Engineering mathematics

Introduction to optimization

Homework, fall 2015

1. Let us define a function

$$f : \Omega \to \mathbb{R} : \ f(x) = -\sqrt{x_1 x_2},$$

where $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 > 0, \ x_2 > 0\}$ is the positive quadrant of the plane. Obviously, Ω is an open convex set.

Calculate the numbers

$$\nabla f(x)^\top y, \ y^\top \nabla^2 f(x) y \text{ for } x \in \Omega, \ y \in \mathbb{R}^2.$$

Show that the function $f : \Omega \to \mathbb{R}$ is convex, but not strictly convex on Ω.

2. Using the Newton's method determine the global minimizer of the function

$$f(x) = \frac{1}{4}\cos(2x) - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

and analyze the performance of the method when the initial guess is $x_0 = 1$.

Solve the same problem using the following fixed-point iteration

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= g(x_k), \\ g(x) &= \sin(2x)\Big[\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}(x\sin(2x) + 2\cos(2x)) - 2}{2(x\sin(2x) + 2\cos(2x))}\Big]. \end{aligned}$$

Analyze the performance of this second scheme experimentally (theoretically, if you are up to). Compare the results with the one obtained by the Newton's method.

(**Hint**: The function has a global minimizer at $x = 0$. So your iterations should converge towards this value.)

Homeworks have to be returned not later than 4 pm Tuesday 22.9.2015 to Optima.

Tekniikan matematiikka

Optimoinnin perusteet

Kotitehtäviä, syksy 2015

1. Määritellään funktio
$$f : \Omega \to \mathbb{R} : \; f(x) = -\sqrt{x_1 x_2},$$
missä $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 > 0, \; x_2 > 0\}$ on reaalitason positiivinen neljännes. Ilmeisesti kyseinen joukko on avoin ja konveksi.

   Laske seuraavat suureet:
$$\nabla f(x)^\top y, \; y^\top \nabla^2 f(x) y \text{ for } x \in \Omega, \; y \in \mathbb{R}^2.$$

   Osoita, että funktio on konveksi, mutta ei aidosti konveksi.

2. Määrää Newtonin menetelmällä funktion minimikohta
$$f(x) = \frac{1}{4}\cos(2x) - e^{-\frac{x^2}{2}}$$
ja analysoi menetelmän suppenemista käyttäen alkuarvausta $x_0 = 1$.

   Ratkaise sama ongelma käyttäen seuraavaa kiintopiste-iteraatiota:
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= g(x_k), \\ g(x) &= \sin(2x)\Big[\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}(x\sin(2x) + 2\cos(2x)) - 2}{2(x\sin(2x) + 2\cos(2x))}\Big]. \end{aligned}$$

   Tutki kiintopiste-iteraation suppenemista kokeellisesti (ja teoreettisesti, jos osaat). Kumpi menetelmistä ratkaisee ongelman paremmin.

   Vihje: Funktion minimikohta on pisteessä $x = 0$. Siis iteraatioiden pitäisi konvergoida kohti tätä pistettä.

Palautus Optimaan viimeistään klo 16.00 22.9.2015.