

031022P, Numeeriset Menetelmät, 2. välikoe

Jotta saat pisteitä, muista esittää riittävät perustelut!

1. Selosta lyhesti
 - a) miten voit löytää funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kriittisen pisteen Newtonin iteraatiolla?
 - b) mikä on laskutumismenetelmä?
 - c) mitä on paloittain kvadraatiinen interpolaatio?
2. Numeerisen integroinnin ns. *korjattu puolisuunnikassääntö* on

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \beta (b - a)^2 (f'(b) - f'(a)),$$

missä β valitaan niin, että kaava on tarkka polynomeilla astetta 3. Mikä on tällöin β :n arvo?

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.
 - a) Laske matriisiekspONENTTI e^A .
 - b) Ratkaise lineaarinen vakiokertoiminen homogeeninen alkuarvotehtävä $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
4. Olkoon meillä alkuarvotehtävä $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0$, jonka ratkaisemme numeerisesti Runge-Kuttan menetelmällä. Haluamme käyttää Crank-Nicolsonin menetelmää, joka taulukon avulla annettuna on

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

- a) Kirjoita auki Crank-Nicolsonin menetelmän vaiheet k_1 ja k_2 . Onko menetelmää eksplisiittinen vai implisiittinen?
- b) Olkoon alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x'(t) = -100(x(t) - \sin t) + 2 \cos t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Laske tälle auki Crank-Nicolsonin menetelmän askelkaava.