Numeeriset menetelmät, preppaustehtäviä

1. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 9 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 30 & -12 & 0 \\ 1 & -15 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 18 & 8 \end{pmatrix}$$

LU-hajotelma. Ratkaise LU-hajotelman avulla yhtälöryhmä $Ax = b$, missä

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. Ratkaise Jacobin menetelmällä yhtälöryhmän

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ratkaisun approksimaatio $x^{(3)}$ lähtien alkuarvauksesta $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$.

3. Ratkaise Newtonin iteraatiolla yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 4 &= 0 \\ 4x^2 + y^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

ratkaisun approksimaatio lähtien alkuarvauksesta $[x_0, y_0]^T = [1, 1]^T$. Laske kaksi iteraatiota.

4. Ratkaise Gauss-Seidelin menetelmällä lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{pmatrix} -9 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Suorita kolme iteraatiokierrosta käyttäen alkuarvausta $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$.

5. Ratkaise Newtonin menetelmällä yhtälön $x \ln x - 1 = 0$ positiivinen juuri kuuden desimaalin tarkkuudella.

6. Ratkaise orthomin(1)-menetelmällä yhtälö

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

7. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.

Numiirisit minitilmät

Kartaustaatävaan vastauasaa

1.

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 9 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 414 \\ 12 \\ -22 \\ 58 \end{pmatrix}.$$

2.

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.6 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \qquad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.93 \\ -0.96 \\ 0.93 \end{bmatrix}, \qquad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.999 \\ -0.972 \\ 0.999 \end{bmatrix}$$

3.

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.9 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8944 \\ 0.8944 \end{pmatrix}$$

5.

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.4310 \\ 0.0334 \\ -0.4795 \end{pmatrix}$$

5. $x \approx 1.763223$

5. 1. ataraataon äalaaan

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

maaä on taraaa rataaasu.

5.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{200} & 0 \\ 0 & \sqrt{50} \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Numeeriset menetelmät 2015

Kertaustehtäviä, interpolointi

1. a) Määrää Lagrangen interpolaatiopolynomi datalle

$$\begin{array}{c|ccc} x_k & -3 & -1 & 0 \\ f(x_k) & -9 & 5 & 3. \end{array}$$

   b) Laske a)-kohdan ongelmaa vastaava interpolaatiopolynomi Vandermonden matriisin avulla.

2. Ratkaise interpolaatio-ongelma, kun interpolaatiopisteet ja vastaavat funktion arvot ovat annettuna seuraavassa taulukossa:

$$\begin{array}{c|cccc} x_k & 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(x_k) & 1 & 5 & 14 & 30. \end{array}$$

3. Osoita, että funktion $f(x)$ n:nnen asteen interpolaatiopolynomi $P_n(x) = f(x)$, jos $f(x)$ on korkeintaan astetta n oleva polynomi.

4. Hae funktiolle $f(x) = x - 2\sin(\frac{\pi x}{4})$ interpolaatiopolynomi, kun interpolaatiopisteinä ovat $x = -1, 0, 2, 3$. Interpoloi polynomin avulla lukua $f(1.7)$ ja arvioi virhe.

Kertaustehtäviä, numeerinen integrointi

1. Integroi funktio $f(x) = 1 - e^{-x^2}$ välillä $[0, 1]$ käyttäen yhdistettyä puolisuunnikassääntöä, kun $h = 0.5$.

2. a) Laske integraalin $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ likiarvo yhdistetyllä puolisuunnikassäännöllä, kun osavälien lukumäärä on 6.

   b) Laske sama tehtävä yhdistetyllä Simpsonin säännöllä.

3. Laske yhdistetyllä Simpsonin säännöllä integraalin $\int_0^1 e^{-x} dx$ likiarvo neljän desimaalin tarkkuudella.

4. Funktion $f(x)$ arvot tietyissä pisteissä on annettu ao. taulukossa

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	0.9950	0.9801	0.9553	0.9211	0.8776

   Laske integraalin $\int_{0.1}^{0.5} f(x) dx$ likiarvo yhdistetyllä Simpsonin säännöllä.

5. Haluamme numeerisen integrointikaavan muotoa

$$\int_a^b f(x) dx \approx A_0 f(x_0),$$

   missä saamme valita vakiot A_0 ja x_0 vapaasti. Valitkaamme nämä vakiot siten, että k.o. integrointikaava on tarkka polynomeille astetta j, missä j on mahdollisimman suuri. Mikä on tällöin A_0, x_0 ja j? (Tarkka tarkoittaa, että $\approx$ on tällöin $=$.) Vihje: riittää vaatia, että integrointikaava on tarkka funktioilla 1, x, x^2, x^3, $\ldots$)

Kertaustehtäviä, differentiaaliyhtälösysteemit

1. Matriisin A ominaisarvot ovat $-2, 1$ ja 2. Niitä vastaavat ominaisvektorit ovat $(-1, 0, 1)$, $(-1, 4, 0)$ ja $(1, 2, 1)$. Määrää A ja laske e^A.

2. Olkoon matriisi
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Laske matriisi e^{At}.

3. Kahden symbioosissa elävän populaation S_1 ja S_2 yksilöiden lukumäärät $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ toteuttavat differentiaaliyhtälöryhmän
$$\begin{cases} x_1'(t) = -\frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{4}x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t). \end{cases}$$
Laske populaatioiden koot hetkellä t, kun $x_1(0) = 100$ ja $x_2(0) = 400$. Käytä ratkaisukaavaa
$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}(0),$$

4. Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä
$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = x_2(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$
alkuehdoilla $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 2$.

5. Ratkaise alkuarvotehtävä $x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ palauttamalla se 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi.

Kertaustehtäviä, alkuarvotehtävät 1

1. Laske Eulerin menetelmällä alkuarvotehtävän

$$x'(t) = x(t) - 1,\ x(0) = \frac{1}{4}$$

ratkaisun approksimaatio pisteessä $t = \frac{1}{2}$ askelpituuksilla $h = 0.25, 0.1$.

2. a) Heunin menetelmän taulukkoesitys on

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Esitä menetelmä muodossa $x_{j+1} = x_j + \dots$ ja laske menetelmän stabiilisuusfunktio $R(h\lambda)$.

b) Ratkaise Heunin menetelmällä alkuarvotehtävä

$$x'(t) = t^2 - x(t),\ x(0) = \frac{1}{2}$$

välillä $[0, 0.6]$ käyttäen askelpituutta $h = 0.2$. Mikä on approksimaation virhe pisteessä $t = 0.6$?

c) Laske a)-kohdan tehtävä Runge2-menetelmällä.

3. Ratkaise Runge2-menetelmällä 1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemin

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) + 2x_2(t),\ x_1(0) = -1 \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + x_2(t),\ x_2(0) = 4 \end{aligned}$$

numeerinen approksimaatio välillä $[0,\ 2]$ askelpituudella $h = 0.5$.

4. Ratkaise toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävän

$$x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = \sin(t),\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$$

approksimaatio välillä $[0,\ 1]$ klassisella Runge-Kutta-menetelmällä käyttäen askelpituutta $h = 0.5$.

Kertaustehtäviä, alkuarvotehtävät 2

1. Laske keskipistesäännöllä alkuarvotehtävän

$$x'(t) = x(t) - 1,\ x(0) = \frac{1}{4}$$

ratkaisun approksimaatio pisteessä $t = \frac{1}{2}$ askelpituudella $h = 0.1$. Käytä alustuksessa apuna Eulerin menetelmää.

2. Ratkaise Adams-Bashforthin 2. kertaluvun menetelmällä alkuarvotehtävä

$$x'(t) = t^2 - x(t),\ x(0) = \frac{1}{2}$$

välillä $[0, 0.6]$ käyttäen askelpituutta $h = 0.2$. Alusta tehtävä Heunin menetelmällä.

3. Ratkaise keskipistesäännöllä 1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemin

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) + 2x_2(t),\ x_1(0) = -1 \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + x_2(t),\ x_2(0) = 4 \end{aligned}$$

numeerinen approksimaatio välillä $[0,\ 2]$ askelpituudella $h = 0.5$. Käytä alustuksessa apuna Runge2-menetelmää.

4. Kun $k = 2$, BDF-menetelmä on muotoa

$$\alpha_2 x_{j+2} + \alpha_1 x_{j+1} + \alpha_0 x_j = h f_{j+2}.$$

Etsi kertoimet α_2 ja α_1 ja α_0, kun tiedät että menetelmän kertaluku on kaksi.

5. Osoita, että Adams-Bashforthin 2. kertaluvun menetelmä on todellakin kertalukua 2. Tutki onko menetelmä stabiili.

Numeeriset menetelmät 2015

Kertaustehtävien vastauksia, interpolointi

1. a) $p(x) = -3x^2 - 5x + 3$

   b) ks. a)-kohta

2. $p(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$

4. $p(x) = 0.0976x^3 + 0.0404x^2 - 0.4714x$

Numeerinen integrointi

1. $I = 0.2686$

2. a) $I = 0.9454$

   b) $I = 0.9461$

3. $I = 0.6321$

4. $I = 0.3796$

5. $A_0 = b - a,\ x_0 = \frac{1}{2}(b + a), j = 1$

Differentiaaliyhtälösysteemit

1. $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 4 & 6 & 4 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ e^A = \begin{pmatrix} 3.5534 & 0.2088 & 3.4181 \\ 3.7366 & 3.6524 & 3.7366 \\ 2.9015 & 0.7254 & 3.0368 \end{pmatrix}$

2. $e^A = \begin{pmatrix} e^t & e^t - e^{2t} & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

3. $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 150 - 50e^{-t} \\ 300 + 100e^{-t} \end{pmatrix}$

4. $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{(-2+\sqrt{2})t} + e^{(-2-\sqrt{2})t} \\ \sqrt{2}e^{(-2+\sqrt{2})t} - \sqrt{2}e^{(-2-\sqrt{2})t} \\ e^{(-2+\sqrt{2})t} + e^{(-2-\sqrt{2})t} \end{pmatrix}$

5. $x(t) = \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t}$

Alkuarvotehtävät 1

1. $h = 0.25: \ x(0.5) \approx -0.171875, \ h = 0.1: \ x(0.5) \approx -0.2078825$

2. a) $R(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2$

   b) $x(0.6) \approx 0.3429176$

   c) $x(0.6) \approx 0.3379328$

3. $\begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 624.6948 \\ 625.4578 \end{pmatrix}$

4. $x(0.5) \approx 0.0258, \ x(1) \approx 0.2540$

Alkuarvotehtävät 2

1. $x(0.5) \approx -0.23132$

2. $x(0.6) \approx 0.340586$

3. $\begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 376.75 \\ 377.375 \end{pmatrix}$

4. $\alpha_2 = \frac{3}{2}, \ \alpha_1 = -2, \ \alpha_0 = \frac{1}{2}$