

031022P, Numeeriset Menetelmät

Jotta saat pisteitä, muista esittää riittävät perustelut!

1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ja $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Ratkaise $Ax = b$ pienimmän neliösumman mielessä käyttämällä A :n QR-hajotelmaa.

5. Selosta *lyhyesti* mitä tarkoittaa

- Kriittinen piste.
- Lagrangen interpolaatiopolynomi.
- Menetelmä on A -stabiili.

2. Olkoon meillä matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splittaus $A = M - N$ siten, että $\|M^{-1}N\| < 1$. Tarkastellaan yhtälöryhmän ratkaisemista $Ax = b$.

- Anna splittausta vastaava yksinkertainen iteraatiokaava.
- Johda virhekaava

$$\|x - x_k\| \leq \frac{\|M^{-1}N\|^{k+1}}{1 - \|M^{-1}N\|} \|M^{-1}b\|$$

(Muistin virkistykseksi, jos $\|B\| < 1$, niin $(I - B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B^j$.)

4. Olkoon meillä alkuarvotehtävä $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0$, jonka ratkaisemme numeerisesti. Haluamme käyttää Heunin menetelmää, joka taulukon avulla annettuna on

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

- Kirjoita auki Heunin menetelmä muodossa $x_{j+1} = x_j + \dots$
- Johda Heunin menetelmän stabiilisuusfunktio.
(Esitähän jodantosi riittävän selkeästi!)