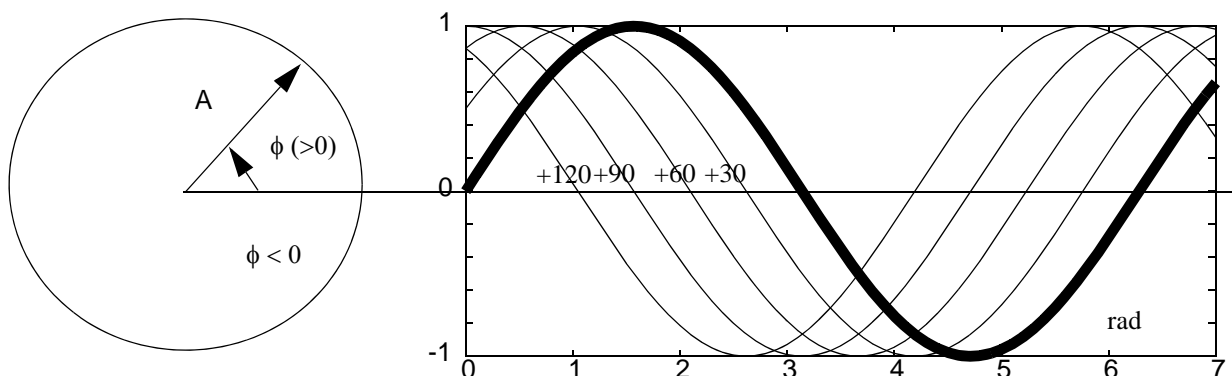
7.1 Taustaa

Differentiaaliyhtälöiden ratkaisua helpottaa, jos herätteenä käytetään funktiota, jonka derivaatat ovat saman muotoisia kuin funktio itse. Tällaisia funktioita ovat $\exp()$ - ja $\sin()$ -funktiot. Sinisignaaleilla on myös helppo tutkia verkkojen taajuusvasteita eli vahvistuksen ja vaihesiirron muuttumista taajuuden funktiona, joten vaste jatkuvalla sinimuotoiselle signaalille on erittäin tärkeässä asemassa. Englanniksi puhutaan CW-herätteestä (continuous wave) ja SS-vasteesta (steady state; asettuneen tilan jaksollinen vaste).

$$u(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (7.1-1)$$

Sinisignaalilla on kolme tärkeää ominaisuutta: taajuus f (tai kulmataajuus $\omega=2\pi f$), amplitudi A ja vaihesiirto (s.o. vaihe ajanhetkellä $t=0$) ϕ . Usein verkkoja analysoidaan tietyllä tunnetulla taajuudella f , joten ratkaistavaksi jää amplitudi ja vaihe. Nämä voidaan esittää yhdellä vektorilla, jonka mitta on A ja suunta on ϕ , ja vektori puolestaan voidaan esittää em. napakoordinaatti- (polar) tai suorakulmaisessa muodossa (cartesian). Kumpaankin esitysmuotoon kompleksiluvut soveltuvat hyvin.

Tässä luvussa opetellaan analysoimaan jatkuvan sinisignaalin vastetta käyttämällä kompleksiosoittimia. Osoitinlaskennan suurin etu on se, että herätteen ja derivaattojen samanmuotoisuuden takia differentiaaliyhtälö katoaa.



+vaihe edistää,
-vaihe jätättää

Osoitinlaskennan lähtökohta on **Eulerin kaava** (v.1748), joka esittää kompleksilukuarvoisen eksponenttifunktion sini- ja kosinifunktioiden avulla. Eulerin mukaan

$$e^{\sigma+j\alpha} = e^{\sigma}(\cos\alpha + j \sin\alpha), \quad (7.1-2)$$

missä σ ja α ovat reaalilukuja ja

$$j = \sqrt{-1} \quad (7.1-3)$$

Eulerin kaava kuvaa suoraan yhteyden suorakulmaisessa ja napakoordinaatissa esitettyjen kompleksilukujen välille (α on vaihe ja $e^{\sigma}\cos\alpha$ ja $e^{\sigma}\sin\alpha$ reaal- ja imaginääriosat). Samalla se muodostaa yhteyden sinisignaalien ja kompleksiarvoisten eksponenttien välille. Lasketaan Eulerin kaava kahdella eri arvolla:

$$Ae^{j\omega t} = A(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) \quad (7.1-4)$$

$$Ae^{-j\omega t} = A(\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) \quad (7.1-5)$$

Kun nämä joko lasketaan yhteen tai vähennetään toisistaan, **reaalinen sini ja kosini voidaan esittää kompleksieksponenttien summana.**

$$A\sin(\omega t) = A(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) / 2j = \text{Imag}(Ae^{j\omega t}) \quad (7.1-6)$$

$$A\cos(\omega t) = A(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) / 2 = \text{Real}(Ae^{j\omega t}) \quad (7.1-7)$$

Seuraavassa kerrataan tarvittavat trigonometriset ja kompleksilukujen laskutoimitukset, ja sovelletaan sitten osoitinlaskentaa reaktiivisten piirien vasteen laskemiseen.

(Eulerin kaava todistetaan e^{jx} :n sarjakehitelmän avulla ja muistaen että $j^2 = -1$:

$$\begin{aligned} e^{jx} &= 1 + jx + (jx)^2/2! + (jx)^3/3! + (jx)^4/4! \dots \\ &= 1 - x^2/2! + x^4/4! + \dots + j(x - x^3/3! + \dots) \\ &= \cos(x) + j\sin(x) \end{aligned}$$

ks. Wikipedia, Euler's formula)

7.2 Trigonometrinen kaavojen käyttö

Hyvin monissa piirianalyysitavoissa herätteenä käytetään sinimuotoisia signaaleja, koska niillä on muutamia merkittäviä, pääasiassa analyysia mutta myös käytännön sovelluksia helpottavia piirteitä:

- Samantaajuisten sinimuotoisten signaalien summa on samantaajuinen sinimuotoinen signaali: vain amplitudi ja vaihe muuttuvat
- Sinimuotoisen signaalin derivoinnin ja integroinnin tulos on samantaajuinen sinimuotoinen signaali. Signaalin muoto ei siis muutu derivoitaessa tai integroitaessa.
- Epälineaarissa operaatioissa (signaalien kertominen keskenään, potenssiin korotus jne.) myös signaalin taajuus muuttuu

Tärkeimpiä trigonometrisia sääntöjä ovat sinin ja kosinin yhteenlaskusäännöt:

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y\end{aligned}\tag{7.2-1}$$

Näistä voidaan johtaa lähes kaikki tarvittavat trigonometriset kaavat, mm. sini- ja kosinitermien summaamisesta aiheutuvan vaihesiirron laskeminen

$$\cos(x + \varphi) = \cos x \cdot \cos \varphi - \sin x \cdot \sin \varphi\tag{7.2-2}$$

josta

$$\begin{aligned}A \cdot \cos x + B \cdot \sin x &= \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos(x + \delta) \\ \delta &= \operatorname{atan}(-B/A)\end{aligned}\tag{7.2-3}$$

ja epälineaaristen operaatioiden aiheuttamat taajuusmuutokset

$$\sin x \cdot \cos y = 0,5 \cdot (\sin(x + y) + \sin(x - y))\tag{7.2-4}$$

Lisäksi on hyvä muistaa, että $\cos(x) = \cos(-x)$, mutta $\sin(-x) = -\sin(x)$ (kosini on parillinen ja sini pariton funktio).

Trigonometrian kaavojen käyttö on kuitenkin melko lailla työläämpää kuin kompleksiosoitimilla laskeminen.

7.3 Kompleksiluvuista

Alla on kerrattu eräitä kompleksilukujen perusoperaatioita. Kerto- ja jakolasku sekä potenssiinkorottamiset on yleensä tehokkainta laskea polaarisisä muodossa, kun taas kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku on tehokkainta tehdä suorakulmaisessa (karteesisessa muodossa).

$$j = \sqrt{(-1)}, \quad \text{eli } j^2 = -1 \quad (7.3-1)$$

Kompleksikonjugaatti

$$a = x + jy = Ae^{j\alpha} \text{ :n kompleksikonjugaatti } a^* \text{ on}$$

$$a^* = x - jy = Ae^{-j\alpha}$$

Summa ja erotus

$$a + b = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \quad (7.3-2)$$

$$a - b = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \quad (7.3-3)$$

Tulo ja osamäärä

$$ab = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) = AB e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (7.3-4)$$

$$a/b = ab^*/(bb^*) = (x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2) / ((x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2))$$

$$= ((x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_1y_2 - x_2y_1)) / (x_2^2 + y_2^2) = (A/B) e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (7.3-5)$$

$$1/j = (-j) / (-j)(j) = -j / 1 = -j \quad (7.3-6)$$

Vektorin pituus (tai sen neliö)

$$A^2 = |a|^2 = a a^* = (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2 \quad (7.3-7)$$

Potenssiin korottaminen

$$a^n = (e^{\sigma + j\alpha})^n = e^{n\sigma + jn\alpha} = e^{n\sigma} (\cos(n\alpha) + j \sin(n\alpha)) \quad (7.3-8)$$

Huomaa, että $a^2 = A^2 e^{j2\alpha} = x^2 - y^2 + j2xy$, mutta $|a|^2 = a a^* = A^2 = x^2 + y^2$ ei sisällä enää vaihetta, vaan se on skalaari !

Kaikki sinimuotoisten signaalien käsittely voidaan periaatteessa tehdä trigonometrisiä kaavoja käyttäen, mutta lausekkeista tulee helposti hyvin pitkiä (ks. esim. (7.2-2)). Kompleksilukuja käyttäen voidaan yhdistää kaksi erilaista suuretta, kuten amplitudi ja vaihe, samaan lukuun, ja etenkin sinimuotoisten signaalien vaihesiirtoa on **huomattavasti kätevämpää** analysoida käyttäen kompleksiarvoisia eksponenttifunktioita. Samalla tavoin ne ovat käteviä esim. koordinaatistojen kierron kuvaamiseen, ja ylipäättään kompleksilukuja voidaan pitää hyvänä keinona kuvata kaksiulotteisia ongelmia niin, että ulottuvuudet saadaan pidettyä erillään vaikka niitä lasketaan samoissa laskutoimituksissa.

Kuten todettiin, kompleksiarvoisen eksponenttifunktion määritelmä

$$e^{\sigma+j\alpha} = e^{\sigma}(\cos\alpha + j \sin\alpha), \quad (7.3-9)$$

missä

$$j = \sqrt{(-1)} \quad (7.3-10)$$

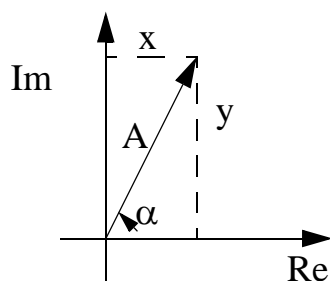
tarjoaa kaksi tulkintaa kompleksiluvulle z : se voidaan esittää joko reaali- ja imaginääriosasta koostuvassa **suorakulmaisessa muodossa**

$$z = x + jy \quad (7.3-11)$$

tai vektori- eli **osoitinmuodossa** (polaarisessa muodossa)

$$z = e^{\sigma+j\alpha} = e^{\sigma} e^{j\alpha} = A e^{j\alpha} \quad (7.3-12)$$

jossa A kuvaa vektorin pituutta ja α sen suuntaa. Jälkimmäinen muoto on erittäin kätevä kuvaamaan sinimuotoisia signaaleja, joiden amplitudi A ja vaihe α kiinnostaa. Koordinaatistojen väliset muunnokset on kerrattu alla:



$$x + jy = A e^{j\alpha}, \text{ missä}$$

$$A = \sqrt{(x^2 + y^2)} \text{ ja}$$

$$\alpha = \arctan(y/x)$$

eli

$$x = A \cos\alpha$$

$$y = A \sin\alpha$$

7.4 Sinimuotoisten signaalien esitystavat

Oletetaan nyt, että Eulerin kaavassa amplitudi on vakio A ja vaihekulma α kasvaa vakiotaaajuudella ω :

$$\alpha = \omega t + \phi \quad (7.4-1)$$

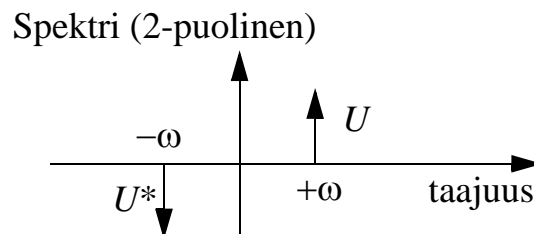
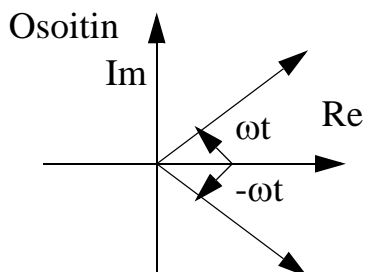
missä $\omega = 2\pi f$ on värähtelyn kulmataajuus ja ϕ vakio. Sijoittamalla nyt Eulerin kaavaan (7.3-9) arvot α ja $-\alpha$ ja laskemalla näiden termien erotus voidaan ja kosinifunktio esittää kompleksisten eksponenttien avulla:

$$A \cos(\omega t + \phi) = A (e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}) / 2 = (A e^{j\phi} e^{j\omega t} + A e^{-j\phi} e^{-j\omega t}) / 2 \quad (7.4-2)$$

Sini- ja kosinimuotoiset signaalit voidaan siis esittää **kahden kompleksisen eksponentin (osoittimen) summana**, joista toisessa vaihekulma ωt kiertää ajan t kasvaessa vastapäivään (kasvaa) ja toisessa myötäpäivään (pienenee) - näin toinen termi vastaa tavallaan positiivista ja toinen negatiivista taajuutta. Koska itse signaalien on oltava reaaliarvoisia, positiivisen ja negatiivisen taajuuskomponenttien amplitudien on oltava toistensa kompleksikonjugaatteja. Tällöin reaalin signaali voidaan esittää muodossa

$$u(t) = U \cos(\omega t + \phi) = U e^{j\omega t} + U^* e^{-j\omega t} \quad (7.4-3)$$

missä U ja U^* ovat toistensa kompleksikonjugaatteja (signaalissa oleva vaihe siirto ϕ voidaan esittää muodossa $U = A e^{j\phi}$, ja nyt positiivisilla taajuuksilla vaihe siirto on positiivista ja negatiivisilla miinusmerkkistä). Nämä on piirretty oheiseen kuvaan osoitinkuvana ja spektrikuvana, jossa näkyy myös negatiivinen taajuuskomponentti.



Jos siis halutaan olla matemaattisesti eksakteja, reaaliset sinimuotoiset signaalit on esitettävä positiivisella ja negatiivisella taajuudella olevan kompleksiosoitimen summana. Positiivisella ja negatiivisella taajuudella on kuitenkin sama informaatio, joten **lineaarisisissa systeemeissä** tietoa ei menetetä vaikka toinen termeistä jätettäisiin pois, jolloin laskenta yksinkertaistuu puoleen. Yleensä tarkkaillaankin vain taajuusakselin positiivista puolikasta eli positiivisia ω :n arvoja. Tällöin sinimuotoinen signaali voidaan kuvata yhdellä kompleksisella eksponentilla:

$$A \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) \rightarrow A e^{j\omega t} \quad (7.4-4)$$

Jos signaalilla on tietty alkuvaihe, sekin voidaan kuvata kompleksiosoitimella:

$$A \cos(\omega t + \phi) \rightarrow A e^{j\omega t + j\phi} = (A e^{j\phi}) e^{j\omega t} = A e^{j\omega t} \quad (7.4-5)$$

Tässä siis kompleksiluku A sisältää tiedon sekä amplitudista että vaiheesta, ja sitä kutsutaan nimellä **osoitin** (phasor). Osoittimen pyörivä osa $e^{j\omega t}$ jätetään laskeissa useimmiten merkitsemättä (tarkastellaan vain tilannetta $t=0$), sillä sinisignaalin vaste on joka tapauksessa saman taajuinen sini, josta kiinnostaa vain amplitudi ja vaihe. Sen sijaan signaalin taajuus ω vaikuttaa komponenttien I/V-suhteisiin ja siten yhtälöryhmän kertoimiin, kuten seuraavassa kappaleessa nähdään. Osoitin voi myös kuvata joko amplitudin huippuarvoa tai tehollisarvoa.

Kaikkiaan siis merkintä

$$u(t) = A e^{j\phi} \quad (7.4-6)$$

tai yksinkertaisemmin

$$A \angle \phi \quad (7.4-7)$$

tarkoittaa

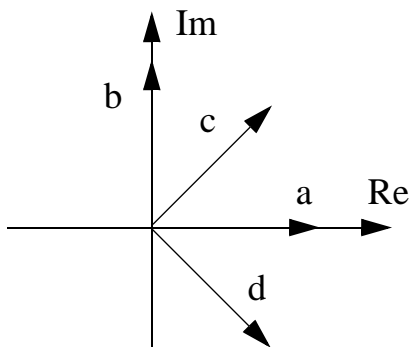
$$u(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (7.4-8)$$

Edellisestä huomataan myös, että jos vaihekulma $\phi = \pi/2$, kompleksiosoitin $e^{j\phi}$ saa arvon j . Siis j :lla kertominen vastaa $\pi/2$:n eli $+90$ asteen suuruista vaihesiirtoa ja vastaavasti $-j$:llä kertominen -90 asteen vaihesiirtoa. Tämä tulee esiintymään runsain mitoin reaktanssien jännitteen ja virran suhteita laskettaessa.

$$\begin{aligned} A e^{j\pi/2} &= \mathbf{j}A = +90^\circ \text{ vaihesiirto} \\ A e^{-j\pi/2} &= -\mathbf{j}A = -90^\circ \text{ vaihesiirto} \end{aligned}$$

Esim.

	Sinimuotoinen	A $\angle \phi$	polaari	suorakulm.
a)	$3 \cos(\omega t + 0)$	$3 \angle 0$	3	$3 + j0$
b)	$3 \cos(\omega t + \pi/2)$	$3 \angle 90$	$3e^{j\pi/2}$	$0 + j3$
c)	$3 \cos(\omega t + \pi/4)$	$3 \angle 45$	$3e^{j\pi/4}$	$(3/\sqrt{2})(1+j)$
d)	$3 \cos(\omega t - \pi/4)$	$3 \angle -45$	$3e^{-j\pi/4}$	$(3/\sqrt{2})(1-j)$

**Huom.**

Analysoitaessa **epälineaarisia ilmiöitä** (esim. sinin kertomista toisella sinillä) on käytettävä **sekä positiivisen että negatiivisen** taajuuden osoitinta.

$$\begin{aligned} \text{Esim. } \cos^3(\omega t) &= \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right)^3 = \frac{3(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) + (e^{j3\omega t} + e^{-j3\omega t})}{8} \\ &= \frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t) \end{aligned}$$

Tällöin on otettava huomioon, että plus- ja miinustaajuuksien osoittimet ovat toistensa kompleksikonjugaatteja

$$\begin{aligned} (\sin(\omega t))^3 &= \left(\frac{(-j)e^{j\omega t} + (j)e^{-j\omega t}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{3((-j)e^{j\omega t} + je^{-j\omega t}) + (je^{j3\omega t} + (-j)e^{-j3\omega t})}{8} \end{aligned}$$

7.5 Virran ja jännitteen suhde sinimuotoisilla signaaleilla

Jos verkon heräte on sinimuotoinen, voidaan em. kompleksilaskentaa käyttää verkon vasteen analysointiin. Aloitetaan johtamalla reaktanssien virta- ja jännite-riippuvuudet sinimuotoisille signaaleille. Koska sinin ja kosinin derivointi- ja integrointisäännöt toimivat vain kun vaihekulma on ilmoitettu radiaaneina, värähtelyn taajuus ilmoitetaan kulmataajuutena $\omega = 2\pi f$ (rad/s), missä f on värähtelyn taajuus (Hz).

Esitetään aluksi kosinifunktion derivaatta ja integraali kompleksiosoitimien avulla.

$$\begin{aligned}
 x &= A \cdot \cos(\omega t + \phi) = A \cdot \operatorname{Re}(e^{j(\omega t + \phi)}) \\
 \frac{dx}{dt} &= -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega t + \phi) = A \cdot \operatorname{Re}(j\omega \cdot e^{j(\omega t + \phi)}) \\
 \int x dt &= \frac{1}{\omega} \cdot A \cdot \sin(\omega t + \phi) = A \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{e^{j(\omega t + \phi)}}{j\omega}\right)
 \end{aligned} \tag{7.5-1}$$

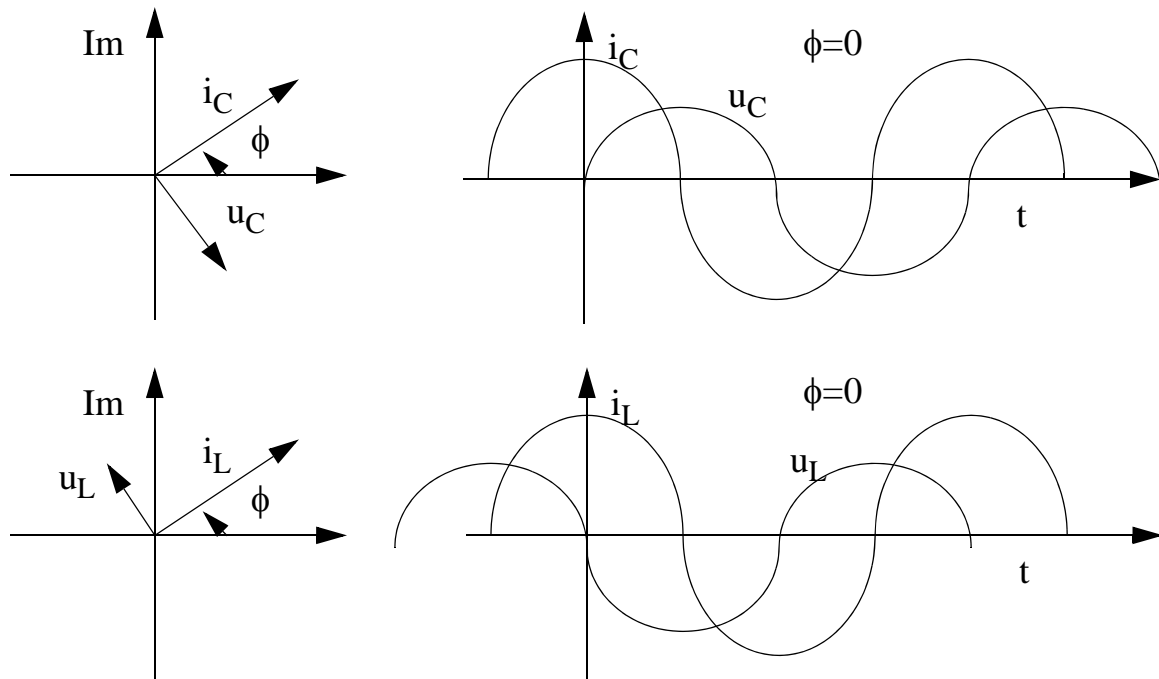
Kuten edellä todettiin, informaation määrä ei muutu, vaikka esitysmuodoista jätettäisiin reaaliosien laskeminen pois ja käytettäisiin pelkää kompleksiosoitinta. Näin siis kapasitanssin jännite $u(t)$ saadaan seuraavaan muotoon kun heräte on sinimuotoinen signaali $i(t) = Ie^{j(\omega t + \phi)}$:

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(t) dt \\
 &= \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t Ie^{j(\omega t + \phi)} dt \\
 &= \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot Ie^{j(\omega t + \phi)} \\
 &= \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot Ie^{j(\omega t + \phi - \pi/2)}
 \end{aligned} \tag{7.5-2}$$

Vastaavasti induktanssin yli oleva jännite $u(t)$ sinimuotoisella virta-herätteellä $i(t) = Ie^{j(\omega t + \phi)}$ on muotoa

$$\begin{aligned}
 u_L(t) &= L \cdot \frac{di}{dt} \\
 &= L \cdot \frac{d}{dt}(Ie^{j(\omega t + \phi)}) \\
 &= j\omega L \cdot Ie^{j(\omega t + \phi)} \\
 &= \omega L \cdot Ie^{j(\omega t + \phi + \pi/2)}
 \end{aligned}
 \tag{7.5-3}$$

Alla on esitetty nämä signaalit ajan funktiona sekä ns. pysäytettyinä osoitindiagrammeina. Osoitindiagrammi piirretään arvolla $\omega t=0$, jolloin se vastaa pysäytyskuvaa signaalista ajanhetkellä $t=0$. Osoittimet osoittavat jännite- ja virtasignaalin amplitudin (pituus) ja vaiheen (kulma), ja aikariippuvuus voidaan kuvitella siten, että osoitinkuvaajat pyörivät vastapäivään nopeudella ω rad/s.



Esim.

Lasketaan 3V kosinisisignaalin aiheuttama virta impedanssissa $Z=1+j$

$$U = 3 \angle 0^\circ = 3 \cos(\omega t + 0)$$

$$Z = 1 + j = \sqrt{2} \angle 45^\circ$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{3 \angle 0^\circ}{\sqrt{2} \angle 45^\circ} = \frac{3 \cdot e^{j0}}{\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \angle 0-45^\circ$$

(7.5-4)

7.6 Immittanssin käsite

Edellä olevasta havaitaan, että kun heräte on sinimuotoinen, reaktanssien virtajänniteriippuvuus on helppo esittää kompleksilukuina, jossa termi $e^{j\phi}$ kuvaa jännitteen ja virran välistä vaihesiirtoa. Kaavoista (7.5-2) ja (7.5-3) saadaan seuraavat virta-jänniteriippuvuudet, jotka ovat ohmin lain yleistys reaktiivisille komponenteille:

$$U = Z I \quad (7.6-1)$$

Tässä U , Z ja I ovat kompleksiosoitimia, ja suhdetta $U/I = Z$ kutsutaan **impedanssiksi**. Vastaavasti konduktanssin laajennus reaktiivisille komponenteille on muotoa

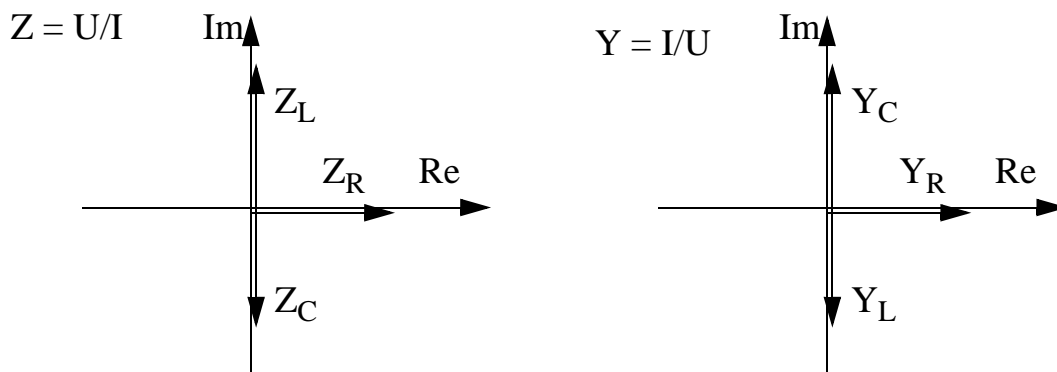
$$I = Y U \quad (7.6-2)$$

jossa suhdetta $Y = I/U$ kutsutaan **admittanssiksi**. Impedanssia ja admittanssia kutsutaan yleisnimellä immittanssi. Seuraavassa taulukossa on tiivistetysti passiivisten piirielinten immittanssit.

Taulukko 4: Piirielinten immittanssit sinimuotoiselle signaalille

	impedanssi $Z [\Omega] = U/I$	admittanssi $Y[S] = I/U$
L	$j\omega L$	$1 / (j\omega L) = -j / (\omega L)$
C	$1 / (j\omega C) = -j / (\omega C)$	$j\omega C$
R	R	$1 / R$

Ohessa on näiden impedanssien ja admittanssien osoitinkuvaajat:



Edellisestä huomataan seuraavaa:

- impedanssin määritelmä **pätee vain sinimuotoisille jatkuville signaaleille.**
- induktanssin ja kapasitanssin impedanssin suuruus riippuu taajuudesta. Niinpä **numeerisia laskuja varten on aina tunnettava signaalin taajuus.**
- induktanssi ja kapasitanssi kääntävät virran ja jännitteen keskinäistä vaihetta. Tätä varten niiden impedansseissa on **ehdottomasti oltava mukana imaginääriluku j.**
- admittanssi on impedanssin käänteisluku samoin kuin

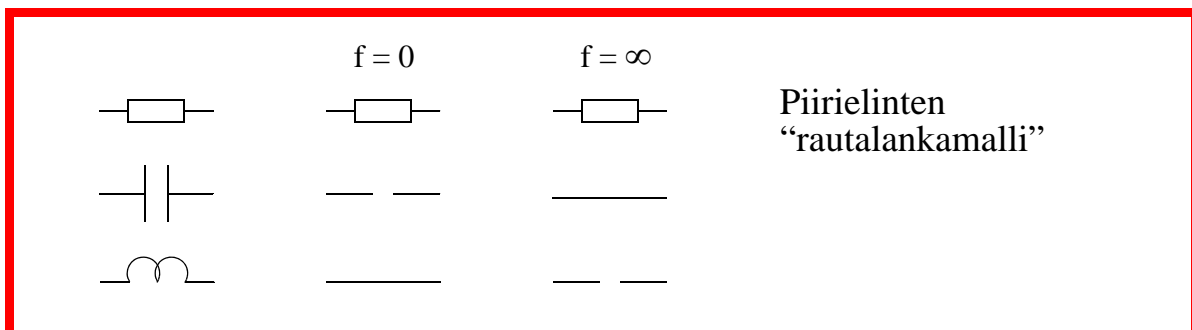
$$Z = 1 / Y \quad (7.6-3)$$

Impedanssin käsite on merkittävä, sillä

kaikki aiemmin resistiivisille verkoille kehitetyt menetelmät voidaan nyt ottaa käyttöön myös reaktiivisille komponenteille, kunhan herätesignaalit ovat sinimuotoisia.

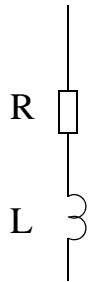
Myöhemmin Laplace-muunnosta käytettäessä samat resistiivisille verkoille kehitetyt menetelmät soveltuvat myös muiden kuin sinimuotoisten herätteiden laskentaan.

Impedanssien taajuusriippuvuudesta voidaan laskea arvot erilaisille rajatapauksille. Kun taajuus $\omega=2\pi f=0$, kapasitanssin impedanssi kasvaa äärettömäksi ja toisaalta induktanssin impedanssi putoaa nolnaan. Tällöin voidaan muodostaa seuraavat ‘rautalankamallit’ jotka havainnollistavat sitä, kuinka hyvin pientaajuiset tai hyvin suurtaajuiset sinisignaalit pääsevät erilaisten piirielinten läpi.

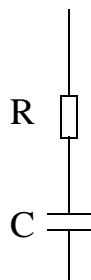
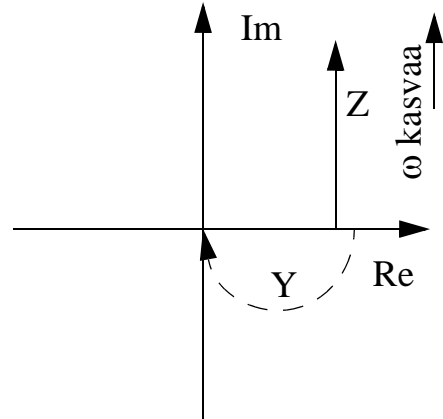


Esim. Muutamien piirien impedansseja ja admittansseja

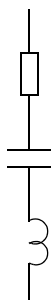
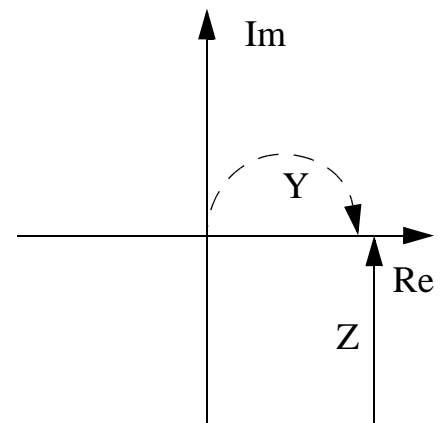
Sarjaankytkentöjä



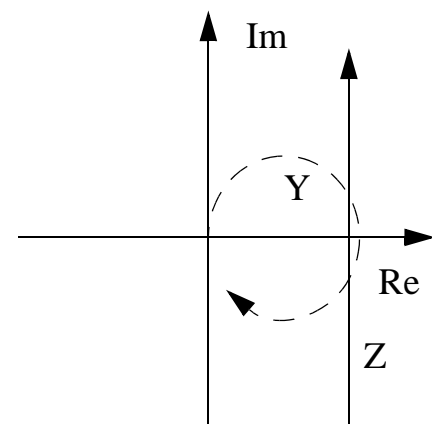
$$Z = R + j\omega L$$
$$Y = (R - j\omega L)/(R^2 + (\omega L)^2)$$



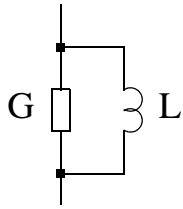
$$Z = R - j/\omega C$$
$$Y = (R + j/\omega C) / (R^2 + (1/\omega C)^2)$$



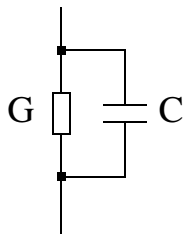
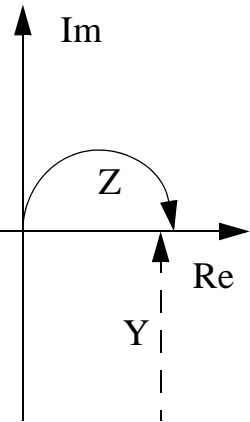
$$Z = R + j(\omega L - 1/\omega C)$$
$$Y = (R - j(\omega L - 1/\omega C)) / (R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2)$$



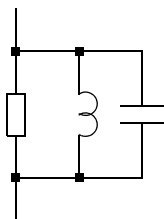
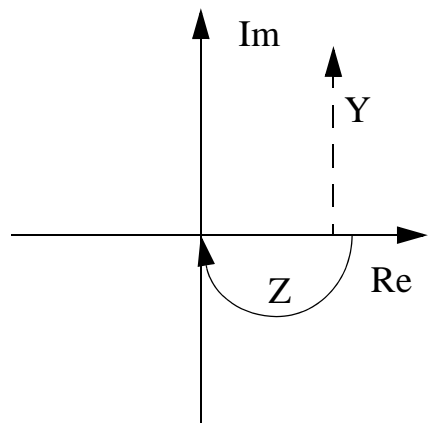
Rinnankytkentöjä



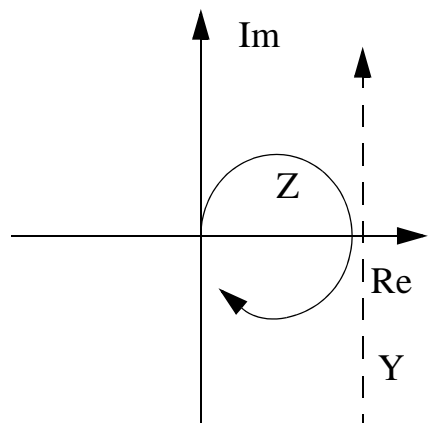
$$Z = (G + j/\omega L) / (G^2 + (1/\omega L)^2)$$
$$Y = G - j/\omega L$$



$$Z = (G - j\omega C) / (G^2 + (\omega C)^2)$$
$$Y = G + j\omega C$$

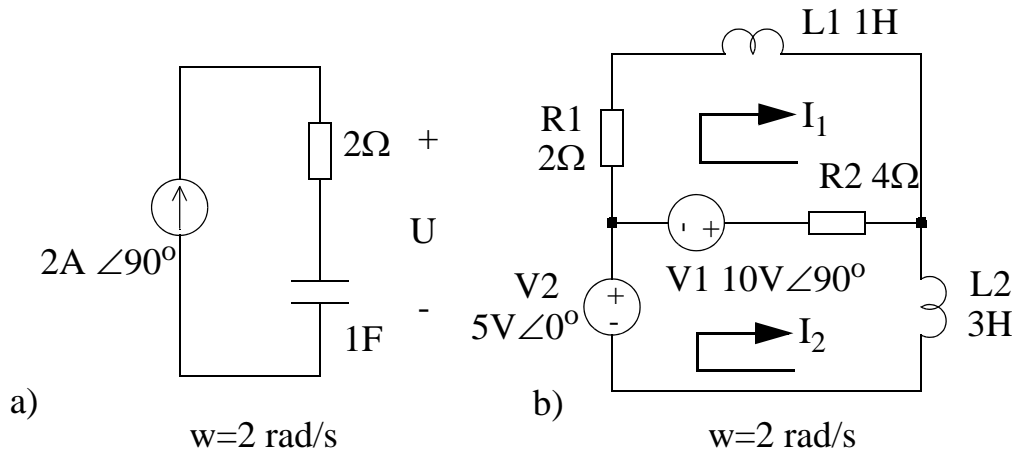


$$Z = (G - j(\omega C - 1/\omega L)) / (G^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2)$$
$$Y = G + j(\omega C - 1/\omega L)$$



Huomaa että pistetaajuudella sarjapiiri voidaan korvata saman immittanssin antavalla rinnakkaispiirillä, mutta laajalla taajuusalueella niiden käytös eroaa suuresti toisistaan.

Esimerkkejä



Lasketaan kuvassa a) syntyvä jännite U

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = 2 + \frac{1}{j \cdot 2 \cdot 1} = 2 - \frac{j}{2} = 2,06 \angle -14^\circ$$

$$U = Z \cdot I = \left(2 - \frac{j}{2}\right) \cdot 2j = 1 + 4j \quad (7.6-4)$$

$$= (2,06 \angle -14^\circ) \cdot (2 \angle 90^\circ) = 4,12 \angle 76^\circ$$

← arctan(4/1)

Z:aa vastaava admittanssi on muotoa

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{Z^*}{ZZ^*} = \frac{R - \frac{1}{j\omega C}}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{2,06} \angle 14^\circ \quad \text{kun } \omega = 2 \text{ rad/s} \quad (7.6-5)$$

Kuvassa b) kirjoitetaan silmukkavirtayhtälöt kummallekin silmukalle, muistamaan että $Z_L = j\omega L$ ja $10V \angle -90^\circ = -j10V$:

$$\begin{aligned} R_1 \cdot I_1 + j\omega L_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot (I_1 - I_2) &= -V_1 \\ R_2 \cdot (I_2 - I_1) + j\omega L_2 \cdot I_2 &= V_2 + V_1 \end{aligned} \quad (7.6-6)$$

Tämä saadaan komponenttiarvot sijoittaen matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} 2 + 4 + j\omega 1 & -4 \\ -4 & 4 + j\omega 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-j10) \\ 5 - j10 \end{bmatrix} \quad (7.6-7)$$

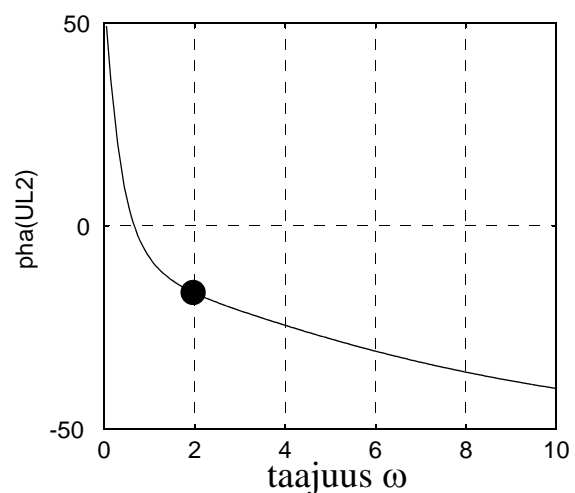
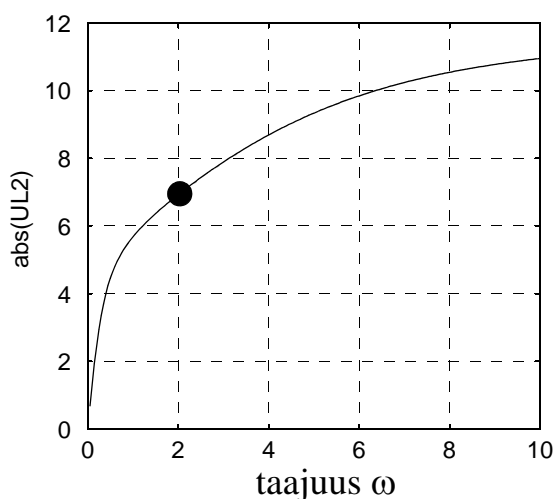
Tällöin esimerkiksi jännite U_{L2} kelan $L2$ yli saadaan Cramerin sääntöä käyttämällä

$$\begin{aligned}
 U_{L2} &= j\omega L_2 \cdot I_2 \\
 &= j\omega 3 \cdot \frac{\begin{vmatrix} 6 + j\omega 1 & j10 \\ -4 & 5 - j10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 + j\omega 1 & -4 \\ -4 & 4 + j\omega 3 \end{vmatrix}} \\
 &= j\omega 3 \cdot \frac{30 + 10\omega - j(20 + 5\omega)}{8 - 3\omega^2 + j22\omega}
 \end{aligned} \tag{7.6-8}$$

Tästä muodosta voidaan laskea U_{L2} :n arvo eri taajuuksilla (olettaen, että 90 asteen vaihe-ero $V1$:n ja $V2$:n välillä säilyy kaikilla taajuuksilla), ja U_{L2} :n amplitudi ja vaihe taajuuksilla 0-10 rad/s on näytetty alla.

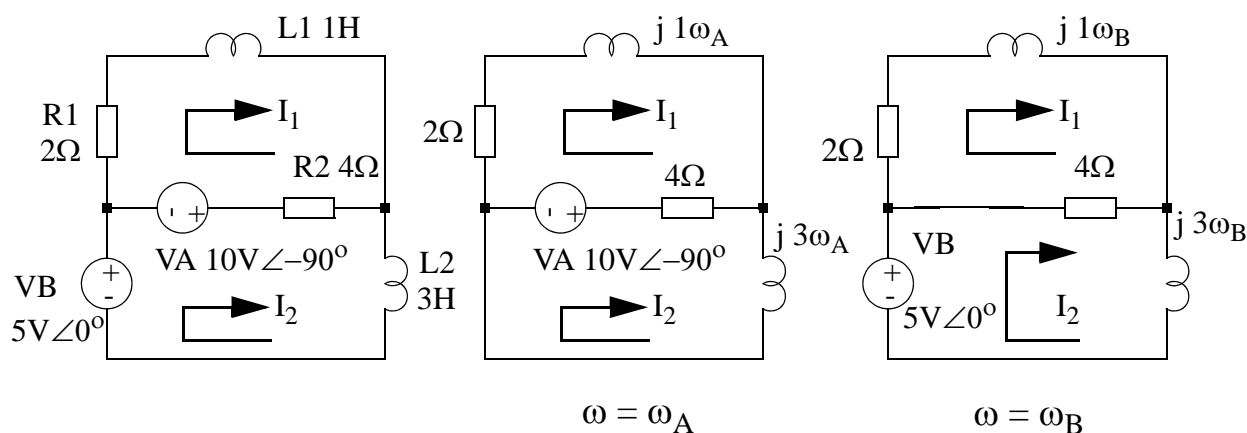
Jos meitä kiinnostaa toiminta pelkällä pistetaajuudella, voi arvon $\omega=2$ rad/s sijoittaa suoraan yhtälöryhmään ja ratkaista U_{L2} :n arvon numeerisesti, jolloin saadaan

$$U_{L2} = 6,64 - j1,97 = 6,92 \angle -16,5^\circ = 6,92 \cos(2t - 16,5^\circ) \tag{7.6-9}$$



Esim. Eri taajuiset signaalilähteet *

Jos jännitelähteet VA ja VB ovat eri taajuuksilla (ω_A ja ω_B), tulos lasketaan superpositiolla: vasteessa taajuudella ω_A näkyy lähteen VA vaikutus, mutta lähteen VB arvo taajuudella ω_A on nolla, ja päinvastoin.



Silmukavirtayhtälöt taajuudella ω_A (lähteen VA vaikutus)

$$\begin{aligned} R_1 \cdot I_{1A} + j\omega_A L_1 \cdot I_{1A} + R_2 \cdot (I_{1A} - I_{2A}) &= -V_A \\ R_2 \cdot (I_{2A} - I_{1A}) + j\omega_A L_2 \cdot I_{2A} &= V_A \end{aligned} \quad (7.6-10)$$

ja ω_B (lähteen VB vaikutus)

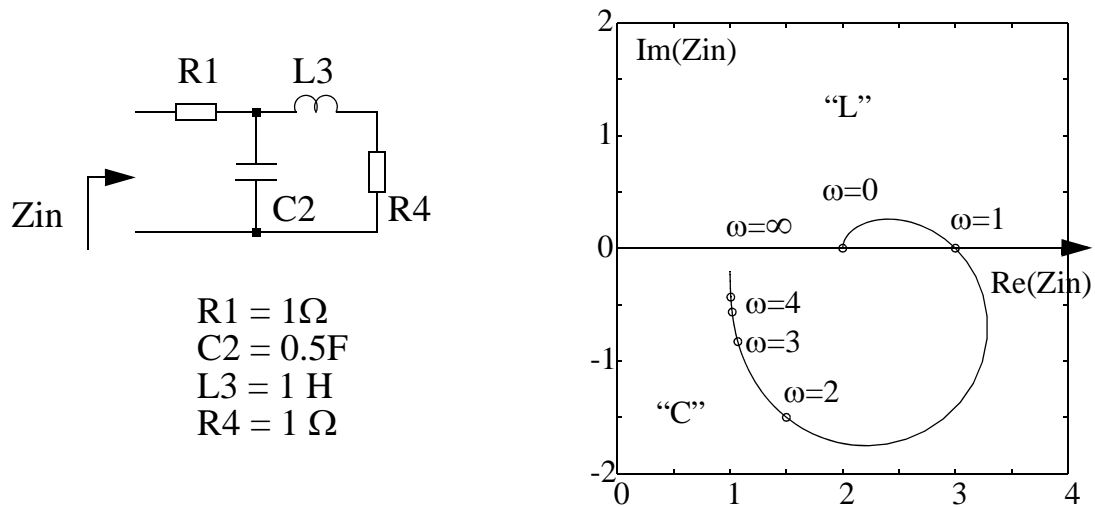
$$\begin{aligned} R_1 \cdot I_{1B} + j\omega_B L_1 \cdot I_{1B} + R_2 \cdot (I_{1B} - I_{2B}) &= 0 \\ R_2 \cdot (I_{2B} - I_{1B}) + j\omega_B L_2 \cdot I_{2B} &= V_B \end{aligned} \quad (7.6-11)$$

Yhtälöstä (7.6-10) lasketaan vaste taajuudella ω_A ja yhtälöstä (7.6-11) taajuudella ω_B . Näin siis esim. kokonaisvirta induktanssin L2 läpi on muotoa

$$\begin{aligned} I_{L2} &= I_{2A} + I_{2B} \\ &= |I_{2A}| \cdot \cos(\omega_A t + \angle I_{2A}) \\ &\quad + |I_{2B}| \cdot \cos(\omega_B t + \angle I_{2B}) \end{aligned} \quad (7.6-12)$$

eli virtaa kulkee kummallakin taajuudella.

Esim. Tikapuuverkon tuloimpedanssi



Kuvan tikapuuverkon tuloimpedanssin Z_{in} on muotoa

$$Z_{in} = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4}}} \quad (7.6-13)$$

Sijoittamalla tähän kuvan mukaiset numeeriset arvot saadaan

$$\begin{aligned}
 Z_{in} &= 1 + \frac{1}{j0,5\omega + \frac{1}{j\omega + \frac{1}{1}}} = \frac{2 - (\omega^2/2) + j(3\omega/2)}{1 - (\omega^2/2) + j(\omega/2)} \\
 &= \frac{(2 - (3\omega^2/4) + (\omega^4/4)) + j((\omega/2) - (\omega^3/2))}{1 - (3\omega^2/4) + (\omega^4/4)}
 \end{aligned} \quad (7.6-14)$$

Havaitaan seuraavaa:

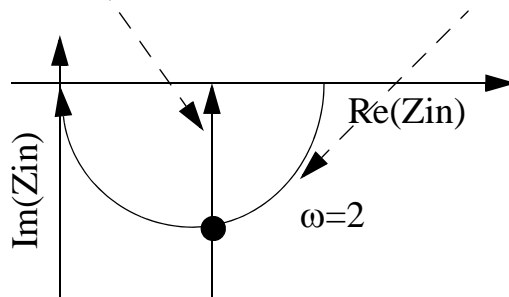
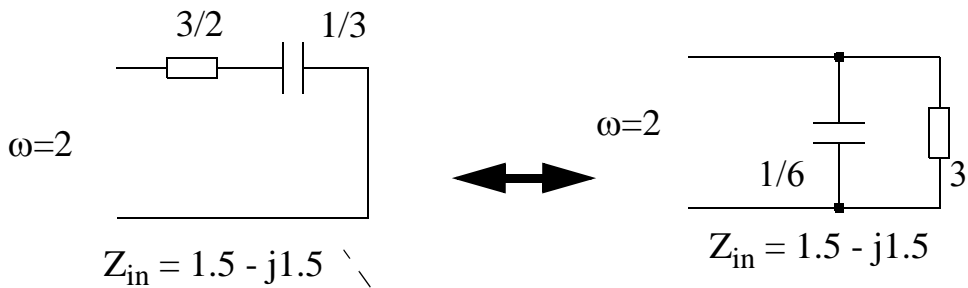
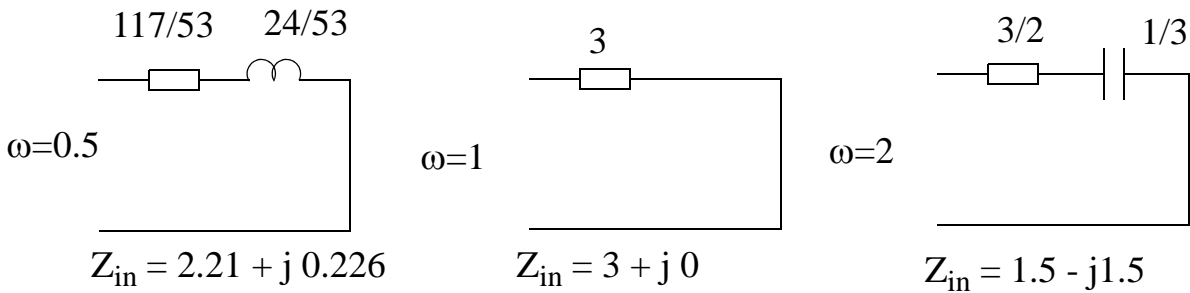
- tuloksen reaaliosa koostuu ω :n parillisista ja imaginääriosa parittomista potensseista
- yksinkertaisenkin piirin vaste symbolisessa muodossa on sängen mutkikas

Pistetaajuudella em. kytkentä voidaan korvata sijaiskytkennällä, joka koostuu impedanssin reaaliosan suuruisesta sarjaresistanssista ja sarjareaktanssista, jonka arvo ko. taajuudella vastaa imaginääriosaa:

$$Re + j Im$$

Sijaiskytkentänä voidaan luonnollisesti käyttää myös rinnakkaispiiriä, mikäli se antaa jollain tavoin yksinkertaisemman esityksen. On kuitenkin syytä huomata että

sijaiskytkentä kykenee mallittamaan piirin immittanssia yleensä vain yhdellä taajuudella. Taajuuden muuttuessa erilaiset sijaiskytkennät käyttäytyvät eri tavoin.



7.7 Taajuusvaste

Taajuusvasteella tarkoitetaan sitä, miten verkon vasteen amplitudi ja vaihesiirto riippuu sinimuotoisen herätteen taajuudesta. Vasteella voidaan tarkoittaa tässä tapauksessa lähes mitä hyvänsä: jonkin lähtösolmun jännitettä, haaran virtaa tai tulopisteen virran ja jännitteen suhdetta. Useimmiten taajuusvasteella $H(j\omega)$ esitetään lähtö- ja tulosuureen suhdetta eli se on muotoa

$$H(j\omega) = X_{out}(j\omega) / X_{in} \quad (7.7-1)$$

missä X:t ovat virtojen tai jännitteiden kompleksiosoitimia. Taajuusvaste on kompleksiluku, ja sen amplitudi (itseisarvo) ja vaihekulma lasketaan kompleksilukujen normaalein säännöin:

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= \sqrt{H(j\omega) \cdot H^*(j\omega)} \\ &= \sqrt{\text{Re}(H(j\omega))^2 + \text{Im}(H(j\omega))^2} \\ \angle(H(j\omega)) &= \text{atan}\left(\frac{\text{Im}(H(j\omega))}{\text{Re}(H(j\omega))}\right) \end{aligned} \quad (7.7-2)$$

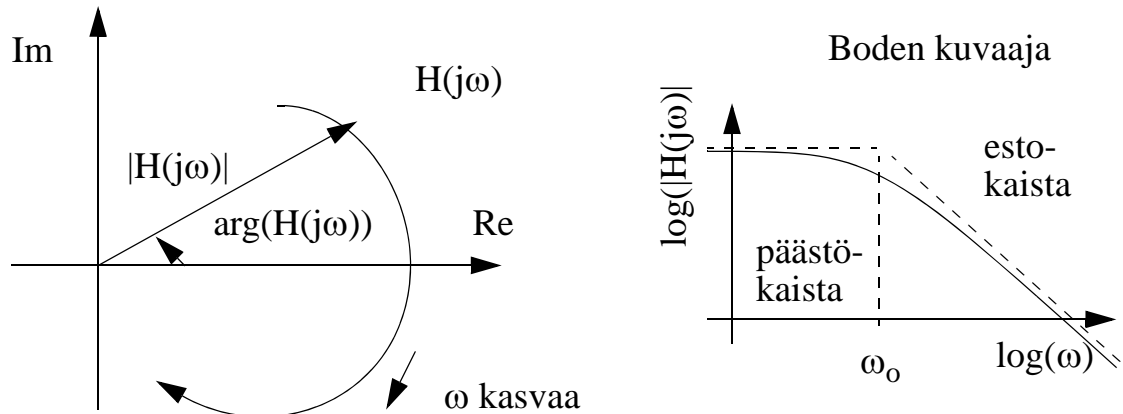
missä $\text{atan}()$ tarkoittaa arcustangenttia. Sängen usein taajuusvaste $H(j\omega)$ on ratiionalimuotoa $N(j\omega) / D(j\omega)$, ja tällöin siirtofunktion itseisarvo ja vaihekulma voidaan muodostaa yksinkertaisesti ottamalla osoittajan ja nimittäjän ko. termit erikseen: jos

$$H(j\omega) = \frac{R_1(\omega) + jX_1(\omega)}{R_2(\omega) + jX_2(\omega)} \quad (7.7-3)$$

missä R_i on osoittajan ja nimittäjän reaali- ja X_i imaginääriosia, niin

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= \frac{\sqrt{R_1^2 + X_1^2}}{\sqrt{R_2^2 + X_2^2}} \\ \angle H(j\omega) &= \text{atan}\left(\frac{X_1}{R_1}\right) - \text{atan}\left(\frac{X_2}{R_2}\right) \end{aligned} \quad (7.7-4)$$

Taajuusvaste voidaan piirtää esim. kompleksiosoitteina, ja tätä esitysmuotoa käytetään jonkin verran mm. säätötekniikassa. Useimmiten taajuusvaste kuitenkin piirretään ns. **Boden kuvaajana**, jossa amplitudi- ja vaihekuvaajat piirretään erikseen, kumpikin taajuuden funktiona.



Boden kuvaajassa sekä taajuus- että amplitudiakseli piirretään logaritmisena (vaiheakseli pysyy lineaarisena), millä on kaksi suotuisaa vaikutusta:

- Logaritmiskaalalla on helpompi hallita hyvin laajaa lukualuetta. Amplitudivaste esitetään usein desibeleinä (ks. kpl 7.7), joka on kahden tehon suhteen logaritmi.
- Logaritmiskaalalla amplitudivasteen käyttäytymistä voidaan nyt hyvin helposti approksimoida paloittain lineaarisella mallilla kuvan katkoviivojen mukaisesti. Paloittain lineaarisen approksimaation nurkkapisteitä kutsutaan taajuusvasteen nurkkataajuuksiksi, joissa verkon luonne (s.o. vahvistuksen f^K , $K=-2,-1,0,1,2,\dots$ kulmakerroin) muuttuu. (ks. kpl 9.7)

Nurkkataajuudella $\omega=\omega_0$ lähtöjännitteen U_0 amplitudi on pudonnut $1/\sqrt{2}$ -osaan maksimiarvostaan, jolloin teho on siis pudonnut osaan $(1/\sqrt{2})^2 = 0.5$ maksimistaan. Niinpä kulmataajuutta kutsutaankin usein puolen tehon pisteeksi tai tehon -3 dB pisteeksi, ja sitä käytetään päästökaistan (jolla signaali ei juurikaan vaimene) ja estokaistan (jolla signaali vaimenee merkittävästi) rajana.

7.8 Desibelin käsite

Vahvistusta kuvataan suhdeluvulla lähtösuure / tulosuure. Koska elektroniikassa käsiteltävien lukujen dynamiikka on suuri, käytetään usein myös logaritmista asteikkoa, jossa vahvistuksen 10-kantaisen logaritmin yksikkö on beli (käytännössä desibeli, dB, eli kymmenesosa beliä). Desibeli-asteikko **kuva**a aina **tehojen suhteita**, ja tehon laskentakaavoissa

$$P = U I = U^2 / R = I^2 R \quad (7.8-1)$$

olevasta toisesta potenssista seuraa kerroin 20 jännite- ja virtavahvistuksen dB -kaavoihin, kun se suoraan tehoja verrattaessa on 10.

Tehosuhde (tehovahvistus)

$$A_p = \frac{p_o}{p_i} \quad (7.8-2)$$

$$A_p[dB] = 10 \cdot \log\left(\frac{p_o}{p_i}\right)$$

Jännitesuhde

$$A_u = \frac{u_o}{u_i} \quad (7.8-3)$$

$$A_u[dB] = 20 \cdot \log\left(\frac{u_o}{u_i}\right)$$

Virtasuhde

$$A_i = \frac{i_o}{i_i} \quad (7.8-4)$$

$$A_i[dB] = 20 \cdot \log\left(\frac{i_o}{i_i}\right)$$

7.9 Dekadi ja oktaavi

Elektroniikassa taajuusalue on laaja, ja sen kompressoinniksi taajuusalue piirretään useimmiten logaritmeselle asteikolle. Tällöin on luontevaa verrata taajuuksien suhteellisia muutoksia, eli sitä kuinka moninkertainen taajuus on johonkin toiseen taajuuteen verrattuna. Yleisesti käytettyjä yksiköitä ovat seuraavat:

Oktaavi

Musiikkiterminologiasta tuttu termi oktaavi tarkoittaa taajuuden kaksinkertaistumista, ts. jos taajuus f_2 on oktaavin verran suurempi kuin f_1 niin

$$f_2 = 2 \cdot f_1 \quad (7.9-1)$$

Dekadi

Dekadi tarkoittaa taajuuden kymmenkertaistumista, ts. jos taajuus f_2 on dekadin verran suurempi kuin f_1 niin

$$f_2 = 10 \cdot f_1 \quad (7.9-2)$$

Esim.

$$\begin{aligned} 2.5 \text{ oktaavia} &= 2^{2.5} = 5.7\text{-kertainen} \\ 1.5 \text{ dekadia} &= 10^{1.5} = 31.6\text{-kertainen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2/f_1 = 8 &= \log_2(8) \text{ oktaavia} = 3 \text{ oktaavia} \\ f_2/f_1 = 8 &= \log_{10}(8) \text{ dekadia} = 0.903 \text{ dekadia} \end{aligned}$$

Esim.

Keskitettyistä komponenteista koostuvien verkkojen asyymtoottinen vaste kaukana navoista on aina muotoa

$$|H(j\omega)| = \omega^N, \text{ missä } N = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (7.9-3)$$

Tällöin amplitudivaste dB:inä on muotoa

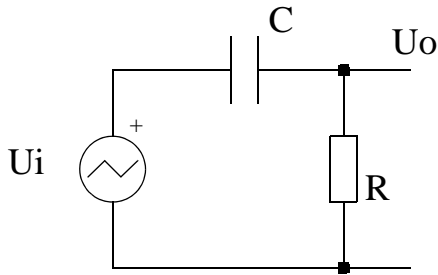
$$|H(j\omega)| = 20 \cdot \log(\omega^N) = 20 \cdot N \cdot \log(\omega) \quad (7.9-4)$$

jolloin taajuuden muuttuminen kertoimella 10 muuttaa amplitudivastetta määrällä $20N$ dB, ts. amplitudivaste riippuu taajuudesta kertoimella

$$N \times 20 \text{ dB/dekadi} \quad (7.9-5)$$

Esim. Ylipäästävä RC-piiri

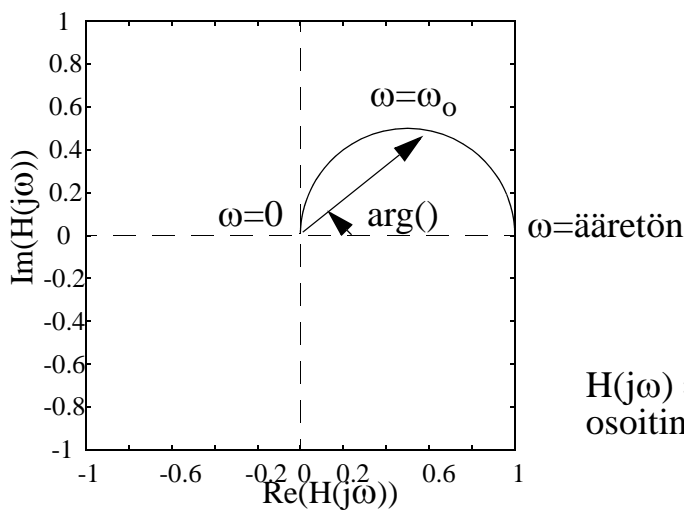
Oheisessa kuvassa on ylipäästävä RC-piiri, jonka taajuusvaste U_o/U_i on jännitejaolla laskettuna muotoa (7.9-6), missä $\omega_o=1/CR$ on taajuusvasteen kulma- tai napataajuus. Piirretään siirtofunktiolle sekä kompleksiosoitin että erilliset amplitudi- ja vaihekuvaajat.



$$H(j\omega) = \frac{U_o(j\omega)}{U_i} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C}$$

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} \\
 &= \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \\
 &= \frac{j(\omega/\omega_o)}{1 + j(\omega/\omega_o)}
 \end{aligned}
 \tag{7.9-6}$$

Osoitinkuvaaja



$$H(j\omega) = \frac{j(\omega/\omega_o)}{1 + j(\omega/\omega_o)}$$

$H(j\omega) = \text{Re}(H(j\omega)) + j \text{Im}(H(j\omega))$:n osoitinkuvaaja

Kaavasta (7.9-6) lasketaan amplitudi- ja vaihevaste helpoiten laskemalla osoittajan ja nimittäjän amplitudi ja vaihe erikseen, lauantamatta nimittäjää reaalityyksi.

$$H(j\omega) = \frac{(\omega/\omega_o)\angle(\pi/2)}{(\sqrt{1^2 + (\omega/\omega_o)^2})\angle\text{atan}\left(\frac{\omega/\omega_o}{1}\right)} \quad (7.9-7)$$

josta kokonaisvaste saadaan jakamalla osoittajan ja nimittäjän amplitudit ja vähentämällä niiden vaiheet:

$$|H(j\omega)| = \frac{(\omega/\omega_o)}{(\sqrt{1^2 + (\omega/\omega_o)^2})} \quad (7.9-8)$$

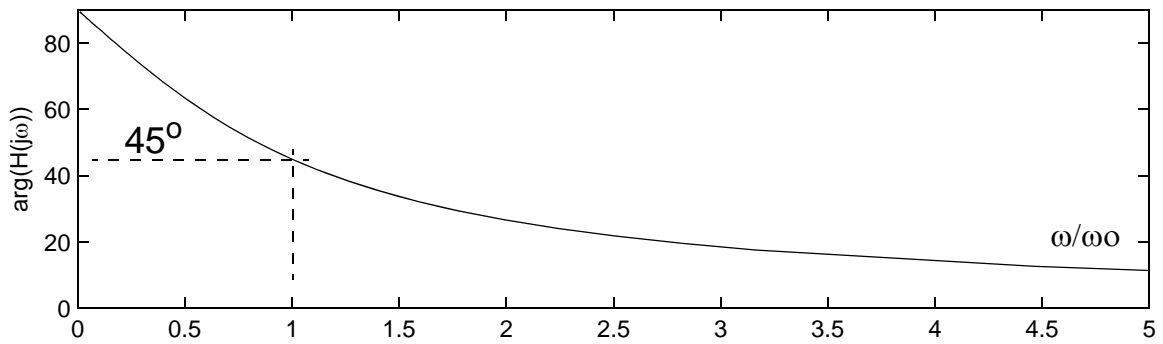
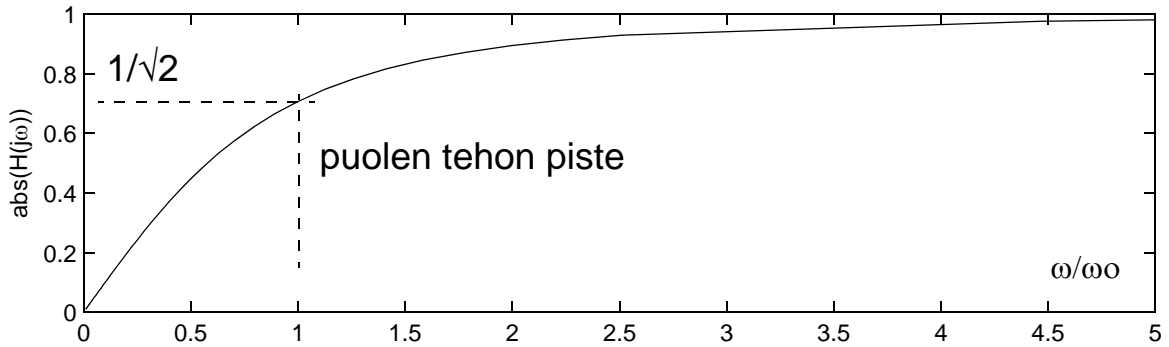
$$\angle H(j\omega) = \pi/2 - \text{atan}(\omega/\omega_o)$$

Seuraavalla sivulla on piirretty amplitudi- ja vaihevasteet sekä lineaarisille asteikoille (ylemmät kuvat) että log-log ja log-lin asteikoille (alemmat kuvat). Ylempien kuvien lukutarkkuus taajuusakselilla on n. 0.05-5 (1:100) ja amplitudiasteikolla n. 0.01-1 (samoin 1:100), kun log-log asteikolla taajuus vaihtelee alueella 0.01-100 eli 1:10000 ja amplitudi välillä 0.01-1 (1:100).

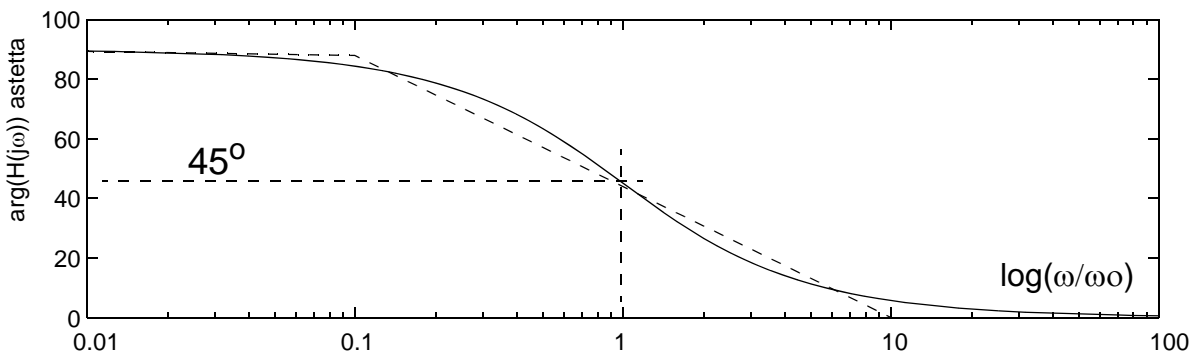
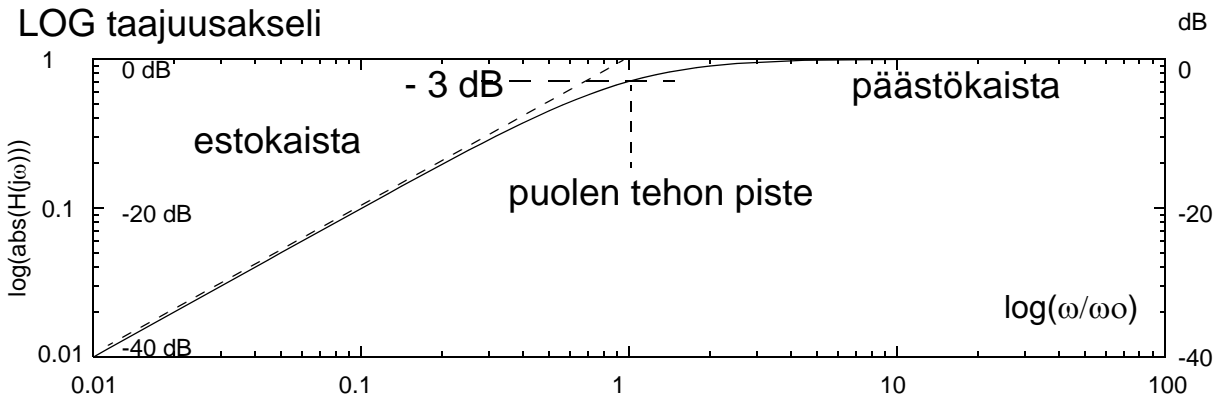
Alempiin kuviin on katkoviivalla piirretty paloittain lineaarinen Boden approksimaatio, jonka voi hyvin helposti piirtää käsivaralta.

Näissä kuvissa taajuusakseli on normalisoitu muotoon ω/ω_o . Tähän ei ole mitään pakkoa, ja jos esim. $\omega_o = 200$, lineaarisen taajuusakselin lukemat voi korvata välillä 0 - 1000 ja logaritmisin akselin välillä 2 - 20 000.

LIN taajuusakseli

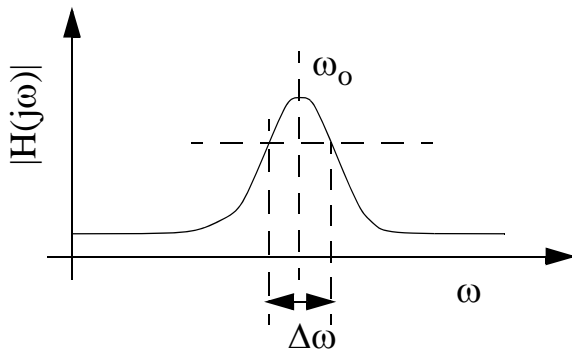


LOG taajuusakseli



7.10 Resonanssi

Resonanssilla tarkoitetaan tilannetta, jossa systeemissä on useampia energiavaroja, ja energia vuorottelee eri energiavarojen välillä. Yksinkertaisin esimerkki lienee heiluri, jossa energia vuorottelee potentiaalienergian (heiluri on korkealla) ja liike-energian (heiluri on alhaalla mutta liikkuu nopeasti) välillä, ja ilman vastus ja kitka aiheuttavat värähtelyyn häviöitä. Vuorottelu tapahtuu **jaksollisesti**, joten resonanssi ilmenee jollakin taajuudella. Resonanssiin taajuusvasteessa maksimi ei siis ole nolla- tai äärettömällä taajuudella, vaan äärellisellä resonanssitaajuudella. Oheiseen kuvaan on merkitty resonanssitaajuus ω_0 ja resonanssiin puolen tehon kaistanleveys $\Delta\omega$.



Resonanssin hyvyttä kuvataan ns. hyvyysluvulla Q , joka aiheutuu suoraan resonanssiin resistiivisistä häviöistä: resistansseissa sähköinen teho muuttuu lämmöksi ja haihtuu pois piiristä, jolloin värähtelyn amplitudi vähitellen pienenee. Niinpä on loogista määritellä hyvyysluku impedanssin energiavarojen ($\text{Im}(Z)$) ja häviöiden ($\text{Re}(Z)$) suhteena

$$Q = \frac{\text{Im}(Z(\omega_0))}{\text{Re}(Z(\omega_0))} \quad (7.10-1)$$

Jos siirtofunktiossa on vain yksi resonanssi, sen hyvyyslukua voidaan arvioida kaavalla (7.10-2) (jos vaste koostuu useammasta resonanssista, tämä approksimaatio ei toimi). Siis esim. hyvyysluku $Q=10$ tarkoittaa sitä, että puolen tehon kaistanleveys $\Delta\omega$ on kymmenesosa keskitajuudesta ω_0 .

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (7.10-2)$$

Resonanssiin liittyy myös jaksollisesti taajuudella ω_0 värähtelevä aikavaste, jonka amplitudi vaimenee verrannollisena kaavaan

$$A(t) \approx \exp\left(\frac{-\omega_0 t}{2Q}\right) = \exp\left(-\pi \cdot \frac{N_{jaksot}}{Q}\right) \quad (7.10-3)$$

Värähtelyn kesto jaksoina on siis verrannollinen hyvyyslukuun: Q värähdyksessä amplitudi vaimenee n. 4%:iin alkuperäisestä, ja $2 \cdot Q$ jaksossa n. promilleen alkuperäisestä. **Resonanssin Q -luku on siis likimain sama kuin silmällä havaittavien värähdysten määrä.**

Sähkötekniikassa yksinkertaisimmat resonanssipiirit ovat seuraavassa esiteltävät sarja- ja rinnakkaisresonanssipiirit. Resonanssille on ominaista, että jännitteet tai virrat resonanssipiirin sisällä voivat olla huomattavasti suurempia kuin piirin tuloissa, ja keskenään vastakkaisvaiheisia, jotka kumoavat toisensa. Esim. sarja-resonanssipiirissä sekä induktanssin että kapasitanssin yli on suuri jännite, mutta koska ne ovat vastakkaisvaiheisia, ne kompensoivat toisiaan eivätkä näy piirin lähdössä. Vastaavasti rinnakkaisresonanssissa induktanssissa ja kapasitanssissa kiertää suuria vastakkaisvaiheisia virtoja, jotka eivät näy piirin lähdössä.

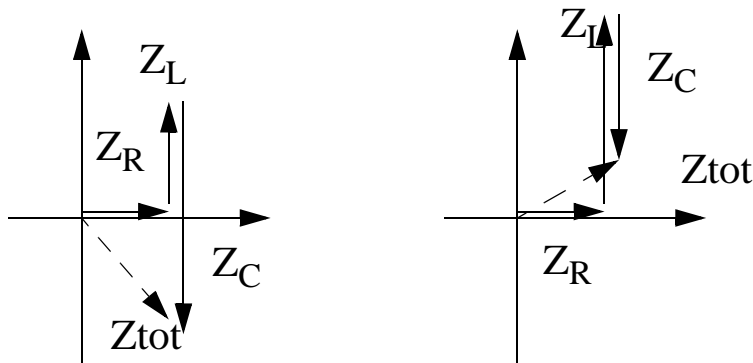
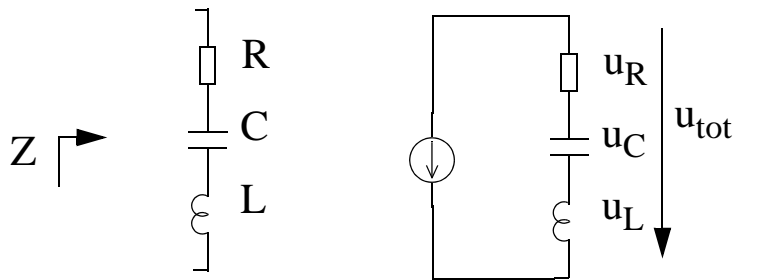
7.11 Sarjaresonanssi

Sarjaresonanssiin impedanssi Z on muotoa

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (7.11-1)$$

Sarjaresonanssiin impedanssi voi olla taajuudesta riippuen induktiivinen, kapasitiivinen tai puhtaasti resistiivinen. Pienimillään impedanssin itseisarvo on, kun imaginääriosaa menee nolaksi. Taajuutta, jolla näin tapahtuu, kutsutaan resonanssitaajuudeksi ω_0 . Impedanssien osoittamista havaitaan, että sekä L:n että C:n yli on suuri jännite, mutta ne ovat vastakkaisvaiheiset ja resonanssitaajuudella ne kompensoivat toisensa.

$$\begin{aligned} \omega L - \frac{1}{\omega C} &= 0 \rightarrow \\ \omega &= \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \quad (7.11-2)$$



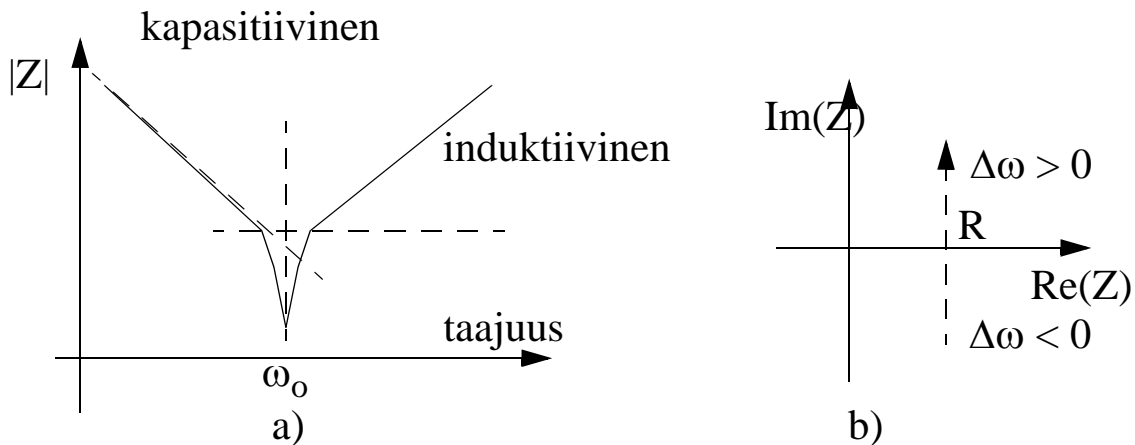
$\omega < \omega_0$ (Z kapasitiivinen) $\omega > \omega_0$ (Z induktiivinen)

Resonanssin hyvyyslukuksi (ts. keskitaajuuden ja 3 dB kaistanleveyden suhteeksi) voidaan laskea

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_o \cdot L}{R} = \frac{1}{R \cdot \omega_o \cdot C} = \left| \frac{Z_{L,C}}{R} \right| \quad (7.11-3)$$

Tästä havaitaan, että sarjaresonanssi on sitä parempi (jyrkempi), mitä pienemmät ovat piirin resistiiviset häviöt. Jos L:n ja C:n suhteeseen voidaan vaikuttaa, L:n kasvattaminen ja C:n pienentäminen kasvattavat hyvyyslukua. Hyvyysluku voidaan tulkita myös reaktiivisen ja resistiivisen impedanssin suhteena.

Alla olevassa kuvassa on esitetty impedanssin itseisarvo taajuuden funktiona (kuva a) ja impedanssin reaali- ja imaginääriosan muuttuminen taajuuden kasvaessa. Havaitaan, että sarjaresonanssi on suuri-impedanssinen kaikilla muilla taajuuksilla paitsi resonanssitaajuudella. Niinpä sarjaresonanssiin läpi kulkeva virta on aina sinimuotoista, vaikka sen synnyttävä jännite olisikin voimakkaasti säröytynyttä.



Havaintoja:

- Sarjaresonanssin hyvyysluku on kääntäen verrannollinen sarjaresistanssin arvoon
- Resonanssitaajuudella kapasitanssin ja induktanssin yli olevat jännitteet ovat Q -kertaisia koko resonaattorin yli näkyvään jännitteeseen verrattuna.
- Sarjaresonaattorin läpi kulkee merkittävästi virtaa vain resonanssitaajuudella.

7.12 Rinnakkaisresonanssi

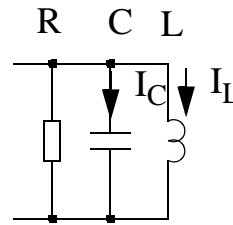
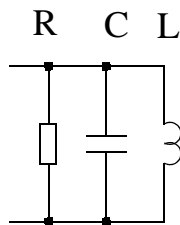
Rinnakkaisresonanssiin admittanssi Y on muodoltaan duaalinen sarjaresonanssiin impedanssille

$$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (7.12-1)$$

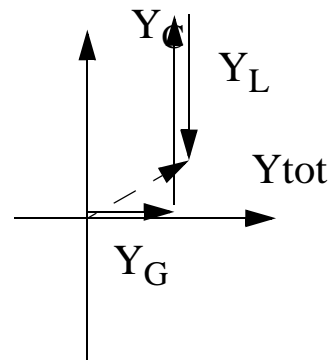
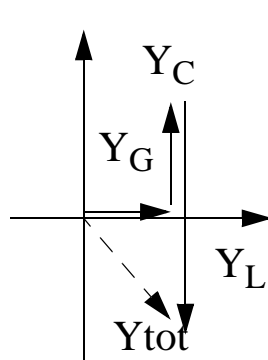
Rinnakkaisresonanssiin impedanssi on siis normaalisti pieni mutta resonanssitaajuudella se nousee maksimiinsa ($1/G$). Voidaan siis sanoa, että resonanssiin yli esiintyy jännitettä vain resonanssitaajuudella, ja jännite on sinimuotoista vaikka resonanssiin tuleva virta olisi särötyntä.

Rinnakkaisresonanssiin reaktanssien läpi kulkee suurehko virta, mutta koska I_C ja I_L ovat vastakkaisvaiheisia, ne kompensoivat toisensa resonanssitaajuudella, jolloin reaktanssit eivät ota lainkaan ulkoista virtaa. Resonanssitaajuus lasketaan samoin kuin sarjaresonanssiinissäkin:

$$\begin{aligned} \omega C - \frac{1}{\omega L} &= 0 \rightarrow \\ \omega &= \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \quad (7.12-2)$$



$$G = 1/R$$



$$\omega < \omega_o \text{ (Y induktiivinen)} \quad \omega > \omega_o \text{ (Y kapasitiivinen)}$$

Rinnakkaispiirin resonanssin hyvyysluku on muotoa

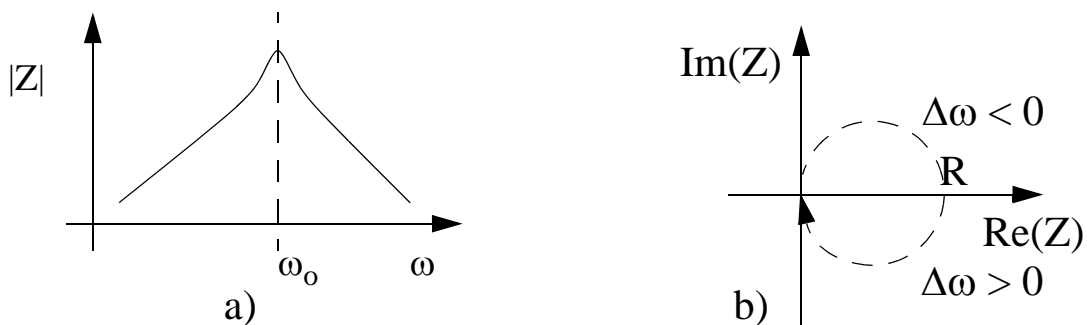
$$Q = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\omega_o \cdot L} = R \cdot \omega_o \cdot C = \left| \frac{R}{Z_{L,C}} \right| \quad (7.12-3)$$

On syytä huomata, että tässä R on osoittajassa, joten mitä suurempi R , sitä parempi hyvyysluku ja sitä pienemmät systeemin häviöt. Tämä selittyy sillä, että kun energia vaihtuu L :n ja C :n välillä, sen ei tarvitse kulkea R :n läpi missä se aiheuttaisi häviöitä. Päinvastoin, kun resonanssi piiriin yli muodostuu jännite, suuri R :n arvo pitää R :n kautta kulkevan virran ja siten häviöt $I_R^2 R$ pienenä.

Hyvyysluvun avulla yhtälö (7.11-1) voidaan esittää myös muodossa

$$Y = G \cdot \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \right) \quad (7.12-4)$$

josta jälleen havaitaan, että jos hyvyysluku on suuri, myös admittanssin reaktiivinen osuus on suuri. Alla olevassa kuvassa on esitetty impedanssin itseisarvo taajuuden funktiona (kuva a) ja impedanssin reaali- ja imaginääriosan muuttuminen taajuuden kasvaessa.



Havaintoja:

- Rinnakkaisresonanssin hyvyysluku on suoraan verrannollinen rinnakkaisresistanssin arvoon
- Kapasitanssin ja induktanssin läpi kulkevat virrat ovat Q -kertaisia koko resonanssitaajuuden läpi kulkevaan virtaan verrattuna.
- Rinnakkaisresonaattorin yli näkyy merkittävästi jännitettä vain resonanssitaajuudella.

8. SIGNAALIN TEHO JA TEHON SIIRTYMINEN

8.1 Sinimuotoisen signaalin teho

Esitetään sinimuotoinen signaali muodossa

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (8.1-1)$$

missä $\omega = 2\pi f$ on signaalin kulmataajuus (rad/s), $f = 1/T$ on signaalin taajuus (jaksoa/s), ϕ vaihekulma ja A amplitudi. Koska signaali on jaksollinen, riittää, että sen keskimääräisiä ominaisuuksia tarkastellaan yhden jakson ajalta.

Sinisignaalin keskiarvo x_{ave} yhden jakson yli laskettuna on nolla

$$x_{ave} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A \cos(\omega t + \phi) dt = 0 \quad (8.1-2)$$

mutta signaalin keskimääräinen teho on nolasta poikkeava. Oletetaan, että

$$\begin{aligned} u(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \\ i(t) &= B \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (8.1-3)$$

Näistä kosinin yhteenlaskukaavaa käyttäen saadaan hetkelliseksi tehoksi

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) \\ &= A \cos(\omega t + \phi) \cdot B \cos(\omega t) \\ &= \frac{AB}{2} \cdot (\cos(2\omega t + \phi) + \cos(\phi)) \end{aligned} \quad (8.1-4)$$

josta keskimääräiseksi tehoksi saadaan

$$\begin{aligned} p_{ave} &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \left(\frac{1}{\omega} \cdot (\sin(2\omega T + \phi) - \sin(\phi)) + \cos(\phi) \cdot (T - 0) \right) \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos(\phi) \cdot T \\ &= \frac{AB}{2} \cdot \cos(\phi) \end{aligned} \quad (8.1-5)$$

Kaavasta (8.1-4) havaitaan, että teho on ajan funktio, mutta jakson yli mitattuna silä on myös tietty keskiarvo, joka kuvaa sitä keskimääräistä tehoa, joka signaalilla on. Sijoittamalla nyt $U = ZI$ tai $I = U/Z$ saadaan (8.1-5) muotoihin

$$p_{ave} = \frac{U_p^2}{2 \cdot |Z|} \cdot \cos(\phi)$$

$$= \frac{I_p^2 \cdot |Z|}{2} \cdot \cos(\phi)$$
(8.1-6)

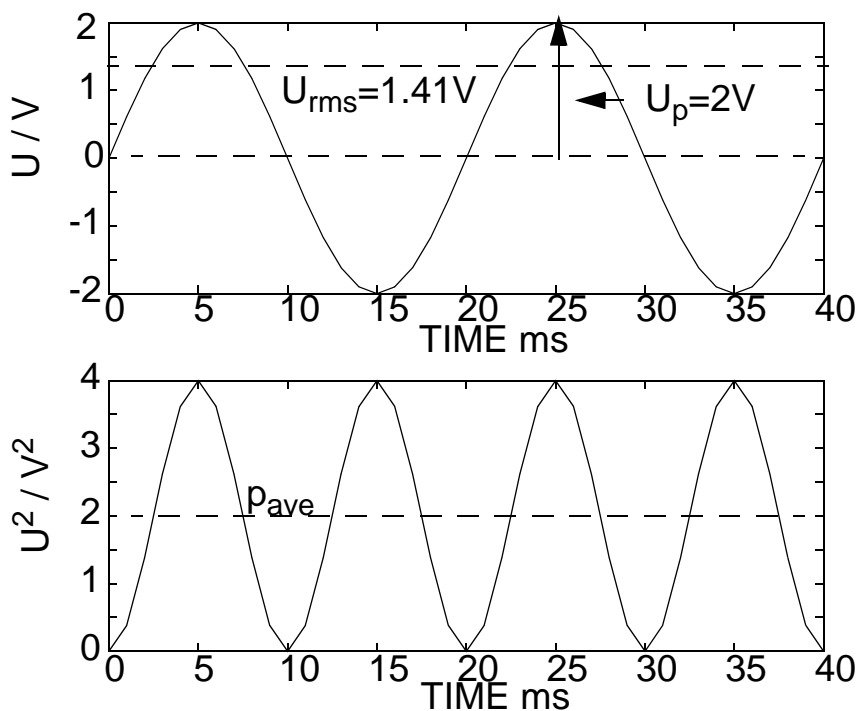
missä U_p ja I_p ovat jännitteen ja virran amplitudeja. Monesti kiinnostaa nimenomaan signaaliin sisältyvä teho, jolloin kerroin $1/2$ sisällytetään amplitudiin ja puhutaan amplitudin sijasta tehollisarvosta U_{rms} (rms-arvosta, root-mean-square-arvosta):

$$\frac{U_p^2}{2 \cdot |Z|} = \frac{U_{rms}^2}{|Z|}$$
(8.1-7)

josta

$$U_{rms} = \frac{U_p}{\sqrt{2}}$$
(8.1-8)

Oheinen kuva esittää sinimuotoisen jännitteen synnyttämää tehoa (U^2/R), jännitteen huippu- (U_p) ja tehollisarvoa (U_{rms}) ja keskimääräistä tehoa (p_{ave}).



Seuraavassa kuvassa on esitetty tilanne, jossa

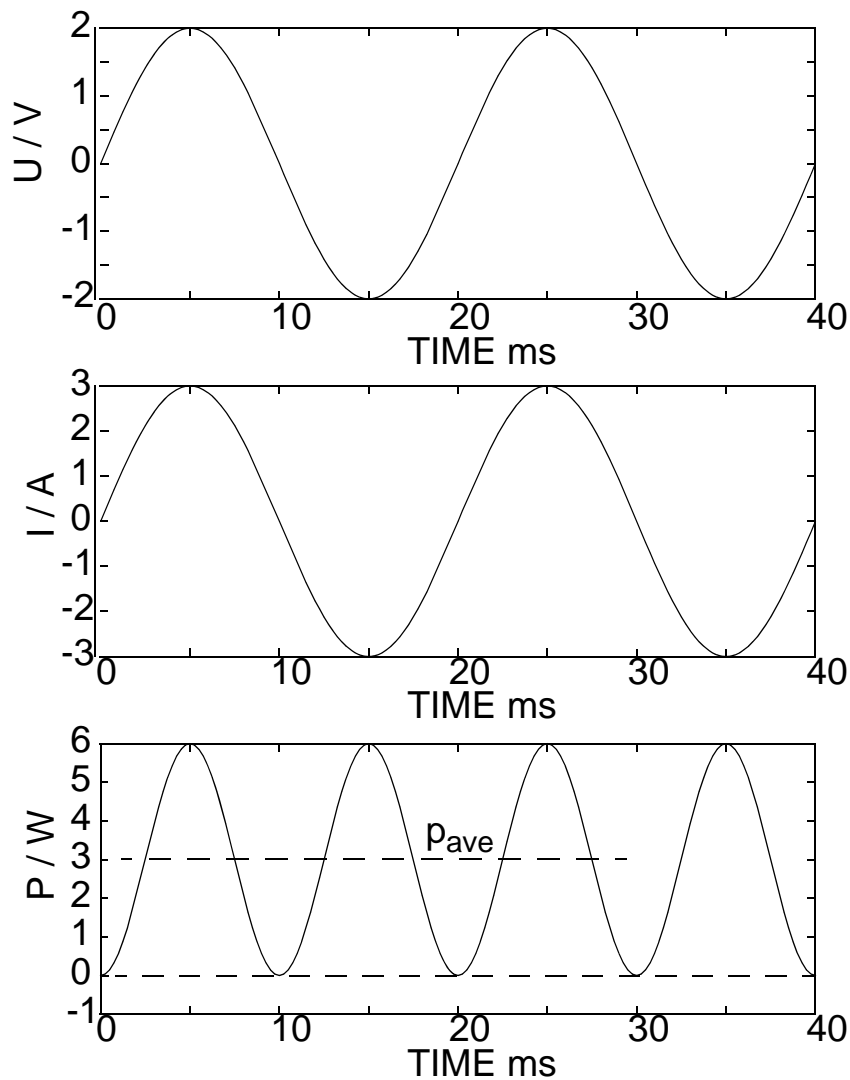
$$\begin{aligned} u(t) &= 2 \sin(2\pi 50t) \\ i(t) &= 3 \sin(2\pi 50t) \end{aligned} \quad (8.1-9)$$

Havaitaan, että teho $p(t)$ on muotoa

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{2V \cdot 3A}{2} \cdot (1 - \cos(2\pi 100t)) \\ &= (3 - 3 \cdot \cos(2\pi 100t)) \text{ W} \end{aligned} \quad (8.1-10)$$

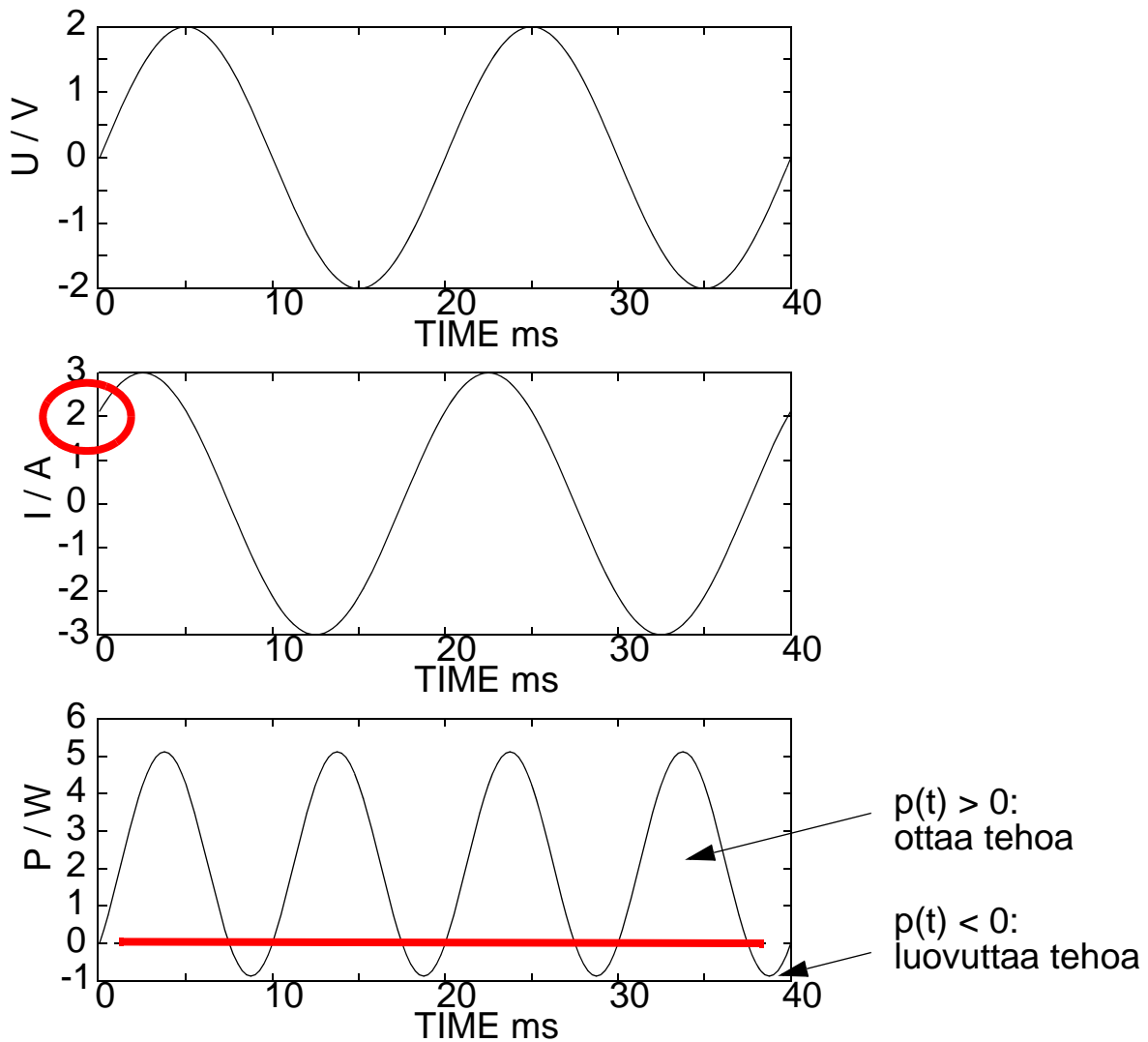
ja keskimääräinen teho on

$$P_{\text{ave}} = U_p I_p / 2 = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} = 3 \text{ W} \quad (8.1-11)$$



Jos jännitteen ja virran välillä on vaihesiirtoa (ϕ ei ole 0), keskimääräinen teho pienenee. Tätä havainnollistaa seuraava kuva, jossa jännitteen ja virran välillä on 45 asteen vaihesiirto:

$$\begin{aligned} u(t) &= 2 \sin(2\pi 50t) \\ i(t) &= 3 \sin(2\pi 50t + \pi/4) \end{aligned} \quad (8.1-12)$$

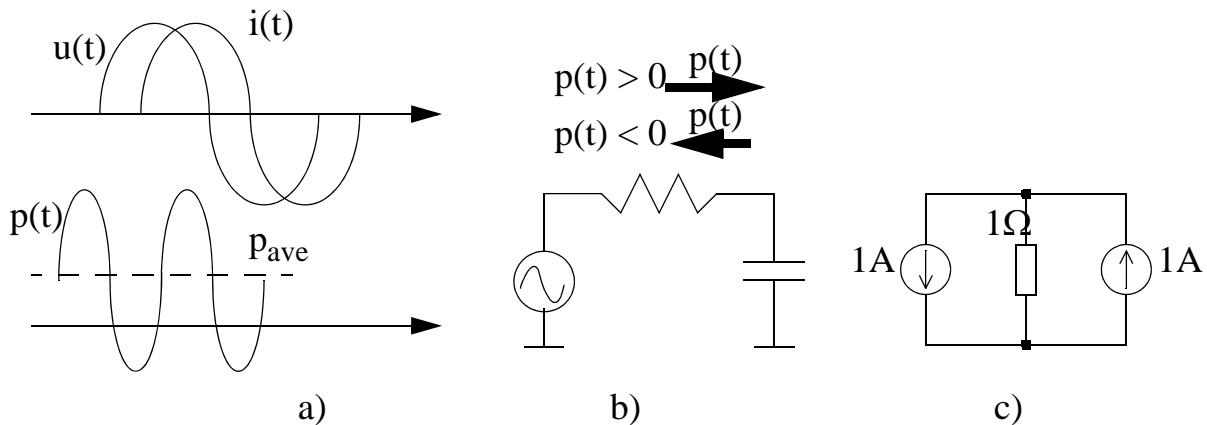


Havaitaan, että tehon $p(t)$ amplitudi pysyy yhä samana, mutta sen keskiarvo laskee $\cos(\phi)$:n verrannollisena, sillä keskimääräinen teho (pätöteho) on

$$P = U_{rms} \cdot I_{rms} \cdot \cos(\phi) \quad (8.1-13)$$

missä ϕ on jännitteen ja virran välinen vaihe-ero.

Jännitteen ja virran välisen vaihesiirron aiheuttama pätötehon pieneneminen johdetaan siitä, että kuorma toimii nyt sekä kuormana että generaattorina: osan aikaa se varastoi energiaa ja palauttaa sen puolen jakson kuluttua takaisin. Tämä aiheuttaa sen, että siirtojohdossa kulkee paljon virtaa, mutta tehoa ei siirry kuormaan, jolloin häviöiden osuus siirtojohdossa kasvaa.



Muita huomioita:

- Tehon laskeminen on epälineaarinen operaatio, joten superpositioperiaatetta ei voi suoraan soveltaa, vaan siinä on otettava huomioon myös signaalien mahdollinen korrelaatio. Ks. esim. kuvan c) tapausta, jossa vastuksessa ei kulje lainkaan virtaa eikä siinä niin muodoin kulu tehoakaan.

Muutamissa erikoistapauksissa eri signaalilähteiden tehot eivät korreloi, jolloin tehot voidaan summata suoraan yhteen. Tällaisia tapauksia ovat useimmat (ei toki kaikki) kohinalaskut ja ortogonaalikehitelmien (joissa eri signaalit eivät siis korreloi) kuten Fourier-sarjan kokonaistehon laskeminen.

- Jännitteen ja virran vaihe-eron lisäksi siirtyvään tehoon ja hyötysuhteeseen vaikuttaa myös epälineaarisuuden aiheuttama taajuusmuutos. Useimmat verkko-laitteet kuormittavat verkkoliityntää epälineaarisesti (tasasuuntaaja on erittäin epälineaarinen komponentti), jolloin kuormavirta sisältää myös perustaajuuden monikertoja. Harmonisten komponenttien virta aiheuttaa ylimääräisiä häviöitä verkossa ja on yhtä pahasta kuin perustaajuuden virran ja jännitteen välinen vaihe-erokin.

8.2 Tehollisarvo ja huipusta-huippuun arvo

Amplitudia merkitään usein alaindeksillä p (peak). Epäsäännöllisen muotoisille signaaleille ilmoitetaan usein huipusta-huippuun -arvo (peak-to-peak), joka lyhennetään joko pp tai $p-p$.

Tehollisarvoa merkitään yleisesti, kuten edellä todettiin, kirjainlyhenteillä rms tai eff . Ohessa on koottuna sinimuotoisen signaalin amplitudia kuvaavat tunnusluvut:

Tehollisarvo u_{eff} (rms-arvo):

Tehollisarvolla tarkoitetaan sitä tasajännitteen tai -virran arvoa, joka tuottaisi saman keskimääräisen tehon kuin tutkittavana oleva aaltomuoto. Vaihtosignaalin tehollisarvo lasketaan siis seuraavasti:

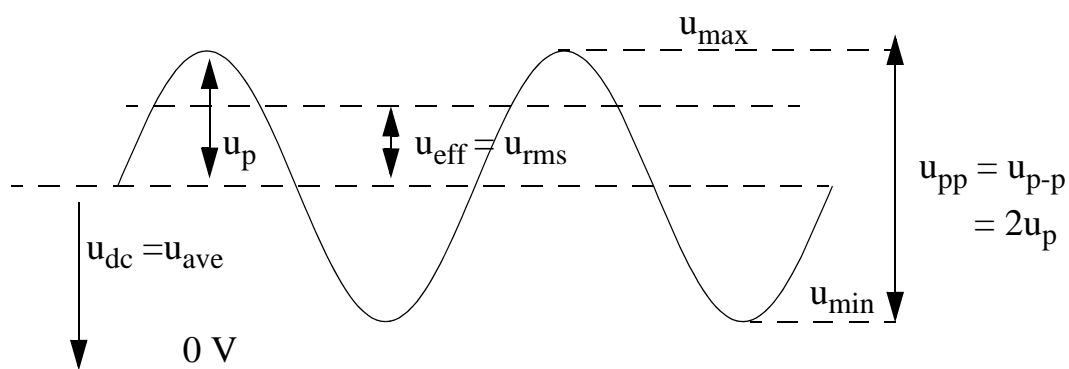
$$P_{ave} = \frac{u_{eff}^2}{R} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_o}^{t_o+T} \frac{u(t)^2}{R} dt \quad (8.2-1)$$

Josta saadaan saadaan rms-arvo (laskutapaa kuvastaen root-mean-square):

$$u_{eff} = u_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_o}^{t_o+T} u(t)^2 dt} \quad (8.2-2)$$

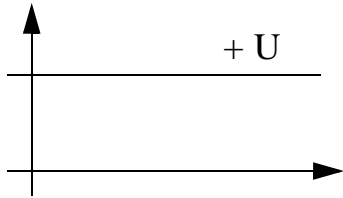
Huipusta-huippuun -arvo u_{pp} :

$$u_{pp} = (u_{max} - u_{min}) = 2 u_p \text{ symmetrisellä aallolla}$$



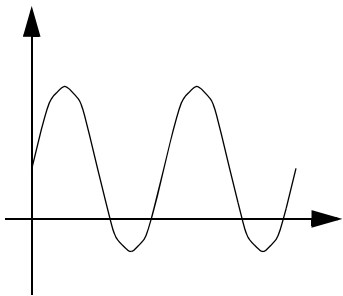
(Käytännössä huippuarvon ja huipusta-huippuun -arvon määrittäminen kohinaisista signaaleista on vaikeaa, joten mittaussovelluksissa kerätään histogrammia eri amplitudiarvoista ja lasketaan keskimääräinen amplitudi huipun painopisteinä.)

Esim. Muutamien aaltomuotojen tehollisarvo



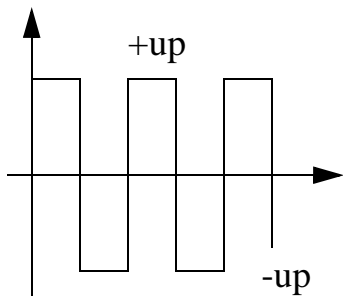
$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$u_{eff} = U_{DC}$$

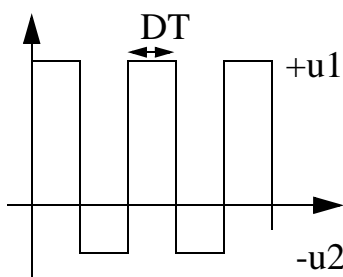


$$P_{ave} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{(u_p \cdot \sin(\omega t) + u_{dc})^2}{R} dt$$

$$u_{eff} = \sqrt{u_{dc}^2 + \frac{u_p^2}{2}}$$



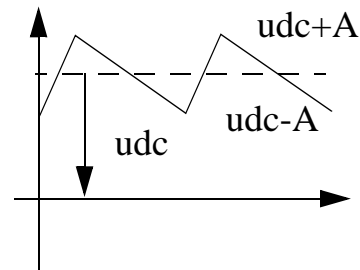
$$u_{eff} = u_p$$



$$P_{ave} = \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{DT} \frac{u_1^2}{R} dt + \int_{DT}^{1T} \frac{(-u_2)^2}{R} dt \right)$$

$$= \frac{1}{TR} \cdot (u_1^2 \cdot DT + u_2^2 \cdot (1-D)T)$$

$$u_{eff} = \sqrt{Du_1^2 + (1-D)u_2^2}$$



$$u_{eff} = \sqrt{u_{dc}^2 + \frac{A^2}{3}}$$

8.3 Tehojen osoitinlaskenta, pätö- ja loisteho

Tehoakin voidaan laskea osoitinlaskennalla, mutta koska tehon laskenta on epälineaarinen operaatio, siinä on välttämättä käytettävä sekä positiivisen että negatiivisen taajuuden osoittimia. Tuloksesta meitä kiinnostaa vain tehon DC-komponentti ja sen reaaliosa. Olkoon

$$\begin{aligned} u(t) &= U_p \cos(\omega t + \phi_u) \\ i(t) &= I_p \cos(\omega t + \phi_i) \end{aligned} \quad (8.3-1)$$

ja kirjoitetaan nämä Eulerin kaavan mukaan 2-puoleisina kompleksiosoittimina

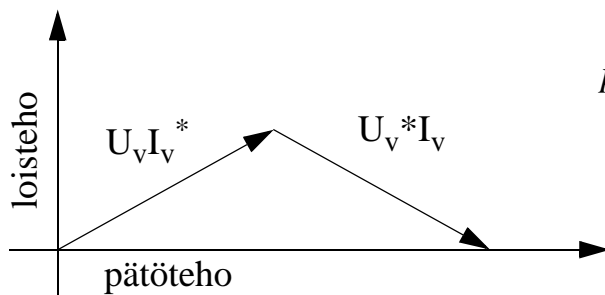
$$\begin{aligned} u(t) &= (U_v \exp(j\omega t) + U_v^* \exp(-j\omega t))/2 \\ i(t) &= (I_v \exp(j\omega t) + I_v^* \exp(-j\omega t))/2 \end{aligned} \quad (8.3-2)$$

jossa U_v ja I_v ovat nyt kompleksiosoittimia (vektoreita), sisältäen sekä amplitudi- että vaiheinformaation:

$$\begin{aligned} U_v &= U_p \exp(j\phi_u) \\ I_v &= I_p \exp(j\phi_i) \end{aligned} \quad (8.3-3)$$

Nyt tehon lauseke sisältää termejä taajuudella 0 ja 2ω , joista poimitaan jatkoon vain keskimääräistä tehoa kuvaava DC-komponentti

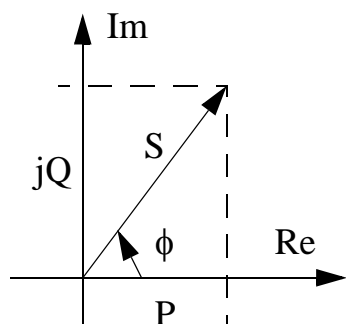
$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) \\ &= (U_v I_v^* + U_v^* I_v)/4 \quad (\text{DC}) \\ &\quad + (U_v I_v \exp(j2\omega t) + U_v^* I_v^* \exp(-j2\omega t))/4 \end{aligned} \quad (8.3-4)$$



$$\begin{aligned} p(t) &= (U_v I_v^* + U_v^* I_v)/4 \\ &= 2\text{Re}(U_v I_v^*)/4 \\ &= U_p I_p \cos(\phi_u - \phi_i)/2 \end{aligned}$$

Teho voidaan ajatella siten kompleksisena osoittimena, jolla on reaalinen ja imaginäärinen komponentti. Tällöin tehollisarvo-osoittimien tuloa UI^* kutsutaan **näennäistehoksi** S , reaalista tehoa **pätötehoksi** P ja lähteen ja kuorman välillä edestakaisin liikkuvaa imaginääristä tehoa **loistehoksi** Q . Pätötehon yksikkö on watti (W), mutta ilmiöiden erottamiseksi näennäisteholle käytetään yksikköä VA ja loisteholle VAR.

$$S = P + jQ = UI^* = |U|^2/Z^* = |I|^2 Z$$



Näennäisteho

$$S = UI^*$$

$$U = U\angle\alpha$$

Pätöteho

$$P = \text{Re}(S)$$

$$I = I\angle\alpha+\phi$$

Loisteho

$$Q = \text{Im}(S)$$

$f > 0$: induktiivinen loisteho

$f < 0$: kapasitiivinen loisteho

S :n lausekkeessa virta I on kompleksikonjugaattina, jotta saadaan muodostettua tehon laskennassa tarvittava jännitteen ja virran välisen vaiheen **erotus**:

$$\begin{aligned} S &= (U_{eff} \cdot I_{eff}) \angle (\phi_u - \phi_i) \\ &= (U_{eff} \angle \phi_u) \cdot (I_{eff} \angle -\phi_i) \\ &= (U_{eff} e^{j\phi_u}) \cdot (I_{eff} e^{-j\phi_i}) \\ &= U \cdot I^* \end{aligned} \tag{8.3-5}$$

Esim.

$U = 10\angle-10$ ja $Z = 3+4j = 5\angle+53$, jolloin $I = U/Z = 2\angle-63$. Edelleen

$S = |U|^2/Z^* = 10^2\angle 0 / 5\angle-53 = 20\angle+53$ VA. Tästä

$P = |S| \cos(53) = 20 \cdot (3/5) = 12$ W ja

$Q = |S| \sin(53) = 20 \cdot (4/5) = 16$ VAR

P on todellista, hyötykäyttöön saatava tehoa, mutta Q on heijastuvaa tehoa: se otetaan lähteestä mutta palautetaan sinne puolen jakson kuluttua takaisin.

8.4 Maksimaalinen tehonsiirto

Oheisesta kuvasta nähdään, että tehollinen virta I_L kuormassa Z_L on

$$|I_L| = u_s / |Z_S + Z_L| = u_s / \sqrt{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2} \quad (8.4-1)$$

jolloin kuormaresistanssiin saatava teho on

$$P_L = |I_L|^2 \cdot R_L = \frac{u_s^2 \cdot R_L}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2} \quad (8.4-2)$$

Tästä havaitaan suoraan, että teho on suurimmillaan kun impedanssien reaktanssit kompensoivat toisensa (so. jännite ja virta ovat samassa vaiheessa) eli

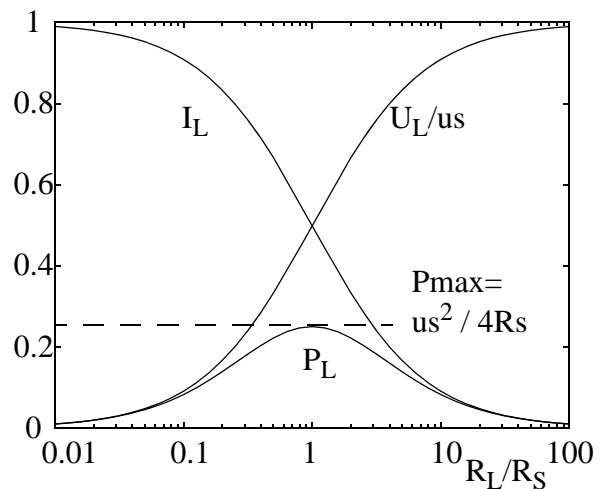
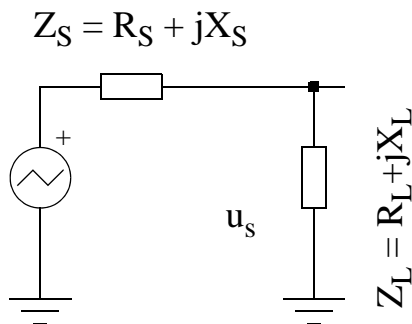
$$X_L = -X_S. \quad (8.4-3)$$

Resistiivisen osan optimi saadaan etsimällä tehon maksimi derivoimalla (8.4-2), ja se saavutetaan kun

$$R_L = \sqrt{R_S^2 + (X_L + X_S)^2} \quad (8.4-4)$$

Fysikaalinen tulkinta tälle on, että tehoon tarvitaan samanaikaisesti sekä jännitettä että virtaa, ja niiden on oltava **samassa vaiheessa**. Suureen kuormaresistanssiin saadaan kyllä paljon jännitettä, mutta virta jää pieneksi, jolloin myös siirtyvä teho on vähäinen. Yhteenvetona voidaan todeta, että

Maksimaalinen tehonsiirto saavutetaan, kun lähteen lähtöimpedanssi Z_S ja kuormaimpedanssi Z_L ovat toistensa kompleksikonjugaatteja eli $Z_L = Z_S^$.*

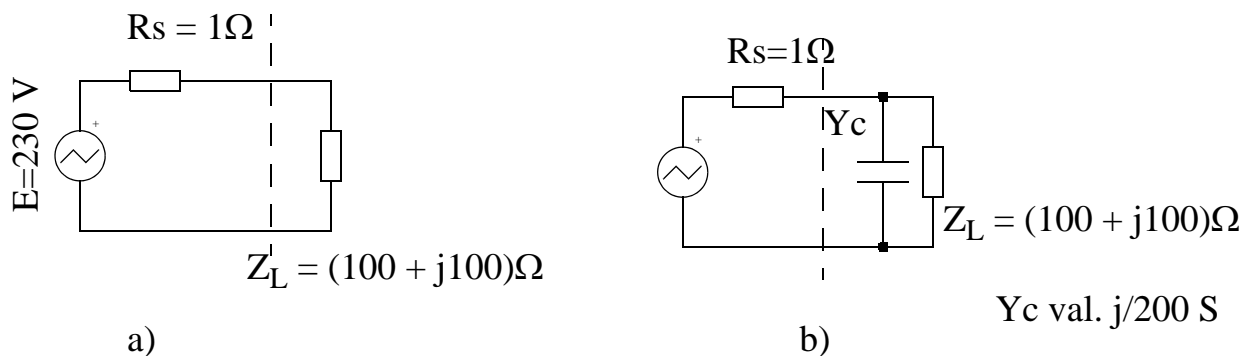


Toisinaan parasta mahdollista sovitusta ei voida toteuttaa, jolloin lähinnä optimaalinen sovitus etsitään seuraavasti:

- Jos R_L :n ja X_L :n arvoja voidaan muuttaa vain tietyissä rajoissa, säädetään ensin X_L mahdollisimman lähelle $-X_S$:ää ja sitten R_L siten, että (8.4-4) minimoituu.
- Jos kuormaimpedanssin vaihetta (X_L :ää) ei voida säätää, valitaan Z_L siten, että

$$|Z_L| = |Z_S| \quad (8.4-5)$$

Esim. Loistehon kompensointi (tietty teho minimihäviöillä)



Kuvaa) esittää systeemiä, jossa jännitelähde E syöttää resistiivisen siirtojohdon kautta tehoa kuormaan, jonka tuloimpedanssi on voimakkaasti reaktiivinen. Kokonaisvirta on

$$I = \frac{E}{R_s + Z_L} = \frac{230}{1 + 100 + j100} = 1,62 \text{ A} \angle -44,7^\circ \quad (8.4-6)$$

Kuormaan saatava hyötyteho P_{eff} ja lähtöimpedanssissa ja kaapeloinnissa R_s palava hukkateho P_{diss} ovat

$$P_{eff} = \text{Re}(Z_L) \cdot |I|^2 = 100 \cdot \frac{E^2}{101^2 + 100^2} = 262 \text{ W}$$

$$P_{diss} = R_s \cdot |I|^2 = 1 \cdot \frac{E^2}{101^2 + 100^2} = 2,62 \text{ W} \quad (8.4-7)$$

Siis n. 1% kuluneesta tehosta lämmittää varisten jalkoja siirto johdolla. Tehon hukkaa kasvattaa kuorman reaktanssi, sillä se lisää siirto johdossa edestakaisin kulkevan virran suuruutta, kuten kohta nähdään.

Kuvassa b) kuorman reaktanssi kompensoidaan rinnakkaisadmittanssilla Y_C . Kuorman kokonaisadmittanssi on muotoa

$$Y_L = jY_C + \frac{1}{100 + j100} = jY_C + \frac{1}{200} - \frac{j}{200} \quad (8.4-8)$$

Tämän imaginääriosa saadaan nolaksi (= lähdeimpedanssin imaginääriosan kompleksikonjugaatti) kun $Y_C = 1/200$. 50 Hz verkkotaajuudella tämä voidaan toteuttaa 16 uF kapasitanssilla ($jY_C = j\omega C$). Tällöin imaginääriosa (niin impedanssin kuin admittanssinkin) kumoutuu ja kuormaimpedanssin reaaliosaksi jää $Z_L = 1/Y_L = 200\Omega$. Tällöin kokonaisvirraksi ja hyöty- ja hukkatehoksi tulee

$$I = \frac{E}{R_s + Z_L} = \frac{230}{1 + 200} = 1,14A \angle 0^\circ$$

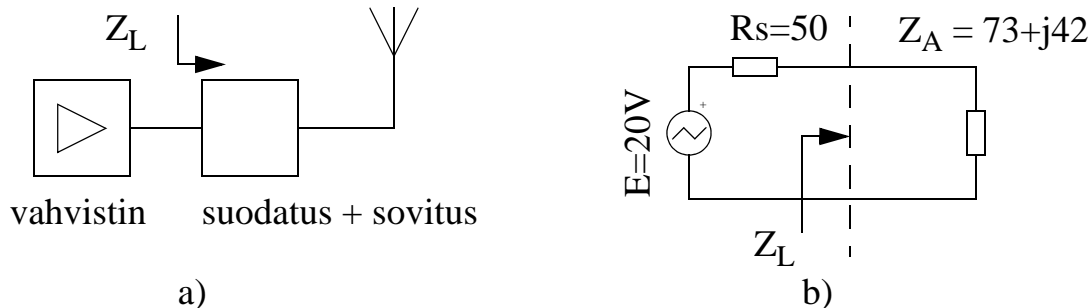
$$P_{eff} = Re(Z_L) \cdot |I|^2 = 200 \cdot \frac{230^2}{201^2} = 262 \text{ W} \quad (8.4-9)$$

$$P_{diss} = R \cdot |I|^2 = 1 \cdot \frac{230^2}{201^2} = 1,31 \text{ W}$$

Hukkateho on siis saatu pienennettyä puoleen kompensoimalla kuorman loisisimpedanssi. Hukkatehon pieneneminen johtuu siitä, että loisisimpedanssin kautta kulki alunperin vaihesiirrossa olevaa virtaa, joka ei tuonut kuormaan tehoa mutta aiheutti kuitenkin häviöitä resistiivisissä siirto johdoissa ja generaattorin lähtöimpedanssissa. Kompensoinnin jälkeen johdossa liikkuvan virran amplitudi on pienempi ja häviöt siten pienempiä, mutta kuormaan siirtyvä teho on edelleen sama.

Sähköverkossa loiskuormaa kompensoidaan käytännössäkin tähän tapaan.

Esim. Antennin impedanssisovitus (tehon maksimointi)



Matkapuhelimen suurin tehonkulutus tapahtuu lähettimen tehovahvistimessa, ja sen hyötysuhteen maksimoiminen on tärkeää puheajan maksimoimiseksi. Kuva a) esittää lähettimen toimintaperiaatetta ja kuva b) sen sijaiskytkentää: vahvistin tuottaa 20V_{rms} jännitesignaalin, sen lähtöimpedanssi on toimintataajuudella 50 ohm, ja antennin säteilyimpedanssi olkoon esimerkiksi $Z_A = (73 + j42)\Omega$. Ilman impedanssisovitusta antennaan saatava virta ja teho ovat

$$I = \frac{U}{Z_S + Z_A} = \frac{20}{50 + 73 + j42} = 0,153A \angle -18,8^\circ \quad (8.4-10)$$

$$P = \operatorname{Re}(Z_A) \cdot |I|^2 = 1,73W$$

Maksimaalinen tehonsiirto saavutetaan, kun $Z_L = Z_S^*$. Muutetaan siis sovitusverkolla kuorman impedanssia niin että

$$\operatorname{Im}(Z_L) = -\operatorname{Im}(Z_S) = 0 \quad \text{ja} \quad \operatorname{Re}(Z_L) = \operatorname{Re}(Z_S) = 50.$$

Kuorman reaktanssi voidaan kompensoida edelliseen tapaan joko sarja- tai rinnakkaiskondensaattorilla, mutta tällöin kuormaimpedanssin reaali-osaa ei saada sovitettua ja tehonsiirto ei ole maksimaalista. Menetellään sen sijaan seuraavan kuvan mukaisesti siten, että pienennetään rinnakkaisadmittanssilla kuorman reaali-osa 50 ohmiin (kuva b) ja kompensoidaan jäljelle jäänyt imaginääriosaa nolllaksi sarjareaktanssilla (kuva c). Tällöin kuorman (antenniin ja siitä taivaalle) saatava teho saadaan nousemaan teoreettiseen maksimiin eli tässä tapauksessa tasan 2 W:iin). Kuvassa b) vahvistimelle näkyvä impedanssi Z_L on

$$Z_L = \frac{1}{jY_P + \frac{1}{Z_A}} = \frac{\operatorname{Re}(Y_A) - j(\operatorname{Im}(Y_A) + Y_P)}{(\operatorname{Re}(Y_A))^2 + (\operatorname{Im}(Y_A) + Y_P)^2} \quad (8.4-11)$$

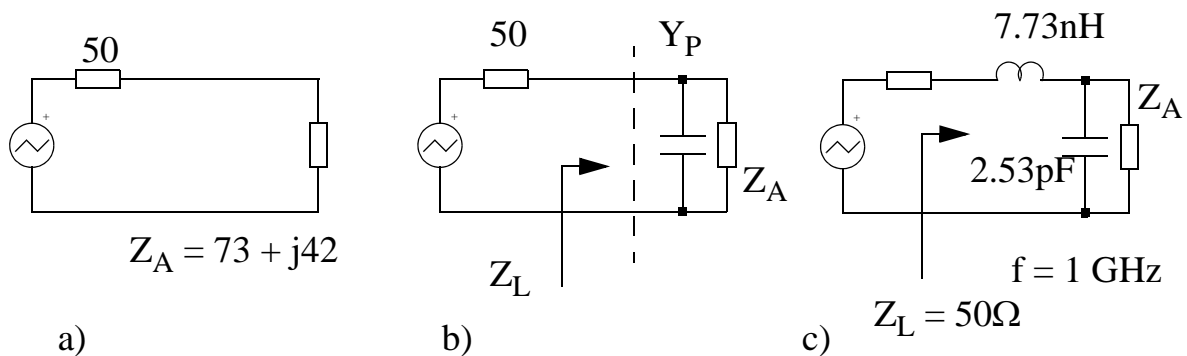
Tässä $Y_A = 1/Z_A = 10.3 \cdot 10^{-3} - j5.92 \cdot 10^{-3}$. Jotta **reaali**osaksi saataisiin 50 ohmia, täytyy lausekkeen (8.4-11) nimittäjän D olla arvoltaan $\operatorname{Re}(Y_A)/50 = 205.84 \cdot 10^{-6}$. Tämä toteutuu kun

$$(\operatorname{Re}(Y_A))^2 + (\operatorname{Im}(Y_A) + Y_P)^2 = D \rightarrow Y_P = j15.9 \times 10^{-3} \quad (8.4-12)$$

Tällöin Z_L :n imaginääriosaksi jää kaavan (8.4-11) mukaan $-j48.56$ ohm, joka voidaan kumota $+j48.56$ ohm sarjaimpedanssilla. 1 GHz lähetystaajuudella nämä reaktanssit voidaan toteuttaa 7.73 nH sarjainduktanssilla ja 2.53 pF rinnakkaiskapasitanssilla:

$$Y_P = j\omega C = 2\pi \cdot 10^9 \cdot 2.53 \cdot 10^{-12} = j0.0159$$

$$Z_L = j\omega L = 2\pi \cdot 10^9 \cdot 7.73 \cdot 10^{-9} = j48.56$$



Myös yhtälön (8.4-12) toinen ratkaisu $Y_P = -j0.0041$ johtaa toimivaan ratkaisuun, jossa rinnakkaiskomponentti on induktanssi ja sarjakomponentti on kapasitanssi ($L_p = 39.1$ nH, $C_s = 3.28$ pF). Sovitusverkon valinta riippuu komponenttiarvoista ja siitä, halutaanko sovitusverkolle ali- vai ylipäästävä taajuusvaste. Yleisesti käytettyjä sovitusverkkoja on parisenkymmentä eri tyyppiä, mutta niillä pystytään sovittamaan vain tietyntyyppisiä impedansseja. Esim. jos kuormaimpedanssin reaaliiosa on pienempi kuin signaalilähteen reaaliiosa, ensimmäisen sovituskomponentin on oltava kuorman kanssa sarjassa, eikä rinnalla kuten yo. esimerkissä.

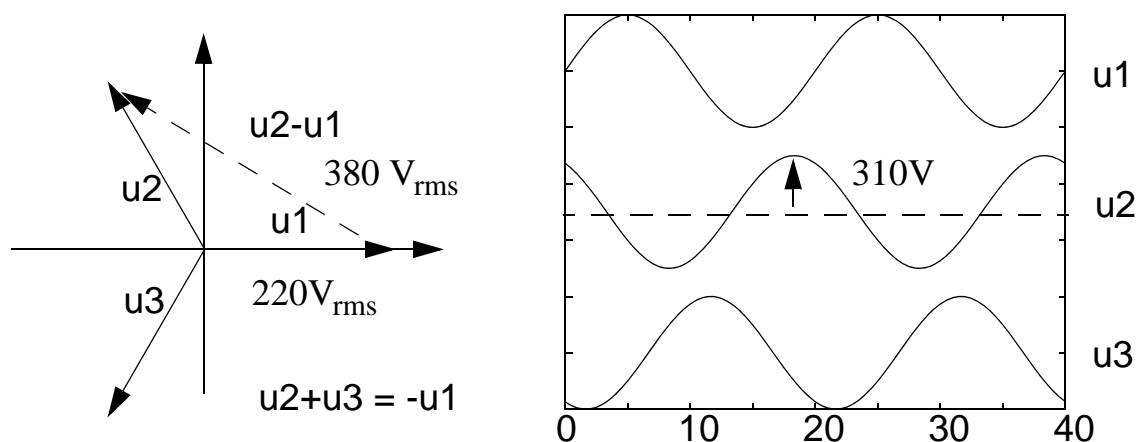
8.5 Kolmivaihevirta

Sähköisen energian jakelussa on mm. seuraavia käytännön ongelmia:

- Siirtojohtojen resistiiviset häviöt ($P = I^2R$) hukkaavat tehoa. Tämän tehohukan minimoimiseksi käytetään muuntajia, joilla nostetaan jännite korkeaksi ja pidetään virta ja sen aiheuttamat ohmiset häviöt pieninä.
- Siirtoon tarvitaan paljon raskaita kaapeleita: virralle tarvitaan sekä meno- että paluujohdin (paluujohdina voi käyttää myös maata, mutta tällaisissa systeemeissä häviöt ovat suuria)
- Tehontarve eri paikoissa vaihtelee suuresti, joten on eduksi kyetä muodostamaan edullisesti (ilman ylimääräistä muuntajaa) erisuuruisia jännitteitä.

Kolmivaihejännitteen siirto on hyvä ratkaisu kahteen jälkimmäiseen ongelmaan. Siinä sinimuotoinen jännite esiintyy kolmena, 120 asteen vaihesiirrossa olevana komponenttina, mikä tuo seuraavat edut:

- Jos kutakin vaihetta kuormitetaan tasaisesti (balanssoidusti), erillistä paluujohdinta ei tarvita vaan yhden vaiheen paluuvirta voi kulkea toisten vaihejohtimien kautta. Tämä on seurausta siitä, että kahden vaiheen vektorisumma antaa kolmannen vaiheen amplitudin miinusmerkkisenä. Tämän ansiosta säästetään n. puolet kaapeloinnista.
- Haluttu teho voidaan ottaa joko kunkin vaiheen ja maan välistä (ns. vaihejännite) tai kahden vaiheen välistä, jolloin saadaan $\sqrt{3}$ -kertainen jänniteamplitudi (ns. pääjännite). Normaalisissa sähköverkossa nämä jännitteet ovat tehollisarvoiltaan 220 V(rms) ja 380 V(rms). Koska tehollisjännite on huippujännite/ $\sqrt{2}$, vaihejännitteiden huippujännitteet ovat 310V ja pääjännitteen amplitudi on 540 V.



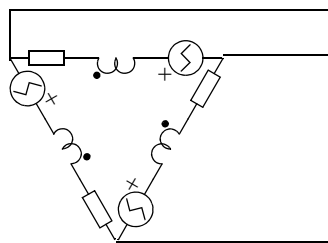
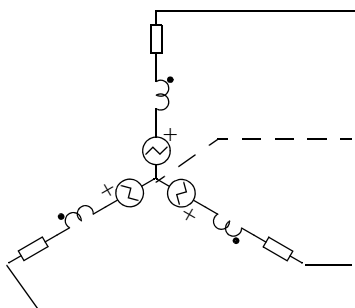
8.6 Tähti- ja kolmiokytkentä

3-vaiheista jännitettä tuotetaan vaihtovirtageneraattorilla (ja siitä pienempiä jännitteitä muuntajalla), ja generaattorin käämit voidaan kytkeä kahdella eri tavalla:

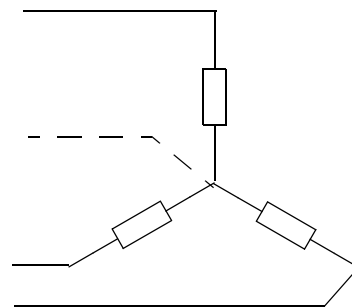
- tähtikytkentä, jossa generaattorin käämit on kytketty tähden muotoon ja kukin käämi tuottaa omaa vaihejännittettensä. Pääjännite voidaan ottaa kahden lähdön välistä. Tähtikytkennän keskipiste on jännitteetön ja periaatteessa virraton, mutta usein generaattorin ja kuorman tähtipisteet yhdistetään ns. nollajohtimella.
- kolmiokytkentä, jossa käämit ovat kolmion muotoisessa kytkennässä ja tuottavat suoraan pääjännitettä. Kolmiokytkennästä ei löydy maadoitettua tähtipistettä.

Kuorman puoleisessa päässä tähti- ja kolmiokytkentöjen ero on siinä, että tähtikytkennässä kuorma on vaihejännitteen ja maan välissä, kun taas kolmiokytkennässä kuorma on kahden vaihejännitteen välissä, jolloin kuorman yli vaikuttaa siis pääjännite, joka on $\sqrt{3}$ kertaa suurempi kuin vaihejännite. Yleensä pienitehoiset laitteet (lähes kaikki kodinkoneet) kytketään vaihejännitteeseen, ja vain suurtehoiset laitteet pääjännitteeseen.

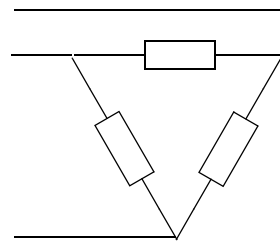
Jännitelähde lähtöimpedansseineen



Kuorma



Tähti

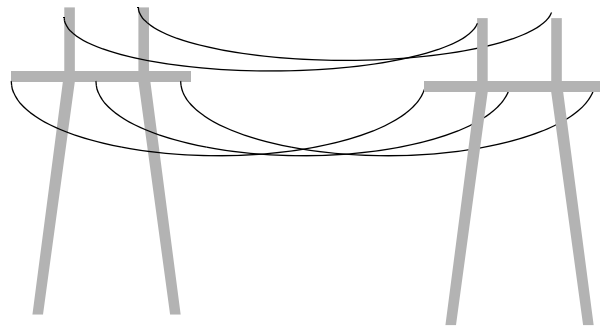
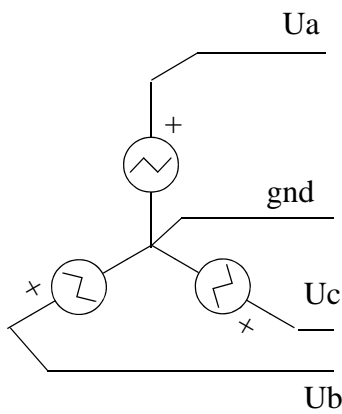


Kolmio

Jos 3-vaihejännitteen kaikkia vaiheita kuormitetaan samalla lailla, erillistä maakytkentää ei tarvita, jolloin kolme vaihejännitettä ja niiden paluuvirrat voidaan hoitaa kolmella kaapelilla. Käytännössä tähtikytkentäisissä korkeajännitelinjoissa käytetään kuitenkin usein maadoitettuja nollajohtimia, jotka toimivat ukkosenjohdattimina ja maavirran paluujohtimina, jos eri vaiheita kuormitetaan epätasaisesti. Koska suurin osa paluuvirroista kulkee vaihejohtimia pitkin, nollajohtimet voivat olla ohuempia kuin vaihejohtimet.

Kolmiokytkentää käytetään matalammilla jännitetasoilla ja siinä ei käytetä lainkaan erillistä nollajohdinta. Kolmiokytketyssä muuntajassa käämin jännite on pääjännitteen suuruinen ja käämin virta vaihevirta/ $\sqrt{3}$, joten se sopii suurille virroille ja pienille jännitteille. Tähtikytkentäisessä muuntajassa käämijännite on vaihejännitteen suuruinen ja käämivirta vaihevirta $\times \sqrt{3}$, jolloin tähtikytkentä soveltuu paremmin suurille jännitteille ja pienille virroille.

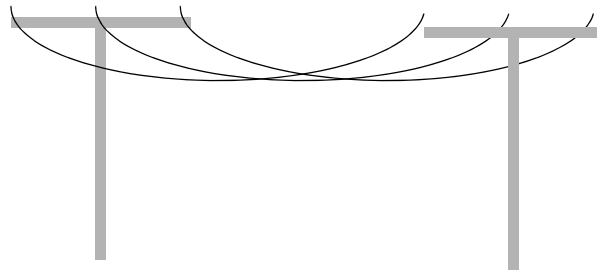
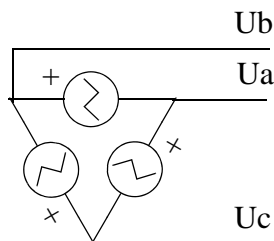
Tähtikytkentä (Y- tai T-kytkentä)



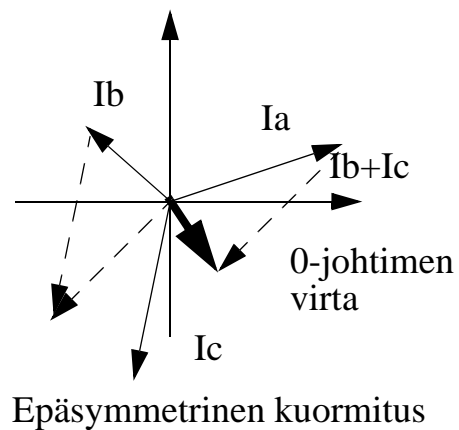
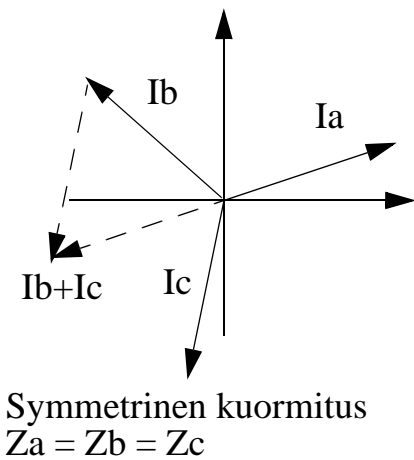
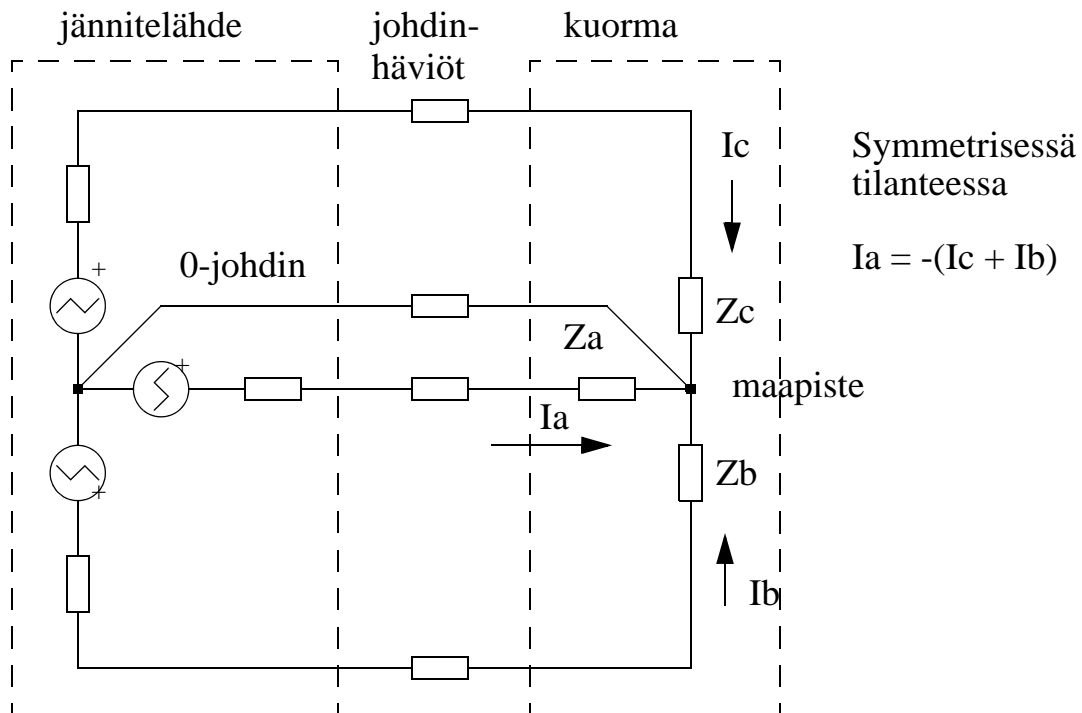
(110 kV, 220 kV, 440 kV runkoverkko)

verkon tunnistaa mm. eristeistä, eristepituus n. 1 cm / kV

Kolmiokytkentä (Π - tai Δ -kytkentä)



Oheisessa kuvassa on tähtikytkentäisen 3-vaiheverkon periaatekuva. Kuormat ovat tässä tapauksessa vaihejännitteen ja maan välissä. Lähteen ja kuorman välissä on johtimien häviöt, joiden vaikutusta voidaan minimoida pitämällä jännite korkeana ja siirrettävä virta pienenä. Optimaalisen tehosovituksen saavuttamiseksi jokaisen vaihejännitteen lähtö- ja kuormaimpedanssin imaginääriosien tulisi kompensoida toisensa. Jos kuorma ottaa loistehoa ja vaiheita ei kuormiteta symmetrisesti, eri vaiheiden paluuvirrat eivät kompensoi toisiaan, vaan myös nolajohtimessa kulkee paluuvirtaa.



9. LAPLACE-MUUNNOKSEN KÄYTTÖ PIIRIANALYYSISSÄ

9.1 Integraalimuunnoksista

Laplace-muunnos on erittäin tehokas apuväline verkkojen transientti- ja steady state -vasteiden ratkaisemisessa. Etenkin aikavasteiden ratkaisemisessa se systematisoi suuresti alkuehtojen käsittelyä.

Laplace-muunnos on yksi **integraalimuunnoksista**, jotka kuvaavat signaaleita niiden taajuuskäyttäytymisen avulla. Niiden merkittävin hyöty on se, että differentiaaliyhtälöiden ratkaisussa oleva herätteen ja vapaan vasteen välinen konvoluutiointegraali muuttuu muunnoksissa kahden muunnetun suureen tuloksi. Näin erilaisten vasteiden analyttinen käsittely on muunnetussa muodossa kevyempää kuin aikatasossa. Esitellään nyt lyhyesti sähkötekniikassa yleisesti käytettävät muunnokset ja kuvaukset.

Fourier-sarja

Seuraavassa kappaleessa todetaan, että **jaksolliset** signaalit voidaan esittää sinimuotoisten signaalien summana, jossa sinien taajuudet ovat alkuperäisen signaalin taajuuden ω_0 kokonaislukumonikertoja. Sarjan kertoimet osoittavat eri taajuuskomponenttien suhteellista amplitudia eli signaalin taajuussisältöä eli **spektriä**, ja koska taajuudet ovat selvästi erillisiä (1,2,3,... kertaa ω_0), jaksollisen signaalin spektriä sanotaan diskreetiksi tai viivaspektriiksi.

$$f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \cos(i\omega_0 t + \phi_i) \quad (9.1-1)$$

Fourier-muunnos

Fourier-muunnos laajentaa aikatason signaalin taajuusesityksen myös **jaksotomiin** (kertaluonteisiin) signaaleihin. Se on signaaliteoriassa paljon käytetty integraalimuunnos, ja se pyrkii esittämään signaalin $f(t)$ sinimuotoisina kompleksiosoittimina $\exp(j\omega t)$. Fourier-muunnos määritellään integraalina

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \cdot f(t) dt \quad (9.1-2)$$

missä $f(t)$ on ajan funktiona esitetty muunnettava funktio ja ω on taajuus, jonka energiasisältöä ko. signaalissa ollaan tutkimassa. Signaalin Fourier-muunnos kuvaa

signaalin spektriä, mutta Fourier-sarjasta poiketen jaksottoman signaalin Fourier-muunnoksen tuloksena saatu spektri on **jatkuva**, so. amplitudiarvo on määritelty kaikille taajuuksille eikä vain perustaajuuden monikerroille.

Laplace-muunnos

Kaikkia signaaleja ei pystytä Fourier-muuntamaan, koska kaavassa (9.1-2) törmätään helposti ongelmaan mikä valitaan sinin arvoksi äärettömyydessä. Laplace-muunnokseen on lisätty eksponentiaalinen vaimennus, mikä mahdollistaa useampien funktioiden muuntamisen. Myöhemmin tullaan havaitsemaan, että Fourier-muunnos onkin Laplace-muunnoksen pelkistys, ja Laplace-muunnosta käyttäen voidaan laskea muutakin kuin steady-state -sinisignaaliavasteita. Laplace-muunnos määritellään seuraavasti:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt \quad (9.1-3)$$

Tässä s on kompleksiluku, jolla voi olla myös reaaliosa

$$s = \sigma + j\omega \quad (9.1-4)$$

Laplace-muunnos pyrkii siis mallittamaan signaalia eksponentiaalisesti kasvavina tai vaimenevina sinimuotoisina värähtelyinä tai puhtaina eksponentiaalisina vasteina $\exp((\sigma+j\omega)t)$. Laplace-muunnos soveltuu yleisessä tapauksessa verkkoyhtälöiden differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen, ja sitä käytetään erittäin yleisesti säätötekniikassa ja erilaisten transienttiherätteiden vasteiden analyysissä. Steady-state -taajuusvasteen analysoimista varten eksponentin reaaliosa σ voidaan merkitä nolllaksi, jolloin sijoituksella

$$s=j\omega \quad (9.1-5)$$

Laplace-muunnos palautuu Fourier-muunnokseksi, ja vasteen muunnos antaa signaalin steady-state -spektrin.

z-muunnos

Laplace-muunnos soveltuu erittäin hyvin jatkuva-aikaisten transienttisignaalien vasteen analyysiin, mutta jos kyseessä on tiettyinä ajanhetkinä tapahtuvaan näytteenottoon perustuva **diskreettiaikainen** systeemi, Laplace-muunnoksen käyttö käy kankeaksi. Tällöin on edullisempaa käyttää z-muunnosta, joka on kehitetty eri-

tyisesti näytejonojen analysointiin. z-muunnos määritellään kaavalla

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k} \quad (9.1-6)$$

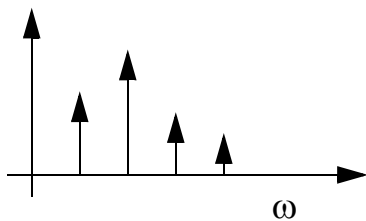
missä z on kompleksiluku, jolla voi olla sekä reaali- että imaginääriosa. z-muunnoksen yhteys aiempiin muunnoksiin on seuraava: sijoituksella

$$z = e^{sT} \quad (9.1-7)$$

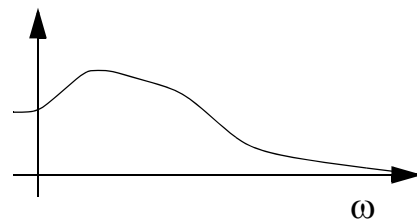
missä T on näytepisteiden väli, palautetaan z-muunnos Laplace-muunnokseksi, ja sijoituksella

$$z = e^{j\omega T} \quad (9.1-8)$$

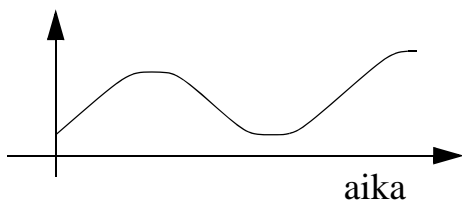
saadaan laskettua z-muunnetun vasteen steady-state taajuusvaste.



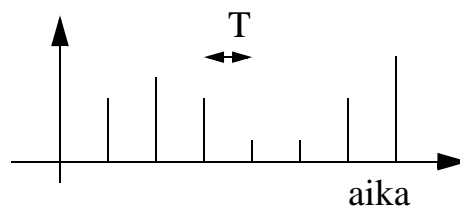
Diskreetti spektri (viivaspektri)



Jatkuva spektri



Jatkuva signaali



Diskreettiaikainen signaali (näytejono)

9.2 Yleisimpiä Laplace-muunnoksia

Taulukko 5: Yleisimpiä Laplace-muunnoksia

	$x(t)$	$X(s)$
impulssi	$\delta(t)$	1
yksikköaskel	1	$1 / s$
ramppi	t	$1 / s^2$
n:s potenssi	t^n	$n! / s^{n+1}$
a:s potenssi ($a > 0$)	$t^{a-1} / \Gamma(a)$	$1 / s^a$
	$1 / \sqrt{\pi t}$	$1 / \sqrt{s}$
eksp.funktio	e^{-at}	$1 / (s+a)$
	$1 - e^{-at}$	$a / (s(s+a))$
	$t^n e^{-at}$	$n! / (s+a)^{n+1}$
sini	$\sin(\omega t)$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
kosini	$\cos(\omega t)$	$s / (s^2 + \omega^2)$
sinh	$\sinh(at)$	$a / (s^2 - a^2)$
cosh	$\cosh(at)$	$s / (s^2 - a^2)$
lineaarisuus	$ax(t) + by(t)$	$aX(s) + bY(s)$
taajuussiiros	$e^{-at} x(t)$	$X(s+a)$
aikasiirros	$x(t-T)$	$e^{-sT} X(s)$
aikaderivaatta	$dx(t) / dt$	$sX - x(0)$
n:s aikaderivaatta	$d^n x(t) / dt^n$	$s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} x^{(1)}(0) \dots - x^{(n-1)}(0)$
aikaintegraali	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s} \cdot \int_{-\infty}^0 x(t) dt$
konvoluutio	$\int_0^t x(\tau) g(t-\tau) d\tau$	$G(s)X(s)$
taajuusderivaatta	$(-t)^n x(t)$	$d^n X(s) / ds^n$

9.3 Aikavasteiden laskeminen alkuehtoineen

Laplace-muunnoksen merkittävimpiä ominaisuuksia on, että muunnosta käytäen integrointi ja derivointi muuttuvat taajuusmuuttujalla s jakamiseksi ja kertomiseksi. Taulukon 7 kaavoja käyttämällä saadaan peruskomponenttien virtajänniteyhtälöt alkuehtoineen muotoon, jotka voidaan sijoittaa suoraan sekä solmupiste- että silmukkavirtayhtälöihin.

Taulukko 6: Komponenttien virtayhtälöt alkuehtoineen

	$U(s) =$	$I(s) =$
R	$R \cdot I(s)$	$G \cdot U(s)$
L	$sL \cdot I(s) - Li(0)$	$\frac{U(s)}{sL} + \frac{i(0)}{s}$
C	$\frac{I(s)}{sC} + \frac{u(0)}{s}$	$sC \cdot U(s) - Cu(0)$

Integrointia ja derivointia ei siis tarvita, vaan differentiaaliyhtälöt palautuvat lineaariseksi yhtälöryhmäksi, josta haluttu lähtösuure voidaan ratkaista matriisialgebran keinoin. Saatu tulos on taajuusmuuttujan s funktio, joka on sitten pilkottava esim. osamurtokehitelemänä niin pieniin osiin, että jokaiselle osalle löytyy käänteismuunnos.

Huomannet, että Laplace-muunnettujen suureiden $U(s)$:n ja $I(s)$:n yksiköt ovat nyt Vs ja As tai V/Hz ja A/Hz - ne siis kuvaavat suureita taajuuden funktiona.

Esim:

$$u_C = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i dt \quad (9.3-1)$$

josta

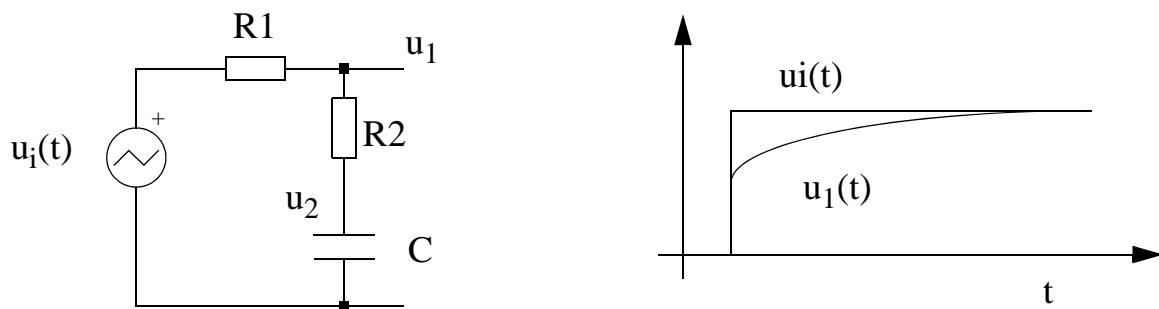
$$U_C(s) = \frac{I(s)}{Cs} + \frac{1}{Cs} \cdot \int_{-\infty}^0 i dt = \frac{I(s)}{Cs} + \frac{q(0)}{Cs} \quad (9.3-2)$$

Esimerkki

Luvussa 5 oli oheinen RC-piiri, jota kuvattiin differentiaaliyhtälöllä

$$(R_1 + R_2) \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt = U_o \cdot Heaviside(t) \quad (9.3-3)$$

Ratkaistaan sama nyt Laplace-muunnosta käyttäen



Muodostetaan nyt Laplace-muunnetyt virtayhtälöt alkuehtoineen solmuille 1 ja 2:

$$\begin{aligned} G_1(U_1(s) - U_{in}(s)) + G_2(U_1(s) - U_2(s)) &= 0 \\ G_2(U_2(s) - U_1(s)) + sCU_2(s) - Cu_{C0} &= 0 \end{aligned} \quad (9.3-4)$$

missä u_{C0} on kondensaattorin jännite ajanhetkellä $t=0$. Muokataan yhtälöt matriisimuotoon (tulojännite on askelfunktio, $U_{in}(s) = U_{in}/s$)

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + sC \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 U_{in}/s \\ Cu_{C0} \end{bmatrix} \quad (9.3-5)$$

jolloin alkujännite u_{C0} näkyy vakiona herätevektorissa. Ratkaistaan U_1

$$U_1 = \frac{1}{\frac{C(G_1 + G_2)}{G_1 G_2}} \cdot \left(\frac{G_1 G_2 U_{in}}{s} + G_1 C U_{in} + G_2 C u_{C0} \right) \quad (9.3-6)$$

$$s + \frac{1}{(G_1 + G_2)C}$$

Tämän kaikille kolmelle termille löytyy käänteismuunnokset suoraan taulukosta, jolloin aikataason esitys saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= (1 - e^{-at})U_{in} + \frac{G_1 U_{in}}{G_1 + G_2} e^{-at} + \frac{G_2 u_{C0}}{G_1 + G_2} e^{-at} \\
 &= U_{in} - \frac{G_2}{G_1 + G_2} (U_{in} - u_{C0}) e^{-at}
 \end{aligned}
 \tag{9.3-7}$$

missä

$$a = \frac{1}{\tau} = \frac{G_1 G_2}{(G_1 + G_2)C}
 \tag{9.3-8}$$

Tästä havaittaneen, että kaikki kertoimet ja alkuehdot kulkevat hyvin kätevästi mukana yhtälön ratkaisussa.

Maple-koodina ratkaisu näyttää lyhyesti tältä:

```

restart:with(linalg):with(inttrans):
Y := matrix([ [G1+G2, -G2], [-G2, G2+s*C] ]);
UU := vector([G1*Uin/s,C*uc0]);
VV := evalm( inverse(Y) &* UU);
v1 := invlaplace(VV[1],s,t);

```

9.4 Esimerkki: Polttomoottorin sytytysjärjestelmä

Polttomoottorin sytytys toimii siten, että virranjakajan katkoja katkoo sytytyspuolan läpi kulkevaa virtaa ja saa siten aikaan suuren dI/dt :n, joka indusoi sytytyspuolan kärkien väliin niin suuren jännitteen, että sinne syntyy sähköpurkaus, joka sytyttää sylinterissä olevan bensiinin ja ilman seoksen.

Analysoidaan sytytyspiiri alkuehtoiteen Laplace-muunnosta käyttäen.

Latautuminen (kuva b)

Kuvassa a) on sytytyspiirin piirikaavio. Vaiheessa b) katkoja johtaa, jolloin kondensaattori C (1 μ F) on oikosuljettu ja kytkentä pelkistyy RL-piiriksi, jonka Laplace-muunnettu jänniteyhtälö alkuehtoiteen on muotoa

$$sL \cdot I - L \cdot i_0 + R \cdot I = \frac{U_b}{s} \quad (9.4-1)$$

Tästä

$$I = \frac{U_b/s + L \cdot i_0}{sL + R} = \frac{U_b/L}{s + R/L} \cdot \frac{1}{s} + \frac{i_0}{s + R/L} \quad (9.4-2)$$

joka käännteismuuntamalla

$$i(t) = \frac{U_b}{R} \cdot (1 - e^{-t/(L/R)}) + i_0 \cdot e^{-t/(L/R)} \quad (9.4-3)$$

Alkuehdosta riippumatta vaste asettuu eksponentiaalisesti kohti arvoa $U_b/R = 12\text{V}/3\text{ohm} = 4\text{A}$. Aikavakio $L/R = 6\text{mH}/3\text{ohm} = 2\text{ms}$, jolloin virta saavuttaa 1% tarkkuudella loppuarvonsa 10 ms:ssa. 4-sylinterinen moottori sytyttää kaksi kertaa kierroksella, ja jos pyörimisnopeus on alle 3000 kierrosta minuutissa (50 kierr./s), sytytysten väli on suurempi kuin 10 ms. Voidaan siis olettaa, että sytytysten välissä muuntajan virta ehtii latautua likimain 4A arvoon (V8-koneessa aikavakiota on syytä pienentää). Tällöin ensiökäämiin varastoituu sytytystä varten energiaa

$$W = 0,5Li^2 = 48 \text{ mJ} \quad (9.4-4)$$

Sytytys (kuva c)

Kun katkoja katkaisee virrankulun (kuva c), häiriönpoistokondensaattori C pehmentää virran katkeamista ja saa aikaiseksi RLC-sarjapiirin, jonka vaste on laskettavissa seuraavalla tavalla:

Kirjoitetaan jälleen KVL-yhtälö alkuehtoiteen. Se on muotoa

$$IR + sLI - Li_0 + \frac{I}{sC} + \frac{u_{c0}}{s} = \frac{U_b}{s} \quad (9.4-5)$$

josta

$$I = C \cdot \frac{U_b - u_{c0} + sLi_0}{1 + sRC + s^2LC} \quad (9.4-6)$$

ja kelan yli oleva jännite on

$$U_L = sLI - Li_0 = \frac{-L(sC(u_{c0} - U_b) + i_0 + i_0sCR)}{1 + sRC + s^2LC} \quad (9.4-7)$$

Tälle pitäisi keksiä käänteis-Laplace -muunnos, joka voi olla eksponentiaalista tai sinimuotoista numeerisista arvoista riippuen. Nyt nimittäjäpolynomin eli karakteristisen yhtälön juuret ovat imaginääriset

$$p = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC} = \frac{-R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC} = -250 \pm j12907 \quad (9.4-8)$$

joten verkon ratkaisu on alivaimennettu sinimuotoinen värähtely, jossa sinitermin vaihe riippuu yleisessä tapauksessa alkuehdoista. Nyt alkuehtoina on $u_{c0} = 0$ ja $i_0 = U_b/R$, jolloin vasteeksi saadaan käänteismuunnosta

$$\frac{Im(p)}{(s - Re(p))^2 + Im(p)^2} \leftrightarrow e^{Re(p) \cdot t} \cdot \sin(Im(p) \cdot t) \quad (9.4-9)$$

käyttäen

$$U_L = \frac{-U_b/RC}{1/LC + s(R/L) + s^2} \leftrightarrow u_L(t) = \frac{-U_b}{RC} \cdot e^{-t(R/2L)} \cdot \frac{\sin(\omega_o t)}{\omega_o} \quad (9.4-10)$$

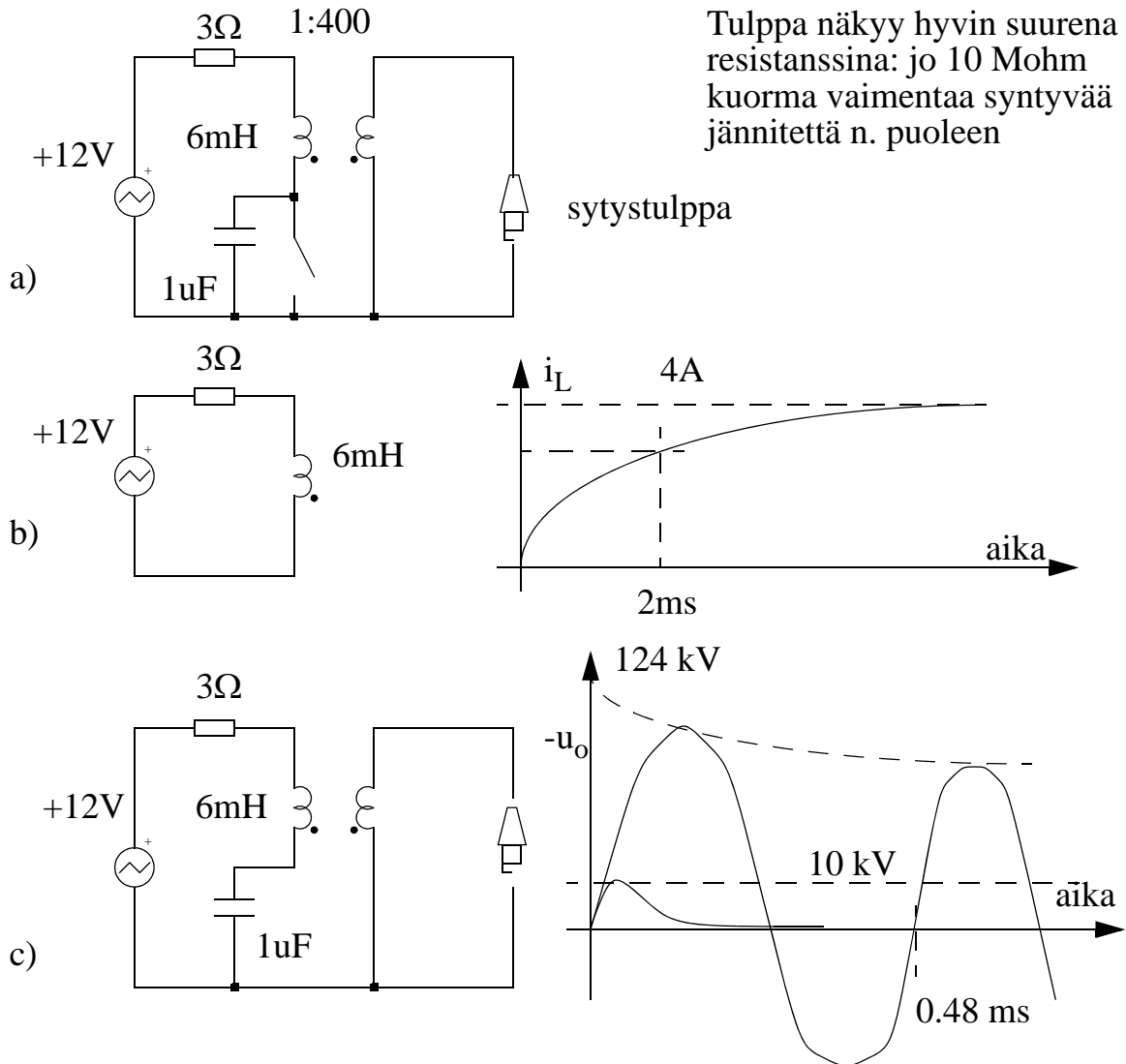
jossa

$$\omega_o = \frac{\sqrt{(4LC - R^2C^2)}}{2LC} = 12907 \quad (9.4-11)$$

eli värähtelyn taajuus on 2000 Hz, amplitudi 310 V ja vaimenemisaikavakio $1/250 = 4\text{ms}$. Toisiopuolella jänniteamplitudi kuormittamassa tilanteessa (kipinä ei ole syttynyt) on 400-kertainen, jolloin amplitudi nousee 124kV:iin.

$$u_o(t) = (-124 \text{ kV}) \cdot e^{-t/(4\text{ms})} \cdot \sin(2\pi 2054t) \quad (9.4-12)$$

Värähtelyn jaksonpituus $T=1/f$ on 0.48 ms, joten ensimmäisen neljännesjakson aikana vaimennuskerroin ei juurikaan vaikuta ($\exp(-0.12\text{ms}/4\text{ms})=0.97$), vaan amplitudi ehtii nousta liki täyteen arvoonsa. Käytännössä jo n. 10 kV jännite riittää kipinäntiini, jolloin (bensiinien syttymisen lisäksi) toisiopuolelle syntyy johtava valokaari, joka kuormittaa voimakkaasti ensiöpuolta. Tähän asti toiminta kuitenkin noudattaa yhtälöä (9.4-12), ja tästä voidaan laskea että n. 6 us:n kuluttua katkojen kärkien avautumisesta tulppa lyö kipinää.



9.5 Steady-state vasteiden laskeminen

Alkuehtoineen käytettynä Laplace-muunnos soveltuu transienttivasteen analysointiin, mutta sitä voidaan käyttää myös pelkän steady-state -taajuusvasteen analysointiin. Tämä tehdään siten, että reaktiivisten komponenttien yhtälöistä **poistetaan alkuehdot ja** Laplace-muuttajasta $s=\sigma+j\omega$, joka kuvaan vaimenevaa tai kasvavaa sinimuotoista signaalia $e^{(\sigma+j\omega)t}$ **jätetään pois amplitudin muutosta kuvaava reaaliosa σ** . Näin signaaliksi jää siis vain sinimuotoinen $e^{j\omega t}$.

Alkuehdot poistettuna saadaan piirielinten Laplace-muunnetuiksi immittansseiksi taulukon 7 mukaiset arvot:

Taulukko 7: Piirielinten Laplace-muunnokset

	impedanssi Z	admittanssi Y
L	sL	1 / (sL)
C	1 / (sC)	sC
R	R	1 / R

Näin verkon transientti- ja taajuusvasteen analysointi onnistuu yksinkertaisesti sijoittamalla komponentin arvoksi taulukon 5 mukainen Laplace-muunnos ja ratkaisemalla verkkofunktio solmupiste- tai silmukavirtamenetelmää käyttäen. Tällöin keskittyillä, reaaliarvoisilla komponenteilla kaikista verkkofunktioista tulee reaali-kertoimisia s:n rationaalipolynomeja. Tästä taajuusvaste saadaan sijoittamalla s:n paikalle vakioamplitudista sinivärähtelyä vastaava

$$s = j\omega. \quad (9.5-1)$$

Taajuusvaste lasketaan siis seuraavasti:

- kirjoita verkkoyhtälöt Laplace-muunnettuna
- merkitse integroinnin ja derivoinnin alkutilat nolliksi
- ratkaise haluamasi verkkofunktio
- sijoita $s = j\omega$

Esimerkki: Sallen-Key -suodatin

Kuvan aktiivisuodattimessa on kaksi riippumatonta solmua, sillä tulosolmun asettaa jännitelähde U_{in} ja lähtösolmun jänniteohjattu jännitelähde KU_2 , jossa K on pienehkö jännitevahvistus ($1 < K < 3$). Kirjoitetaan virtayhtälöt näille solmuille:

$$\begin{aligned} G_1(U_1 - U_{in}) + sC_1(U_1 - U_3) + G_2(U_1 - U_2) &= 0 \\ G_2(U_2 - U_1) + sC_2(U_2 - 0) &= 0 \end{aligned} \quad (9.5-2)$$

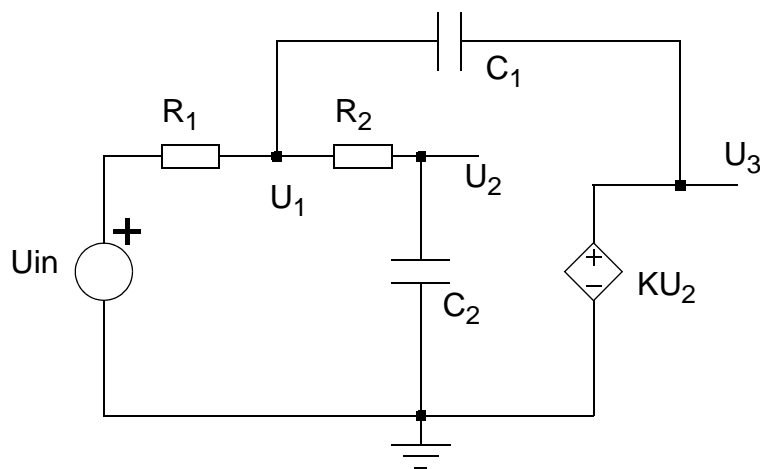
joka sijoittamalla $U_3 = KU_2$ ja siirtämällä vakio-termi G_1U_{in} toiselle puolelle voidaan kirjoittaa matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_1 + sC_1 & (-G_2 - sC_1K) \\ -G_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1U_{in} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.5-3)$$

Tästä voidaan ratkaista U_2 , ja koska $U_3 = KU_2$,

$$\begin{aligned} U_3 &= K \left| \begin{array}{cc|c} G_1 + G_1 + sC_1 & G_1U_{in} & / \\ -G_2 & 0 & \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} G_1 + G_1 + sC_1 & (-G_2 - sC_1K) \\ -G_2 & G_2 + sC_2 \end{array} \right| \\ &= \frac{KG_1G_2U_{in}}{s^2C_1C_2 + (G_1C_2 + G_2C_2 + (1-K)G_2C_1)s + G_1G_2} \end{aligned} \quad (9.5-4)$$

josta sijoituksella $s = j\omega$ saadaan taajuusvaste laskettua.

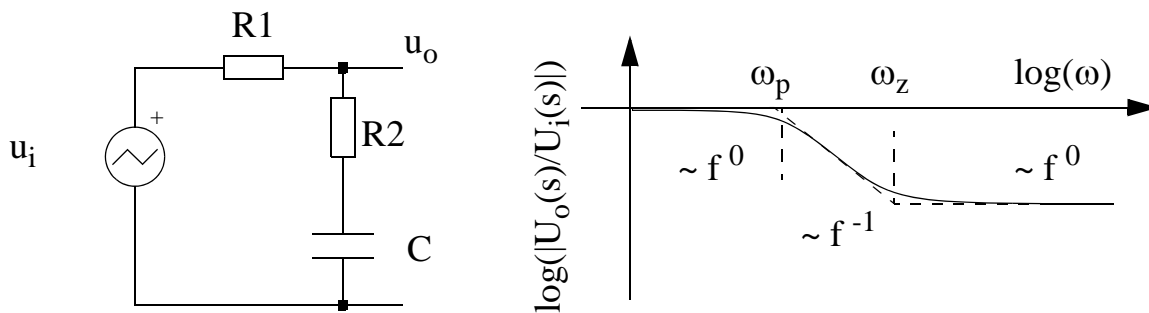


9.6 Nollat ja navat

Taajuusvasteen nurkkataajuudet voidaan laskea etsimällä Laplace-muunnetun siirtofunktion osoittaja- ja nimittäjäpolynomin nollakohdat, joita kutsutaan nolliksi ja navoiksi (zero ja pole). Kunkin nollan kohdalla f^K -muotoisen siirtofunktion potenssi kasvaa, ja navan kohdalla pienenee. Alla olevassa esimerkissä napa ω_p lähentelee pienentämään vahvistusta (vaste muuttuu $\sim f^{-1}$) ja nolla ω_z taittaa sen takaisin vaakaan ($\sim f^0$). Nurkkataajuuksia suoraviivaisesti yhdistävää approksimaatiota sanotaan Boden kuvaajiksi.

Nollan tai navan arvo voi olla negatiivinen tai kompleksinen, ja taajuusvasteen muoto muuttuu taajuudella, joka vastaa nollan tai navan arvon itseisarvoa.

Esim.



$$\begin{aligned} \frac{U_o(s)}{U_i(s)} &= \frac{R_2 + 1/sC}{R_1 + (R_2 + 1/sC)} \\ &= \frac{1 + sR_2C}{1 + s(R_1 + R_2)C} \end{aligned} \quad (9.6-1)$$

$$\begin{aligned} \text{Nolla: } 1 + sR_2C = 0 &\quad \rightarrow \quad s_z = -1/R_2C \\ \text{Napa: } 1 + s(R_1 + R_2)C = 0 &\quad \rightarrow \quad s_p = -1/(R_1 + R_2)C \end{aligned}$$

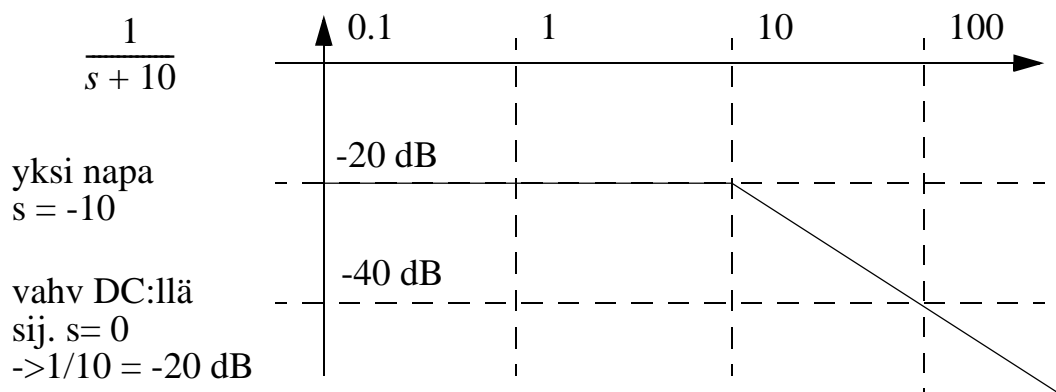
Nyt siis $\omega_z = |s_z|$ ja $\omega_p = |s_p|$.

9.7 Boden kuvaajan hahmotteleminen

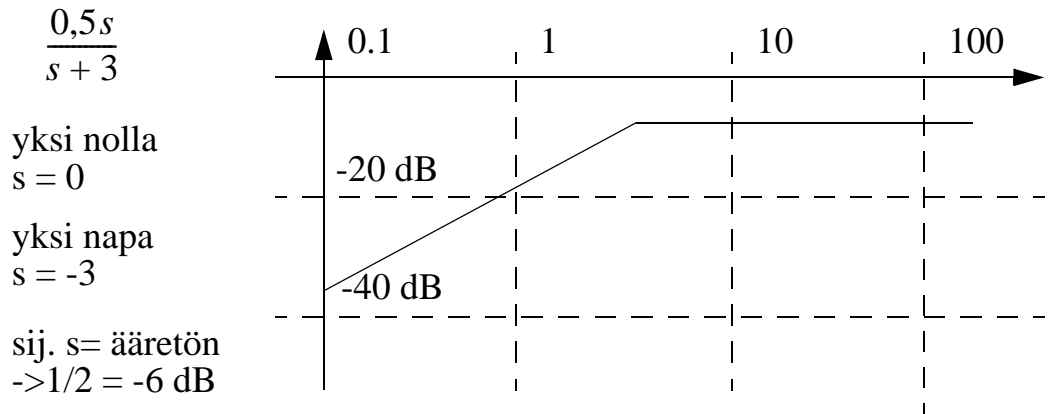
Boden kuvaaja seuraa taajuusvasteen asymptootteja, ja se on tarkimmillaan koh- tuullisen kaukana nurkkataajuuksista. Koska taajuusvasteiden asymptoottinen vaste on aina muotoa f^K , missä K on positiivinen tai negatiivinen kokonaisluku, taajuuden kymmenkertaistuminen saa aikaan vasteen 10^K -kertaistumisen. Logaritmisella taajuus- ja amplitudiaskeikolla tämä vastaa kulmakerrointa $K \cdot 20$ dB/dekadi. Boden amplitudikuvaajan hahmottelemiseen onkin seuraavat yksinkertaiset säännöt:

- Tarkista onko funktiolla nappoja tai nollia origossa. Jos ei, vaste lähtee pieniltä taajuuksilta vaakasuoraan, mutta jos on, vasteen kulmakerroin kuvan vasemmassa laidassa on $(Z-P) \cdot 20$ dB/dek, missä Z ja P ovat origossa olevien nollien ja napojen määrä
- Nolla taittaa vastetta ylöspäin $+20$ dB/dekadi verran sillä taajuudella, joka vastaa nollan etäisyyttä origosta
- Napa taittaa vastetta alaspäin -20 dB/dekadi verran sillä taajuudella, joka vastaa napan etäisyyttä origosta
- Kompleksinen napa tai nolla vaikuttaa kuin kaksi samalla taajuudella olevaa napaa tai nollaa.
- Amplitudivasteen päästökaistan vahvistuksen voi laskea yhdellä pistetaajuudella

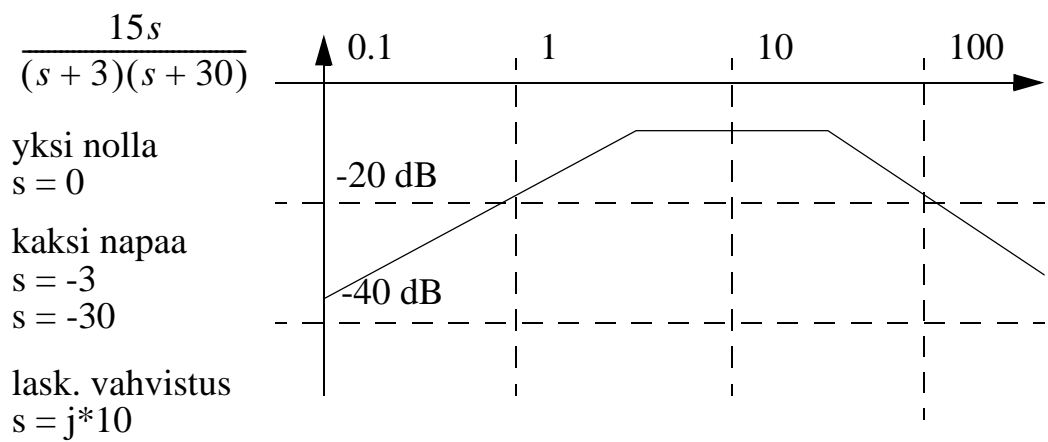
Esim. Alipäästö



Esim. Ylipäästö



Esim. Kaistanpäästö



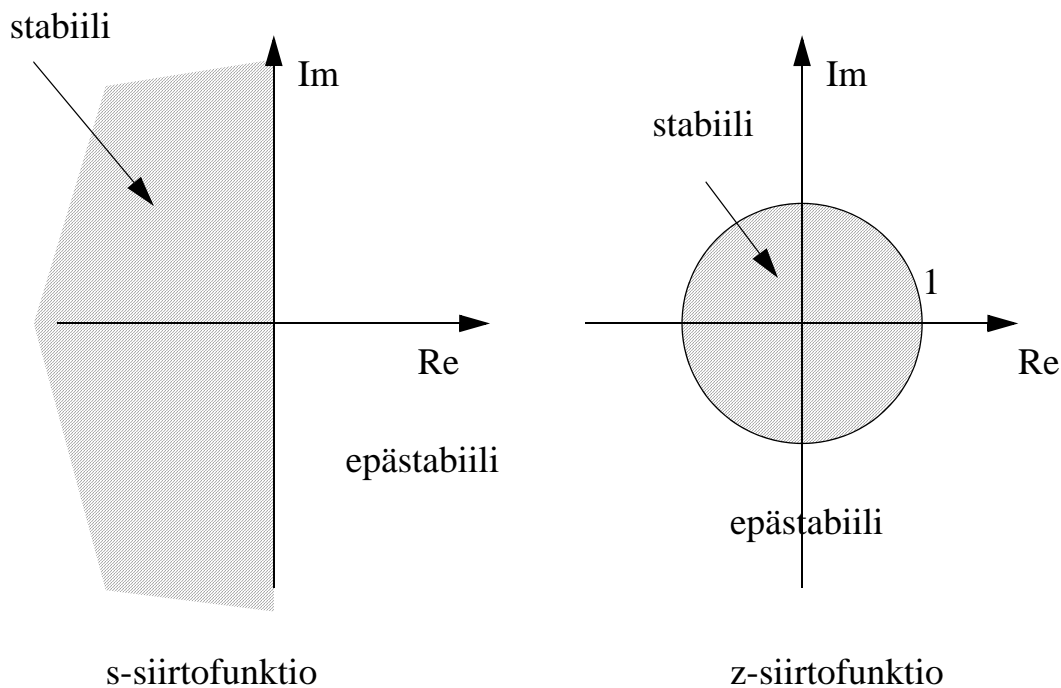
9.8 Siirtofunktion stabiilisuudesta

Laplace-muotoisen siirtofunktion navat vastaavat eksponentiaalisen aikavasteen aikavakioita (ks. Piiriteoria II). Eksponenttifunktio puolestaan vaimenee, jos aikavakio on negatiivinen, kasvaa räjähdysmäisesti, jos aikavakio on positiivinen, joten on loogista, että

Laplace-siirtofunktio on stabiili vain jos sen kaikkien napojen reaaliosa on negatiivinen. Tällöin niiden sanotaan olevan s -tason vasemmassa puolitasossa (left half-plane, LHP).

Jo tässä yhteydessä on hyvä oppia ero diskreettiaikaisten systeemien analysointiin tarkoitettuun z -muunnokseen. Z -muunnoksen aikavasteet ovat geometriska sarjoja, joiden suppenemisalue (ja siten myös napojen stabiili alue) on kompleksitason yksikköympyrän sisällä.

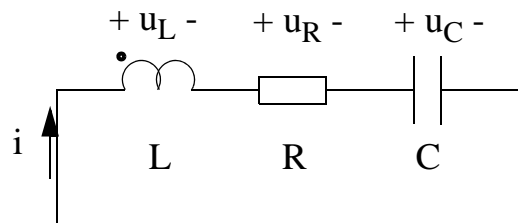
Alla on siis esitetty stabiilin siirtofunktion napojen sijainti Laplace-muunnetussa ja z -muunnetussa siirtofunktiossa.



10. KORKEAMMAN ASTEEN VERKKOJEN VASTEET

10.1 Johdantoa

Kuten aiemmin todettiin, verkot, joissa on yksi reaktiivinen komponentti, ovat yhden aikavakion systeemejä. Jos verkossa on useampia reaktiivisia komponentteja, on sillä myös useampia aikavakioita ja niiden kuvaamiseen tarvitaan korkeamman asteluvun differentiaaliyhtälöitä. Aloitetaan verkoista, joiden toimintaa voidaan kuvata toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä.



Sovelletaan oheisessa kuvassa KVL:ää silmukassa oleviin jännitehäviöihin. Tällöin

$$\begin{aligned}
 u_L + u_R + u_C &= 0 \\
 L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i dt &= 0 \\
 \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i &= 0
 \end{aligned} \tag{10.1-1}$$

Tämä on toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisuksi kokeillaan jälleen eksponenttifunktiota

$$i(t) = K \cdot e^{st} \tag{10.1-2}$$

joka yhtälöön (10.1-1) sijoittamalla saadaan (samaa tulokseen päästään Laplace-muunnosta käyttäen)

$$\left(s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC} \right) \cdot e^{st} = 0 \tag{10.1-3}$$

Ratkaisu $e^{st} = 0$ on triviaali ($i=0$), joten pakotetaan sulkulauseke nolaksi ja katsotaan mitkä ratkaisut saadaan kertoimelle s ($=1/\text{aikavakio}$). Saadaan siis ns. **karakteristinen yhtälö**

$$s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (10.1-4)$$

jonka ratkaisut ovat

$$s = \frac{-\left(\frac{R}{L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = -\left(\frac{R}{2L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (10.1-5)$$

Tällä on neliöjuurilausekkeen arvosta riippuen kolme erilaista mahdollista ratkaisua:

Tapaus I: $(R/2L)^2 - 1/LC > 0$ (ylivaimennettu)

Karakteristisella yhtälöllä on kaksi erisuurta reaalista ratkaisua s_1 ja s_2 , jolloin homogeenisen yhtälön (verkon vapaan vasteen) ratkaisuksi tulee kahden eksponenttifunktion summa

$$i(t) = K_1 \cdot e^{s_1 t} + K_2 \cdot e^{s_2 t} \quad (10.1-6)$$

Tapaus II: $(R/2L)^2 - 1/LC = 0$ (kriittisesti vaimennettu)

Karakteristisella yhtälöllä on kaksinkertainen reaalinen ratkaisu s_1 . Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä on kaksi alkuehtoa, joten pelkkä eksponenttifunktio ei riitä ratkaisuksi, vaan yleinen ratkaisu on muotoa

$$i(t) = K_1 \cdot e^{s_1 t} + K_2 \cdot t \cdot e^{s_1 t} \quad (10.1-7)$$

Tapaus III: $(R/2L)^2 - 1/LC < 0$ (alivaimennettu, värähtelevä)

Karakteristisella yhtälöllä on kaksi erisuurta kompleksista ratkaisua s_1 ja s_2 , jolloin homogeenisen yhtälön (verkon vapaan vasteen) ratkaisuksi tulee kahden kompleksisen eksponenttifunktion summa, joka pelkistyy sinimuotoiseksi vasteeksi

$$\begin{aligned} i(t) &= A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \\ &\rightarrow e^{\sigma t} \cdot (K_1 \cdot \cos(\omega_o t) + K_2 \cdot \sin(\omega_o t)) \end{aligned} \quad (10.1-8)$$

missä σ = karakteristisen yhtälön reaali- ja ω_o imaginääriosa ja $K_1=A_1+A_2$ ja $K_2=A_1-A_2$.

10.2 Toisen asteen systeemin yleinen muoto

Edellinen esimerkki voidaan esittää yleisessä muodossa

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = 0 \quad (10.2-1)$$

Tällöin karakteristisen yhtälön ratkaisut ovat kertoimien a_1 ja a_0 funktiona

$$s = -\left(\frac{a_1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0} \quad (10.2-2)$$

jossa neliöjuurilausekkeen sisältö määrää ratkaisun tyyppin (eksponentiaalinen vai sinimuotoinen). Kertoimet muodostuvat komponenttiarvoista, joten passiivisissa kytkennöissä (joissa ei ole vahvistimia tai muuntajia) kertoimien a_0 ja a_1 on oltava positiivisia. Tutkitaan nyt ratkaisun tyyppiä, kun a_0 on vakio ja a_1 muuttuu.

Jos neliöjuurilausekkeen sisältö on positiivinen, molemmat ratkaisut ovat reaalisia, ja toisesta poikkeavia. Tällöin ratkaisut ovat muodoltaan eksponentiaalisia, ja koska niissä ei esiinny sinimuotoista värähtelyä, sanotaan, että systeemi on **vaimennettu** tai **ylivaimennettu** (Tapaus I).

Kun kerrointa a_1 pienennetään, ratkaisut lähenevät toisiaan ja tulevat yhtäsuuriksi kun $a_1^2 = 4a_0$. Tällöin ratkaisu on eksponentiaalisen ja rampin yhdistelmä, ja sanotaan että systeemi on **kriittisesti vaimennettu** (Tapaus II).

Jos neliöjuurilausekkeen sisältö on negatiivinen, ratkaisu on kompleksinen jolloin siinä esiintyy sinimuotoista värähtelyä ja sanotaan, että systeemi on **alivaimennettu** (Tapaus III). Systeemin aikavakiot ovat muotoa

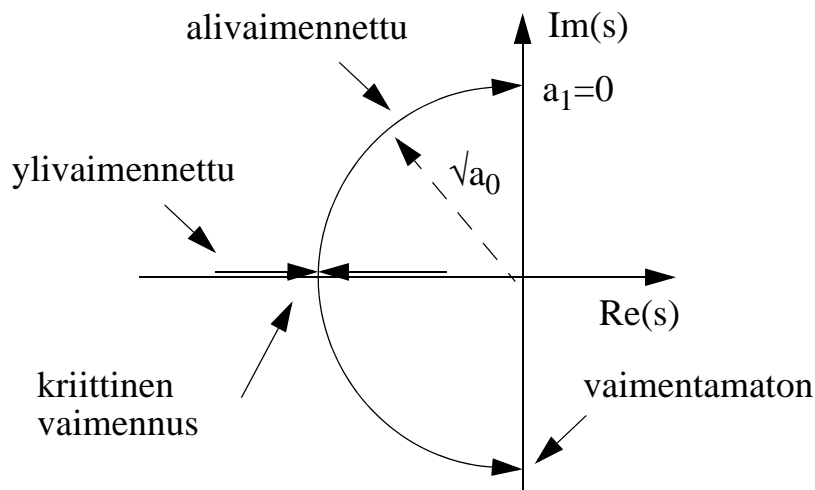
$$s = -\left(\frac{a_1}{2}\right) \pm j \cdot \sqrt{a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} \quad (10.2-3)$$

josta havaitaan, että ratkaisun reaaliosan arvo vaikuttaa myös imaginääriosan arvoon. Jos a_0 pysyy vakiona, ratkaisut kiertävät ympyräkehää kohti imaginääriakselia.

$$(Re(s))^2 + (Im(s))^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = a_0 \quad (10.2-4)$$

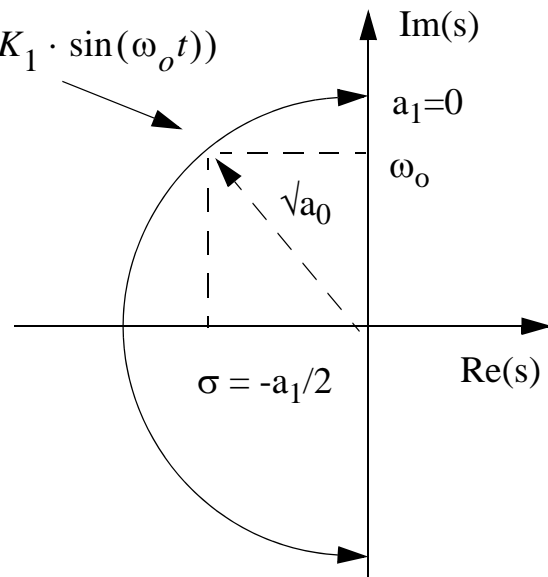
Lopulta kun $a_1 = 0$, ratkaisujen reaaliosa katoaa ja jäljelle jää pelkkä imaginääriosa. Tällöin ratkaisu on vakioamplitudinen sinimuotoinen värähtely, ja sanotaan, että systeemi on **häviötön** tai vaimentamaton.

Em. vaiheet on koottu seuraavaan kuvaan. Kun a_1 on suuri, karakteristisen yhtälön juuret eli systeemin aikavakiot ovat reaalisia ja kaukana toisistaan. Kun a_1 pienenee, juuret lähenevät toisiaan, leikkaavat ja erkanevat sitten kompleksisiksi ratkaisuksiksi. Kun termiä a_1 eli systeemin häviöitä edelleen pienennetään, ratkaisujen reaaliosa lähestyy nollaa, jolloin sinimuotoinen värähtely soi vaimentumatta yhä pitempään. Lopulta $a_1 = 0$, ja systeemi jää värähtelemään vaimenematta.

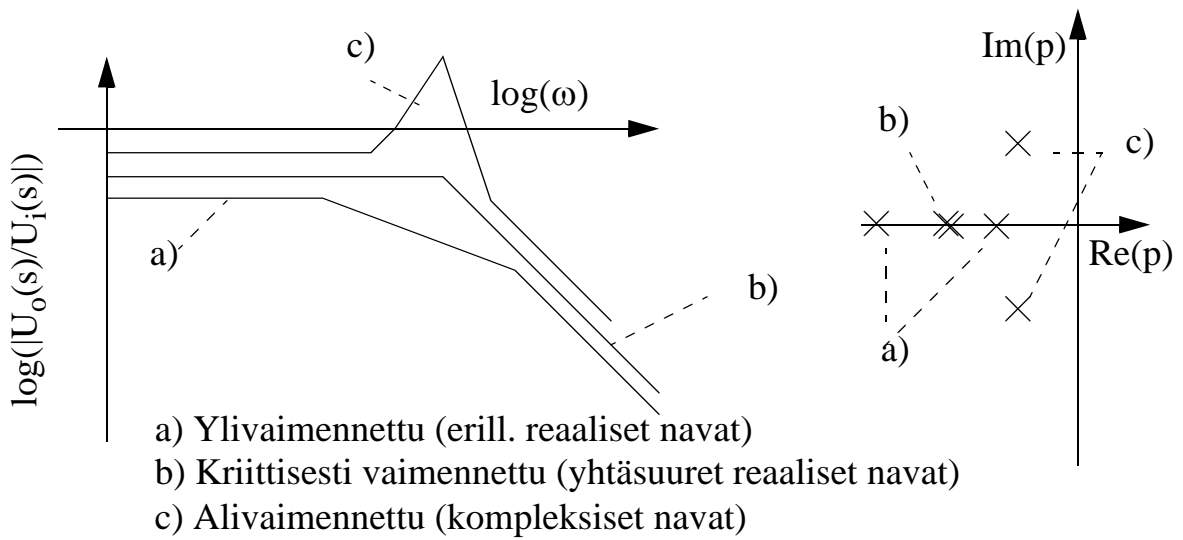
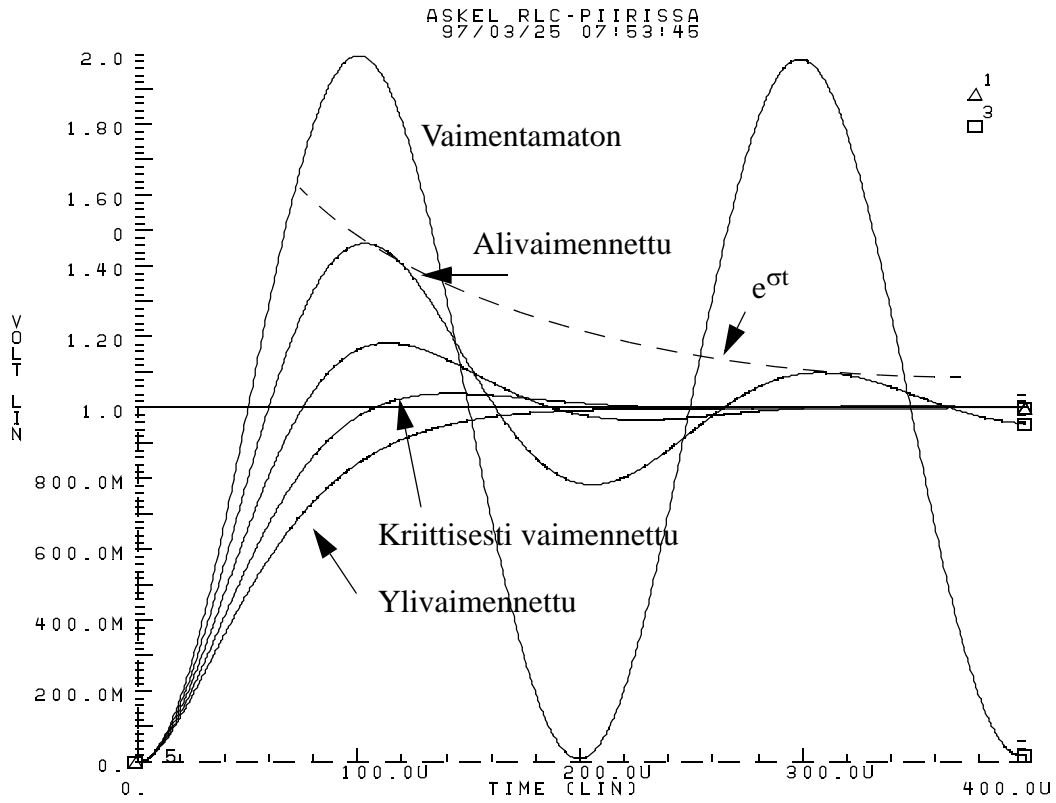


Kompleksisten ratkaisujen sijainti:

$$x(t) = e^{\sigma t} \cdot (K_1 \cdot \cos(\omega_o t) + K_1 \cdot \sin(\omega_o t))$$



Alla on esitetty vaimennuksen vaikutus verkon askel- ja taajuusvasteeseen ja napojen sijaintiin.



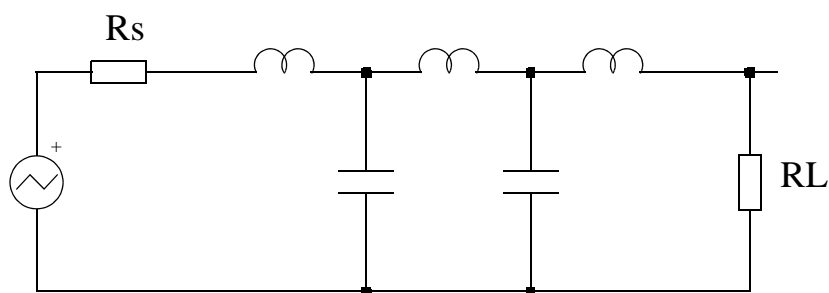
10.3 Asteluku on suurempi kuin kaksi

Jos verkon asteluku on suurempi kuin kaksi, periaatteessa samaa jaottelua voidaan käyttää: jos karakteristisella yhtälöllä on kompleksisia ratkaisuja, näitä ratkaisuja käsitellään yhtenä kokonaisuutena, joka antaa sinimuotoisesti oskilloivia ratkaisuja. Tällaisten oskilloivissa ratkaisuisa kiinnostaa vaimenemisnopeus ja värähtelytaajuus.

Esimerkiksi oheisen kuvan RLC-piiriä käytetään viidennen kertaluvun alipäästösuodattimena. Oikein viritettynä sillä on kaksi eritaajuista vaimenevaa sinimuotoista vastetta ja yksi eksponentiaalisesti vaimeneva vaste, jotka kaikki saadaan näkyviin impulssi- tai askelmaisella herättellä. Verkon vaste kuitenkin riippuu suoraan komponenttiarvoista, ja suodattimen päissä olevien vastusten arvoja muuttamalla vasteen värähtelytaipumus voidaan kokonaan vaimentaa. Samalla kuitenkin suodattimen taajuusvaste (so. kuinka jyrkästi se vaimentaa suuria taajuuksia) kärsii.

Korkeamman asteluvun verkoilla voi olla useita eri aikavakiolla olevia eksponentiaalisia ja eritaajuisia ja eri nopeuksilla vaimenevia sinimuotoisia vasteita.

Simulointiteknisesti sellaiset piirit, joissa värähtelytaajuudet tai aikavakiot poikkeavat hyvin suuresti toisistaan, ovat hankalia, sillä simulointiaskel on mitoitettava nopeimman aikavakion tai värähtelyn mukaan, mutta koko vasteen asettumista saa odotella hitaimman vasteen mukaan. Tällaisissa tapauksissa analyttinen ratkaisu voi olla tehokkaampi kuin raaka numeerinen ratkaisu.

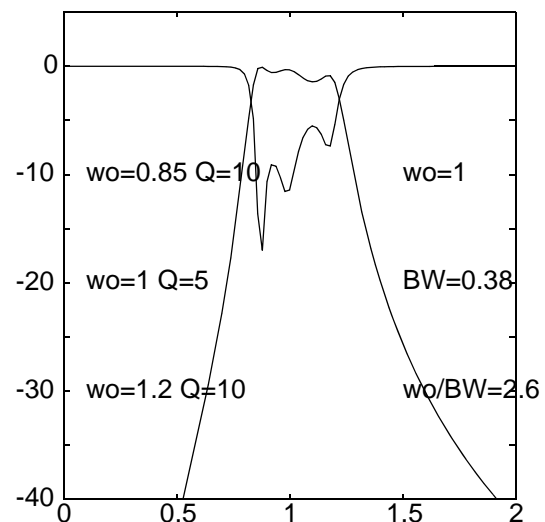
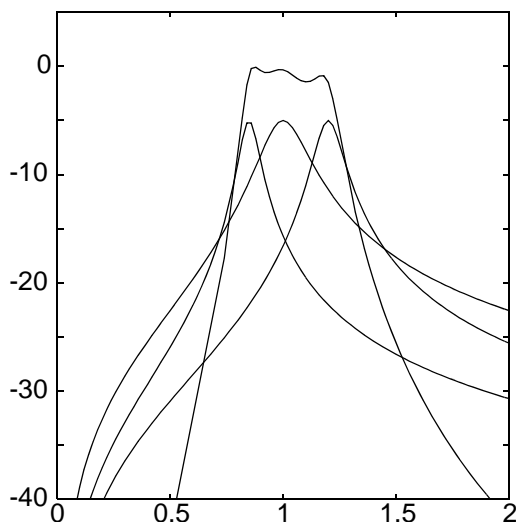


10.4 Suodattimista

Reaalisia napoja ja nolliä käyttäenkin voidaan toteuttaa suodattavia taajuusvasteita, mutta niiden vaste on monesti liian loiva, tai nurkkataajuuden vaimennus liiallinen. Niinpä suodattimet yleensä suunnitellaan käyttäen kompleksisia napoja, joilla on resonoiva vaste. Oheinen kuva esittää, miten kolmesta resonoivasta 2. asteen siirtofunktiosta voidaan rakentaa jyrkkä 6. asteen kaistanpäästösuo-datin. Huomaa, että terävimmät resonanssit tarvitaan nimenomaan “kannattelemaan” päästökaistan nurkkia.

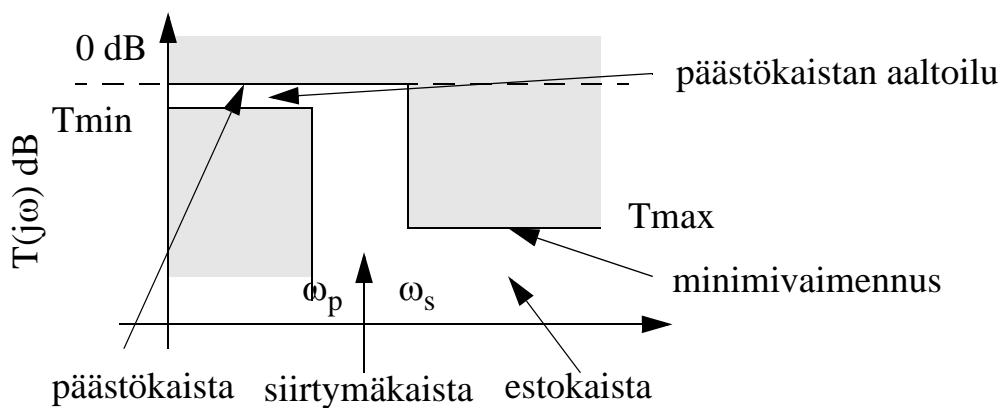
Toteutustavasta riippuen myös analogiasuodattimen tulo- ja lähtöimpedanssi voi olla taajuusriippuva. Etenkin passiivisuodattimille onkin tyypillistä esittää sekä läpäisy että heijastuskerroin: kun suodatin ei läpäise signaalia, se heijastaa sen takaisin, jolloin ajavassa signaalilähteessä on oltava resistiivisiä häviöitä, jotka polttavat ei-toivotun signaalin lämmöksi. Häviötön LC-piiri on huono suodatin: siinä ei ole häviöitä, joten häiriöitten aiheuttama resonova vaste soi ikuisesti.

Approksimaatio $Q = f_0/BW$ toimii, jos vasteessa on vain yksi resonoiva napa. Oheisella kaistanpäästövasteella se ei toimi, sillä vasteen osana olevien resonanssien hyvyysluku on paljon suurempi kuin koko suodattimen f_0/BW



10.5 Suodattimien vasteen kuvaaminen

Suodattimien vaste on taajuusriippuva. Suurin vahvistus on päästökaistalla, jolla on haluttu signaali, ja pienin vahvistus estokaistalla, jolla olevia häiriöitä halutaan vaimentaa. Näiden välissä on äärellisen levyinen siirtymäkaista, jonka jyrkkyyteen voidaan vaikuttaa suodattimen napojen määrällä (suodattimen asteluvulla) ja niiden hyvyysluvulla. Käytännössä haluttu amplitudivaste kuvataan yleensä putkena, jossa amplitudivasteen on kullakin taajuusalueella pysyttävä. Putkelle voi olla määriteltä sekä minimi että maksimi, mutta se voi olla myös vain toiseen suuntaan rajattu - esim. estokaistan vaimennukselle on usein spesifioitu vain vaimennuksen minimivaatimus.

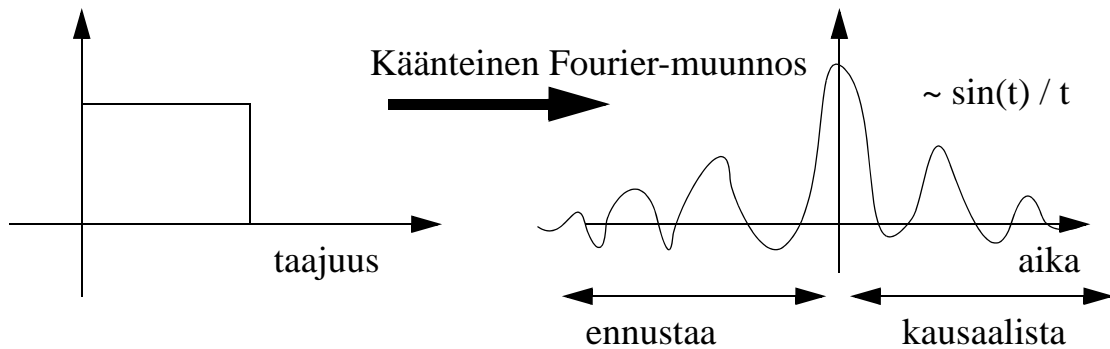


Kuvassa on esitetty tyypillinen päästökaistaltaan tasaisen suodattimen spesifikaatio, jollainen kyetään mitoittamaan synteesiproseduureja käyttäen. Päästökaista ulottuu dc:ltä kulmataajuuteen ω_p asti, ja suurin päästökaistalla sallittu vaimennus on $-T_{min}$. Estokaista alkaa kulmataajuudesta ω_s , ja siellä vaste saa olla enintään $-T_{max}$ dB.

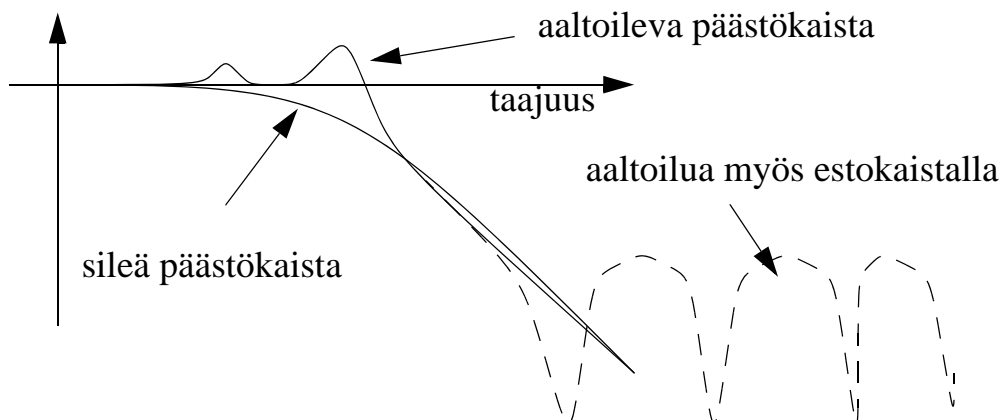
Monesti vaimennusvaatimus esitetään läpäisyn tai vahvistuksen käänteislukuna. S.o jos halutaan, että estokaistan vahvistus on pienempi kuin -40 dB, sanotaan, että vaimennusta on oltava yli 40 dB.

10.6 Suodatinprototyyppien perusteet

Äärettömän jyrkän suodattimen toteuttaminen ei ole fyysikaalisesti mahdollista, sillä sellaisen siirtofunktion impulssivaste ei ole kausaalinen - suodattimen pitäisi siis kyetä ennustamaan kyetäkseen vaimentamaan täysin estokaistalla olevat komponentit.



Äärettömän jyrkkä siirtymäkaista on siis mahdottomuus. Resonanssin ansiosta kompleksisilla navoilla voidaan nurkkataajuuden läheisyydessä saada aikaan jyrkkä vaste, mutta samalla päästökaistan vaste alkaa kuhmuilla. Tämä onkin yleinen luonnolaki: jyrkkä siirtymäkaista aiheuttaa aaltoilua joko päästö- tai estokaistalle tai molemmille. Suodatinteoriassa on kehitetty erilaisia approksimaatioita, joilla tehdään kompromisseja päästö- ja estokaistan aaltoilun ja saavutettavan jyrkkyyden välillä.



Suodattimia voidaan rakentaa mielivaltaisista napa- ja nolla kombinaatioista, mutta suunnitteluproseduurien systematisoimiseksi on vakiintunut muutamia prototyypisuodattimia, joiden suunnittelun lähtökohdat ovat seuraavat:

Butterworthin suodatin

Siirtofunktiossa on pelkkiä napoja, ja päästökaistan vaste kaartuu monotonisesti aaltoilematta. Vaste on loivahko ja päästökaistan reuna loiva. Napojen hyvyysluvut ovat pienehköjä ja vaste on epäherkkä komponenttiarvojen vaihteluille.

Chebychevin suodatin

Siirtofunktiossa on pelkkiä napoja. Siirtymäkaistan jyrkkyyttä on kasvatettu sallimalla hallittua ja vakiokorkuista aaltoilua päästökaistalla. Napojen hyvyysluvut ovat suurempia ja vaste siten herkempi komponenttiarvojen virheille.

Käänteinen Chebychevin suodatin

Päästökaista kaartuu monotonisesti, mutta estokaistalla on vakiokorkuista aaltoilua. Tämä on toteutettu siten, että siirtofunktiossa on imaginääriakselilla olevia kompleksisia nollia, jotka aiheuttavat äärettömän vaimennuksen k.o taajuudelle. Nollien toteuttaminen vaatii uusia komponentteja.

Elliptinen suodatin

Sekä päästökaista että estokaista aaltoilevat. Siirtymäkaista on jyrkin mahdollinen, joten tiettyyn vaimennukseen tarvitaan minimimäärä napoja. Herkkä komponenttiarvojen vaihteluille.

Besselin suodatin

Suunnittelukriteerinä on amplitudivasteen sijaan vaihevaste, joka jatkuu lineaarisesti taajuuden funktiona kasvaen mahdollisimman pitkään. Käytetään mm. viive-suodattimina.

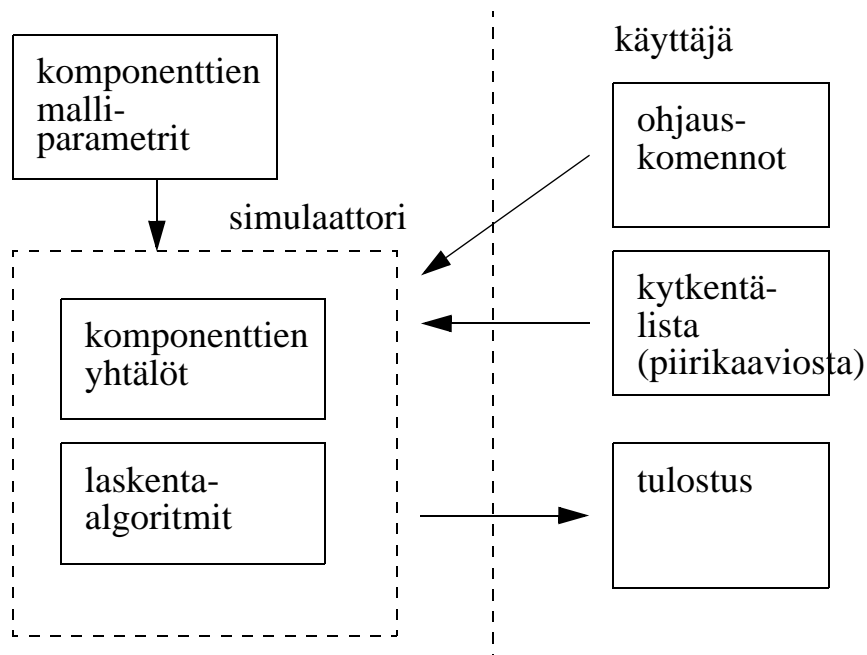
11. PIIRISIMULAATTORIN KÄYTTÖ

11.1 Yleistä

Piirisimulaattorilla tarkoitetaan tietokoneohjelmaa, joka laskee sähköisten piirien vasteita. Koska etenkin puolijohteiden matemaattiset mallit ovat hyvin mutkikkaita, pelkkä käsilaskentaa käyttäen suunnittelu on liian hidasta ja virhealtista. Käsilaskennalla on kuitenkin edelleen merkittävä rooli kytkennän toiminnan ymmärtämisessä ja kytkentöjen mitoitusperusteiden selvittämisessä, joten kumpaa-kin tarvitaan. Simulaattori ei liioin kerro syytä siihen, miksi tulos on kummallinen (kuten useimmiten on), vaan syyn tulkitseminen ja korjaaminen jää aina suunnittelijalle.

Piirisimulaattoreissa on sisäarakennettuna useita erilaisia analyysimenetelmiä, joita esitellään seuraavissa kappaleissa. Lisäksi niissä on komponenttimallit, joissa on komponenttien toimintaa kuvaavat yhtälöt ($U=IR$, $U=j\omega L$ jne.), jotka voivat aktiivikomponenttien tapauksessa olla hyvinkin mutkikkaita. Komponenttimallit ovat myös konfiguroitavia, so. erillisestä tiedostosta voidaan ladata ns. malliparametrejä, jotka kertovat mikä on bipolaaritransistorin maksimivirta, nopeus jne.

Itse kytkentä ja simulaattorin ohjauskomennot annetaan simulaattorille ns. kytkentälistana, jossa yleensä on kuvattu kaikki komponentit ja kerrottu mihin solmupisteisiin ne liittyvät. Kytkentälistaa ei välttämättä tarvitse kirjoittaa itse, vaan useimmat piirikaavioeditorit osaavat kirjoittaa suoraan kytkentälistaa.



11.2 Piirisimulaattorilla mahdolliset analyysit

Piirisimulaattoreilla pystytään yleensä tekemään seuraavanlaisia operaatioita:

DC-toimintapisteen ratkaiseminen (.OP)

Tämä tehdään jokaisen analyysin aluksi, ja sillä selvitetään kunkin solmupisteen dc-jännite simuloinnin alkuhetkellä. Tätä tietoa tarvitaan mm. epälineaaristen komponenttien linearisoimiseen. Lineaarilla piireillä toimintapisteen etsiminen hoituu yhdellä matriisiyhtälön ratkaisulla, mutta epälineaaristen piirien toimintapiste on etsittävä iteroimalla, ja iteraatioita yhtä jännitepistettä kohden tarvitaan yleensä muutamia - pari kymmentä. DC-analyysissä käytetään joko lähteen DC-arvoa tai transientiaaltomuodon arvoa ajanhetkellä $t=0$, ja reaktanssit saavat sen arvon, mikä niillä on taajuudella 0 Hz (kondensaattorit katkoksia, kelat oikosulkuja)

DC-pyyhkäisy (.DC)

Epälineaarilla malleilla laskettava analyysi, jossa yhden lähteen dc-arvoa muutetaan ja katsotaan miten kytkennän solmujännitteet muuttuvat. Käytetään mm. vahvistimien lineaarisen tulo- ja lähtöalueen arvioimiseen. Kunkin pyyhkäistävä piste vastaa toimintapisteen etsimistä, joskin simulaattorit yleensä osaavat käyttää alkuarvona edellistä laskettua pistettä, mikä nopeuttaa toimintapisteen löytymistä.

AC-analyysi (.AC)

AC-analyysi on käytännössä osoitinlaskentaa: tulosignaali oletetaan sinimuotoiseksi, reaktanssien impedanssit voidaan lausua taajuuden funktiona ja taajuusvas-teille saadaan kompleksiarvoiset siirtofunktio (so. sekä amplitudi että vaihe voivat muuttua). AC-analyysi on laskennallisesti erittäin nopea, yhden taajuuspisteen ratkaisu saadaan yhdellä matriisin käänöllä.

Osoitinlaskennan käyttäminen edellyttää sitä, että piiri on lineaarinen. Jos piirillä on epälineaarisia komponentteja, ne on ensin linearisoitava siinä toimintapisteesä, mihin ne on asetettu. Tämän jälkeen niitä kohdellaan lineaarisina komponentteina (tästä käytetään nimitystä piensignaalmalli, koska pienillä tulosignaaleilla komponentin voi kuvitella olevan lineaarinen. Koska itse analyysi on lineaarinen, tulosignaalin amplitudilla ei kuitenkaan ole väliä, vaan sen voi valita siten, että lähtösuuretta on helppo tulkita.

AC-analyysiä käytetään mm. vahvistimien kaistanleveyden analysoimiseen. AC-analyysissä toimintapiste ja linearisointi suoritetaan DC-arvojen perusteella ja

signaaliksi otetaan lähteen AC-arvo. Yleensä vain yhdellä signaalilla kerrallaan saa olla AC-arvo, muut tarvittavat lähteet on peilattava primäärilähteestä ohjatuilla lähteillä.

Transienttianalyysi (.TRAN)

Transienttianalyysi on aikatason analyysi, jolla ratkaistaan piirin aikavaste, kun heräte on mikä hyvänsä ajan funktion kuvattu signaali (matemaattisessa mielessä ratkaistaan differentiaaliyhtälöä, jolle on annettu jokin alkuarvo). Transienttianalyysi siis ratkaisee differentiaaliyhtälöitä numeerisesti, ja se pystyy ratkomaan myös epälineaarisisina differentiaaliyhtälöitä. Ratkaisualgoritmit ovat adaptiivisia, so. aikaaskelta muutetaan sen mukaan kuinka nopeusti signaalit piirillä muuttuvat (hitailta muutoksilla riittää harva askel, nopeilla tarvitaan tiheämpää), mutta jokaisen aikapisteen ratkaisun löytäminen vaatii muutamia iteraatiokierroksia, joten transienttianalyysi on hitain tähän asti esitetyistä analyyseistä. Nopeutta saavutetaan tarkkuuden kustannuksella, joten normaaliasetuksilla transienttianalyysin tuloksissa voi olla kohtuullisen paljon virhettä. Normaalisti transienttianalyysin ohjausparametrit onkin viritetty siten, että sillä virhe on %-luokkaa ja simulointi on parhaimmillaan muutamien mA, muutamien V virta- ja jännitealueella.

Kohina-analyysi (.NOISE)

AC-analyysin yhteydessä voidaan tutkia kuinka eri vastusten ja puolijohdekomponenttien kohina vahvistuu piirin lähtöön. Toiminnallisesti kohina-analyysi vastaa ac-analyysiä, jossa herätteinä ovat vuorotellen kukin kohinalähteistä.

Muita analyysejä

Em. perusanalyysien lisäksi useimmista simulaattoreista löytyy joukko muita algoritmeja, kuten herkkyys- ja Monte Carlo -analyysit piirin saannon arviointiin. Jaksollisten signaalien vasteiden laskemista varten (etenkin rf-sovelluksissa) on varsin suuri joukko erilaisia steady state -analyysejä (mm. harmoninen balanssi, PSS), joissa alkutransienttia ei tarvitse lainkaan laskea, ja niiden johdannaisina epälineaarisia kohina-analyysejä ja periodisia siirtofunktioanalyysejä.

11.3 Erilaisia piirisimulaattoreita

Maailman yleisin piirisimulaattori on SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis), joka kehitettiin alunperin 70-luvulla Berkeleyn yliopistossa Kaliforniassa. Sen lähdekoodit pantiin vapaaseen levitykseen, mikä selittää sen suosion. Siitä on tehty kolmisenkymmentä kaupallista tai in-house johdannaista, joista kiintoisimmat lienevät:

- PSpice. OrCad Co:n PC-ohjelma, johon on yhdistetty piirikaavioeditori, piirilevyn suunnitteluohjelmisto ja logiikkasimulaattori. PSpicestä on saatavilla ilmainen demo-versio, jossa muistin kokoa on rajoitettu n. 20 komponenttiin. Tätä käytetään mm. analogiatekniikan töissä, ja asennettava versio löytyy sieltä
- LTSpice. Linear technology Inc:n oma, hakkurien nopeaan simulointiin viritetty, mutta silti yleiskäyttöinen Spice (josta puuttuu mm. herkkyysanalyysi).
- HSpice. Eräänlaiseksi teollisuusstandardiksi muodostunut varmasti konvergoituva kaupallinen versio.
- Spectre. Spicen tavoin Berkeleyn yliopistosta lähtenyt piirisimulaattori, jossa on useita parannuksia alkuperäisen Spicen koodiin. Käytössä mm. Cadence-yhtiön suunnittelujärjestelmässä.
- Eldo. Mentorin simulaattori, joka sisältää myös tuen VHDL-AMS -kielelle.

RF-suunnitteluun käytetään Agilentin ADS:ää ja Otaniemestä lähtöisin olevaa AWR-Aplac -piirisimulaattoria, joissa on useita rf-suunnittelussa tarvittavia analyysijä, joita perus-Spicessä ei ole. Aplacissa on lisäksi selvästi proseduraalinen komentokieli, joten simulointien suoritusta voidaan ohjata paljon voimakkaammin kuin useimmissa Spice-tyyppisissä simulaattoreissa. Myös Aplacista on saatavilla ilmainen demoversio (ks. <http://www.aplac.com>).

Kurssin simulointiharjoitukset tehdään LTSpice-ohjelmalla.. Ohjelman saa ilmaiseksi osoitteesta <http://www.linear.com/designtools/software/>. Ohjelman käyttöohjeita löytyy kurssin Optima-sivulta, wikisivulla

<https://wiki.oulu.fi/display/STsoftia/Home>

ja parin sivun päästä.

11.4 SPICE:n komponenttimallit

Spicessä on mallitettu kaikki normaalit piirielimet (vastukset, kondensaattorit, kelat, riippumattomat ja ohjatut lähteet) sekä useimmat puolijohteet. Osa malleista on lineaarisia, osaan voidaan lisätä haluttuja epälineaarisuuksia ja osa (mm. puolijohdemallit) ovat luonnostaan epälineaarisia. Komponentit kuvataan Spicessä verkkoistana, jossa ensimmäisenä on komponentin nimi siten, että sen alkukirjain kertoo komponentin tyypin. Komponentin jälkeen on lueteltu solmupisteet (numeroina tai niminä), joihin komponentti liittyy, ja viimeiseksi komponentin arvoon tai muihin ominaisuuksiin liittyviä tietoja.

Rxxx	n+	n-	arvo		(vastus)
Cxxx	n+	n-	arvo		(kondensaattori)
Lxxx	n+	n-	arvo		(kela)
Vxxx	n+	n-	arvo		(riippumaton jännitelähde)
Ixxx	n+	n-	arvo		(riippumaton virtalähde)
Exxx	no+	no-	nc+	nc-	vahvistus (jänniteohjattu jännitelähde)
Gxxx	no+	no-	nc+	nc-	vahvistus(jänniteohjattu virtalähde)
Fxxx	no+	no-	mittari		vahvistus (virtaohjattu virtalähde)
Hxxx	no+	no-	mittari		vahvistus (virtaohjattu jännitelähde)
Xxxx	n1	n2	..	nn	nimi (alirakenteen kutsu)
Dxxx	n+	n-	malli		(diodi)
Qxxx	nC	nB	nE	malli	emitterin ala (BJT-transistori)
Mxxx	nD	nG	nS	nB	malli mitat (MOS-transistori)

SPICE tunnistaa luvut joko eksponenttinotaatiossa tai käyttäen kirjainlyhenteitä, jotka ovat seuraavat (huomaa millin ja megan merkinnät !!)

f,F	1e-15	
p,P	1e-12	
n,N	1e-9	
u,U	1e-6	
m,M	1e-3	
k,K	1e3	
MEG	1e6	(huomaapa tämä !!)
g,G	1e9	
t,T	1e12	

Esimerkki spice-netlistasta

* Askelvasteita	1. rivi on aina otsikko
V1 in 0 pulse(0 1 1u 1n 1n 3u 10u) AC 1	transientti- ja ac-heräte
.subckt cir1 in out	alirakenne, jolla on tulo in ja lähtö out
R1 in out 1	alirakenteen sisäiset komponentit
C1 out 0 1u	
.ends	
.subckt cir2 in out	
C1 in out 1u	
R1 out 0 1	
.ends	
.subckt cir3 in out	
R1 in out 1	
R2 out t1 1	
C1 t1 0 1u	
.ends	
.subckt cir4 in out	
R1 in out 1	
C1 in out 1u	
R2 out 0 1	
.ends	
x1 in out1 cir1	alirakenteiden kutsut ylimmän tason
x2 in out2 cir2	kytkentälistassa
x3 in out3 cir3	
x4 in out4 cir4	
.tran 0.001u 10u	transienttiansalyysi välillä 0- 10 us 1ns askelin
.ac dec 30 1k 10meg	ac-analyysi välillä 1 kHz- 10 MHz
.end	tiedoston loppumerkki

11.5 LTSpicen ominaisuuksia

Kurssilla käytetään ilmaista LTSpice-simulaattoria, jonka tarkemmat käyttöohjeet löytyvät wikisivulta <https://wiki.oulu.fi/display/STsoftia/Home>.

LTSpicessa on sisäänrakennettu piirikaavioeditori, josta muodostetaan automaattisesti tarvittava netlista. LTSpicen käyttö on hyvin suoraviivaista: ohjelman käynnistämällä aukeaa editor, jossa voi piirtää piirikaavion tai ladata vanhan. Kun piirikaavio on valmis, painetaan juoksevan ukon kuvaa (run), jolloin simulointi käynnistyy. Huomaa, että jos et aja simulointia admin-oikeuksilla, valmiit esimerkit on ensin kopioitava työhakemistoosi.

Simuloituja suureita voi probata hiirellä suoraan piirikaaviosta. Solmuun hiirellä tarttuessaan probe näyttää oskilloskoopin mittapäältä. Myös komponentin läpi kulkevan virran voi näyttää siirtämällä kursorin komponentin pinnan päälle, jolloin kursori-ikoni näyttää virtamittarilta. Simulaattorin ohjauskomentojen annossa wizardi auttaa, mutta piirikaaviossa ja editoitaessa ne näkyvät Spicen notaation mukaisesti (esim. .tran 20u), joten kommentojen perusnotaatio on syytä tuntea.

Helpoin tapa ottaa kuvaruutukaappauksia on tallettaa kuva .wmf-tiedostona (Tools>Write wmf file). Nämä nousevat windowsissa suoraan tekstinkäsittelyohjelmiin.

Ehkä mielenkiintoisin lisä LTSpicessa on käyttäytymislähteet bv (jännitelähtöinen) ja bi (virtalähtöinen), joilla voidaan muodostaa lähes mitä funktioita hyvänsä - niillä voi mallittaa uusia komponentteja, tai suorittaa erilaisia mittauksia. Myös .MEAS-komennolla voi laskea erilaisia suureita.

LTSpicen komponenttiarvoissa on mahdollista käyttää muuttujia ja laskutoimituksia. Tällöin muuttuja määritellään .param-lauseella, ja komponenttiarvo kirjoitetaan aaltosulkeiden sisään { }.

Yleisimmistä analyyseistä LTSpicessa on .DC (dc-vaste) , .AC (taajuusvaste), .TRAN (aikavaste) ja .NOISE -analyysi. Herkkyys- tai steady-state -analyysiä siinä ei ole. Parametriesitysten laskenta (ks. Piiriteoria 2) rajoittuu 2-portteihin.

11.6 Vinkkejä

LTSPICEssa on hyvä help, josta löytyy kaikkien simulointikomentojen ja lähteiden aaltomuotojen syntaksi. Lähdettä klikkaamalla saa myös avusteisen GUI:n joka kysyy aaltomuotoparametreja yksitellen, jolloin syntaksia ei tarvitse osata ulkoa.

Useimmissa tapauksissa simulaattori toimii oletusoptioilla kohtuullisesti. Jos toimitaan hyvin pienillä virta- tai jännitetasoilla ($< 1\mu\text{A}$, $< 1\mu\text{V}$), laskentatoleransseja on syytä kiristää. Transienttianalyysi toimii parhaiten kohtuullisen laajakais- taisten piirien kanssa, ja jos piirissä on hyvin jyrkkiä resonansseja, laskenta-askelta voi joutua pakottamaan tiukemmaksi. Laskenta-askel riippuu mm. herätteistä, sini- muotoiselle herätteelle laskentaan 5-10 pistettä jaksolle.

Tyypillisimpiä virhetilanteita:

- komponenttiarvojen kirjoitus on nirsoa: $1\text{ k}\Omega$ vastus voidaan kirjoittaa 1000, $1\text{e}3$, 1K, tai 1 kohm, mutta ei muodossa 1 K, jossa välilyönti on liikaa simulaattorille
- kaksi jännitelähdettä rinnan tai virtalähdettä sarjassa ovat kiellettyjä
- liioin kahta induktanssia ei saa kytkeä rinnakkain
- jokaisesta solmupisteestä pitää olla DC-reitti maahan, kelluvia pisteitä ei saa olla (esim. kondensaattorin navasta pitää olla DC-reitti maahan)
- käyttöjännitteet ovat väärin päin tai puuttuvat
- komponentti- tai herätearvot heittävät useilla dekadeilla. Opettele suuruusluokat (nano, piko, femto, mega ...) !
- **muista että $M = 1\text{e-}3$ ja $\text{MEG} = 1\text{e}6$**
- ploteissa on automaattinen pystyskaalaus. Tarkista että tulosten suuruusluokat ovat oikein.
- useimmiten vika on piirin kuvauksessa

ja vihjeitä:

- virtamittarina voi käyttää jännitelähdettä, jonka jännite on 0V.
- komponenttiarvojen ei tarvitse olla realistisia: voit syöttää DC:n 1 TH kelan kautta tai tehdä AC-kytkennän 1F kondensaattorilla

11.7 Analogiset kovonkuvauskielet

Etenkin systeemis suunnitteluvaiheessa analogisia systeemejä kuvataan pelkistetyillä malleilla. Malleille voi piirtää piirikaaviosijaiskytkennän (esim. LTSpicen bi- ja bv-lähteillä voi kuvata melkein mitä vain), mutta koska suunniteltavat laitteet yleensä sisältävät digitaalitekniikka ja digitaaliosat kuvataan pääsääntöisesti tekstimuotoisilla VHDL- tai Verilog-kielillä, myös analogiaosia on ruvettu kuvaamaan tekstimuotoisilla kuvauksilla. Tähän käytetään em. kielten laajennuksia, VHDL-AMS ja Verilog-A -kieliä.

Kielillä kuvataan pelkistetyn verkon topologia ja haarojen virtajänniteyhtälöt, jotka kääntäjä sitten syöttää normaaliin piirisimulaattoriin. Oleellista käyttäjän kannalta kuitenkin on se, että

suunnittelijan on kyettävä kirjoittamaan haluamaansa ekvivalenttipiiriä kuvaavat verkkoyhtälöt ohjelman syntaksin mukaisesti

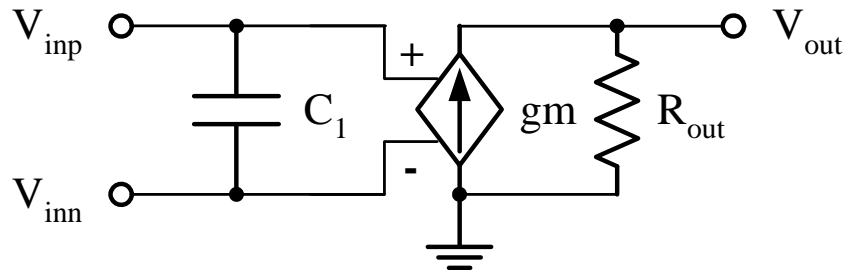
Tässäkin mielessä kurssin alkuosa tulee siis tarpeeseen. Hyvin usein mallinnus alkaa esim. operaatiovahvistimen piensignaalin mallin rakenteesta, johon sitten kirjoitetaan haaravirrat joko lineaarisina tai epälineaarina yhtälöinä tarpeen mukaan.

Kovonkuvauskielillä voidaan kuvata muitakin kuin elektroniikkaa. Kuvattavana systeeminä voi olla myös lämmön johtuminen, äänen eteneminen, tai suora tai pyörivä liike. Näissä jännitettä ja virtaa vastaa toiset fysikaaliset suureet.

Taulukko 8:

	Potentiaali	Virtaama	R	L	C
Sähkötekninen	jännite	virta	resistanssi	indukt.	kapasit.
Lämmönjohtuminen	lämpötila	tehovirta	1/lämmönjoht.		
Akustiikka	paine	massavirta			ontelo
Suora liike	nopeus	voima	kitka		
Pyörivä liike	pyörimisnopeus	vääntömomentti	kitka		hitausmom.

Esimerkki Verilog-A kielen käytöstä kovonkuvaamisessa



```
#define pii 3.141592653589
module Esimerkki (Vout, Gnd, Vinn, Vinp) (gm)
node [V,I] Vout, Gnd, Vinn, Vinp;
parameter real gm = 1e-3 from [1e-15:1];
{
    real Rout = 100;
    real C1 = 1e-12;

    initial {}
    analog {
        I(Vinp,Vinn)    <+ dot(V(Vinp,Vinn)*C1);
        I(Gnd,Vout)    <+ gm*V(Vinp,Vinn);
        I(Vout,Gnd)    <+ V(Vout,Gnd)/Rout;
    }
}
```

Selityksiä:

- Esityksessä kuvataan solmupisteiden välisten haarojen virrat
- <+ on sijoitusoperaattori
- dot() on aikaderivaatta (derivative of time)
- int() on aikaintegraali

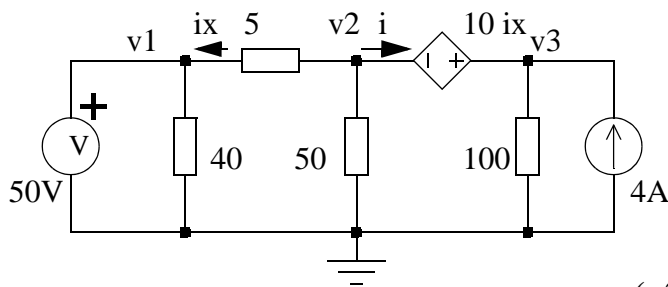
LIITE A. Muita verkkoyhtälöiden ratkaisutapoja

A.1 Supersolmut ja supersilmukat

Edellä esitetty tapa muodostaa verkkoyhtälöitä ei suinkaan ole ainoa mahdollinen, vaan mm. seuraavia tapoja on olemassa.

Supersolmu

Supersolmu (super node) on käsite, jolla voidaan elimoida verkossa kahden solmupisteen välissä oleva jännitelähde. Oheisessa kuvassa solmut 2 ja 3 eivät ole täysin vapaita solmuja, koska niiden välinen jännite-ero tunnetaan ($v_3 = v_2 + 10ix$). Käsitellään solmuparia 2-3 supersolmuna.



solmu 2:

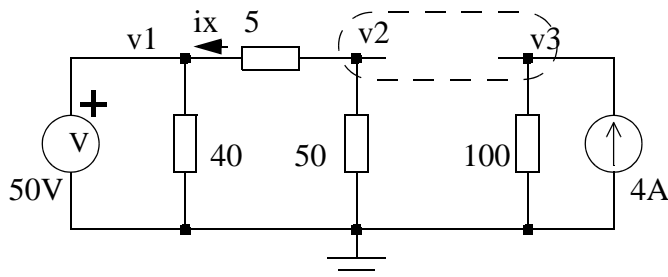
$$(v_2 - v_1)/5 + v_2/50 + i = 0$$

solmu 3:

$$v_3/100 - i - 4 = 0$$

jotka toisiinsa summaamalla

$$(v_2 - v_1)/5 + v_2/50 + v_3/100 - 4 = 0$$



Kuvassa on kirjoitettu virtayhtälöt solmuille 2 ja 3 ja eliminoitu siitä virta i . Tulkitsemalla solmupari 2-3 supersolmuksi voidaan sen virtayhtälö kirjoittaa suoraan:

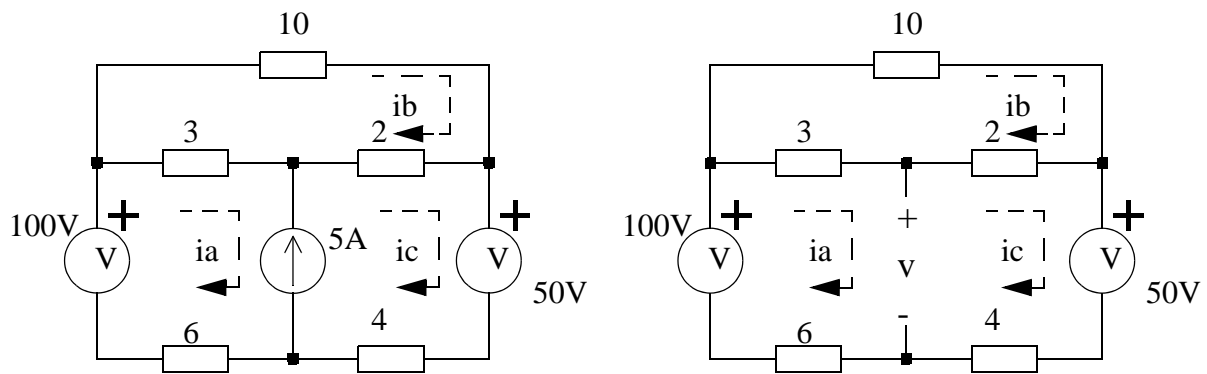
$$(v_2 - v_1)/5 + v_2/50 + v_3/100 - 4A = 0.$$

Sijoittamalla tähän $v_3 = v_2 + 10ix = v_2 + 10(v_2 - v_1)/5$ ja $v_1 = 5V$ saadaan

$$v_2 = 60V, v_3 = 80V$$

Supersilmukka

Supersilmukka (super mesh) on käsite, jolla voidaan elimoida verkossa kahden silmukan rajalla oleva virtalähde. Oheisessa kuvassa silmukkavirrat i_a ja i_c eivät ole täysin vapaita, vaan ne voidaan lausua toistensa ja 5A lähteen avulla: $i_c = i_a + 5A$.



Oheinen piiri voidaan ratkaista merkitsemällä 5A virtalähteen yli olevaa jännitettä v :llä, jolloin silmukat a - c voidaan esittää näin :

$$\begin{aligned} \text{a:} \quad 100 \text{ V} &= 3(i_a - i_b) + v + 6i_a \\ \text{b:} \quad 0 &= 15i_b - 3i_a - 2i_c \\ \text{c:} \quad -50 \text{ V} &= 4i_c - v + 2(i_c - i_b) \end{aligned}$$

Silmukoiden a ja c yhtälöt summaamalla saadaan
 $(100 - 50) \text{ V} = 9i_a - 5i_b + 6i_c$

joka silmukan b yhtälön ja havainnon $i_c = i_a + 5A$ kanssa antaa ratkaisuksi

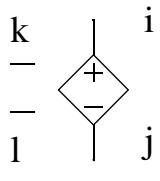
$$i_a = 1.75 \text{ A}, \quad i_b = 1.25 \text{ A}, \quad i_c = 6.75 \text{ A}$$

Samaan tulokseen päästään suoraan tulkitsemalla silmukat a ja c super-silmukaksi, jolle kirjoitetaan yhteinen yhtälö (jännite v valmiiksi eliminoituna):

$$100 \text{ V} - 50 \text{ V} = 3(i_a - i_b) + 2(i_c - i_b) + 4i_c + 6i_a.$$

Ohjatut lähteet

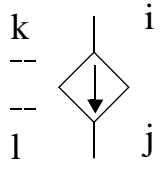
Jänniteohjattu jännitelähde (VCVS)



$$\begin{matrix} i & j & k & 1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} V_i - V_j &= K (V_k - V_1) \\ I_i &= -I_j = J \end{aligned}$$

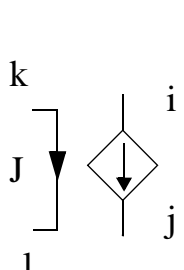
Jänniteohjattu virtalähde (VCCS)



$$\begin{matrix} i & j & k & 1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +G & -G & 0 & 0 \\ -G & +G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$I_i = -I_j = G (V_k - V_1)$$

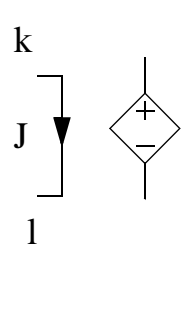
Virtoahjattu virtalähde (CCCS)



$$\begin{matrix} i & j & k & 1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} I_i &= -I_j = K J \\ I_k &= -I_1 = J \\ V_k - V_1 &= 0 \end{aligned}$$

Virtoahjattu jännitelähde (CCVS)

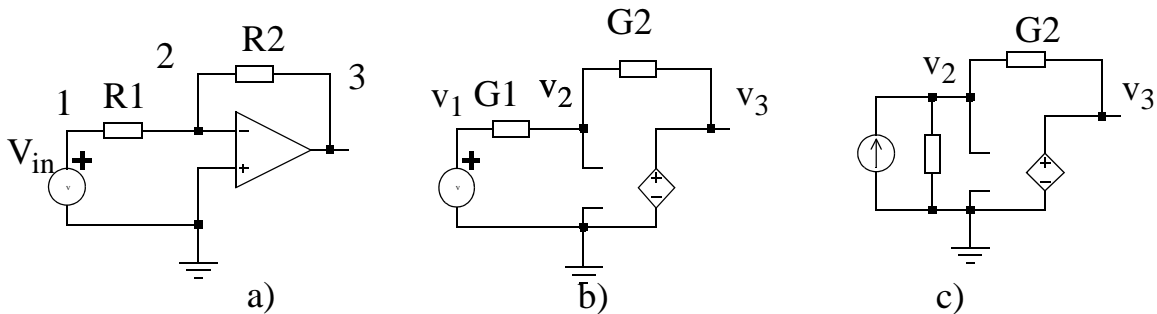


$$\begin{matrix} i & j & k & 1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ J \\ J_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} V_i - V_j &= K J \\ I_k &= -I_1 = J \\ I_i &= -I_j = J_o \\ V_k - V_1 &= 0 \end{aligned}$$

Esim. Kääntävä operaatiovahvistin.

Operaatiovahvistin voidaan mallittaa jänniteohjatulla jännitelähteellä (VCVS), jolloin yhtälöryhmien kirjoittaminen pelkillä solmupisteyhtäöillä ei onnistu. Kuvassa a) oleva vahvistinkytkentä voidaan suoraan piirtää ohjatun VCVS-lähteen avulla kuvaksi b) ja kirjoittaa sille verkkoyhtälöt (kaava), jossa 1. - 3. rivi ovat solmujen v_1, v_2, v_3 virtojen summia (huomaa lähteen V_{in} virta I_{Vin} solmussa 1 ja ohjatun lähteen virta solmussa 3, 4. rivi kuvaa herätteen muotoa ($v_1 = V_{in}$) ja 5. rivi jänniteohjattua jännitelähdettä ($v_3 = -A_u v_2$).

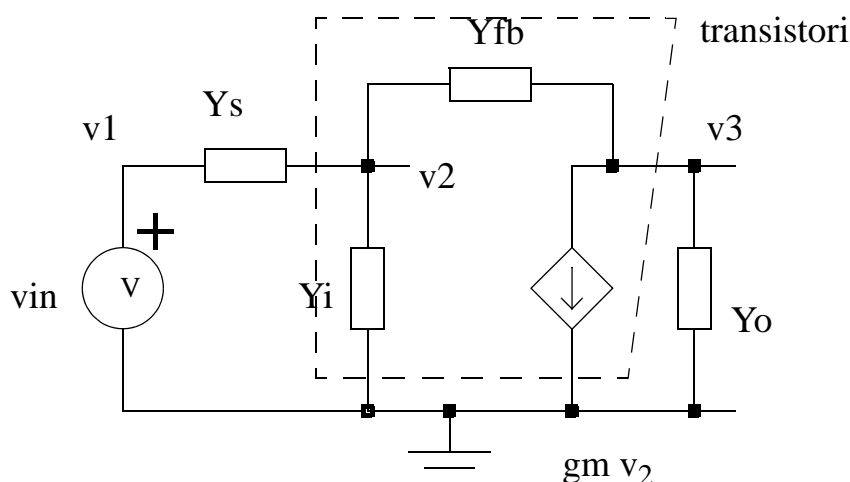


$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_{Vin} \\ I_{Eamp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_{in} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.7-4)$$

Yhtälöryhmää voidaan yksinkertaistaa kuvan c) mukaisesti korvaamalla V_{in} - R_1 vastaavalla Nortonin ekvivalentilla, jolloin solmu 1 katoaa ja myös lähdettä V_{in} kuvaava rivi voidaan poistaa. Näin yhtälöryhmä pelkistyy seuraavaan muotoon, jossa 3. rivi kuvaa edelleen jänniteohjattua jännitelähdettä.

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 & 1 \\ A_u & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ I_{Eamp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \cdot G_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.7-5)$$

Esim. Jännitelähde ilman haaravirtaa



Kuvassa on transistorivahvistin, jossa Y tarkoittaa admittanssia (esim. konduk-tanssin ja kapasitanssin rinnankytkentää, ks. kpl 4). Jännitelähteelle V_{in} ei ole pakko laskea haaravirtaa, jos sitä ei tarvita, ja seuraavassa jännitelähde kuvataan yksinkertaisesti pakottamalla solmuun 1 jännite V_{in} . Verkolle voidaan siten kirjoit-taa yhtälöt

$$\begin{aligned} v_1 - 0 &= v_{in} && \text{(jännitelähteen kuvaus)} \\ Y_s (v_2 - v_1) + Y_i v_2 + Y_{fb} (v_2 - v_3) &= 0 && \text{(solmu 2)} \\ Y_{fb} (v_3 - v_2) + Y_o v_3 &= -g_m v_2 && \text{(solmu 3)} \end{aligned}$$

mikä voidaan kirjoittaa oheiseen matriisimuotoon.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -Y_s & Y_s + Y_i + Y_{fb} & -Y_{fb} \\ 0 & g_m - Y_{fb} & Y_o + Y_{fb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.7-6)$$

Huom. Tässäkin voitaisiin $v_{in} - Y_s$ korvata Nortonin ekvivalentilla (ks. 3.11), mutta ko. operaation automatisointi on hieman mutkikasta. Lisäksi ekvivalenttisen virtalähteen $v_{in} * Y_s$ arvo riippuu taajuudesta, jos Y_s on taajuusriippuva, joten sijais-kytkennän käyttö ei ole kauhean kätevää.

