Tentin/välikokeen päivämäärä / Date of exam: 9.3.2016	Tentin kesto tunteina / Exam in hours: 3
Tiedekunta / Faculty: LuTK/ Tekniikan matematiikka	
Opintojakson koodi ja nimi / The code and the name of the course: 031022P Numeeriset menetelmät	
Tentaattori(t)/ Examiner(s): Marko Huhtanen	
Sallitut apuvälineet / The devices allowed in the exam:Any calculator with the memory emptied.	
Tentaattori(t) / Examiner(s): Marko Huhtanen	
Tenttiin vastaaminen / Please answer the questions: ⊠suomeksi/ in Finnish ⊠englanniksi/ in English	
Kysymyspaperi on palautettava / Paper with exam questions must be returned: □Kyllä/Yes ⊠Ei/No	

031022P, Numeeriset Menetelmät

Jotta saat pisteitä, muista esittää riittävät perustelut!

For the English version, turn page. Remember to give enough details.

1. Olkoon $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ ja haetaan f:n kriittisiä pisteitä Newtonin menetelmän avulla. Ota yksi askel pisteestä $(0, 1)$ lähtien.

2. a) Anna vakiot A_0 ja A_1 siten, että saat kaavan muotoa

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1)$$

jolla on ominaisuus, että se on tarkka kaikille funktiolle $f(x) = ae^x + b\cos(\frac{\pi x}{2})$, missä a ja b ovat mielivaltaisia vakioita.

b) Yhdistetyn Simpsonin säännön kertaluku on 4. Mitä se tarkoittaa?

3. Olkoon tehtävänä interpoloida "eksponenttifunktioilla" pisteissä $x_0, \ldots, x_n$. Toisin sanoen, meillä on

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j e^{jx}$$

ja tehtävä on valita kertoimet c_j niin, että $P_n(x_j) = y_j$ toteutuu, kun $j = 0, \ldots, n$. Miten ongelma ratkeaa polynomi-interpolaation avulla?

4. Olkoon meillä alkuarvotehtävä $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0$, jonka ratkaisemme numeerisesti. Haluamme käyttää Heunin menetelmää, joka taulukon avulla annettuna on

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

a) Kirjoita auki Heunin menetelmä muodossa $x_{j+1} = x_j + \cdots$

b) Johda Heunin menetelmän stabiilisuusfunktio.
(Esitäthän jodantosi riittävän selkeästi!)

1. Let $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$. Suppose we are looking for the critical points of f with the Newtons method. Take one step starting from $(0, 1)$.

2. a) Give constants A_0 ja A_1 such that you will get a formula

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1)$$

with the property that it is accurate for functions of the form $f(x) = ae^x + b\cos(\frac{\pi x}{2})$ with arbitrary constants a and b.

b) The order of the composite Simpson's rule is 4. What does it mean? (Total error=order.)

3. Suppose the task is to interpolate with exponential functions at the points $x_0, \ldots, x_n$. That is, we have

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j e^{jx}$$

and the task is to choose the coefficients c_j such that $P_n(x_j) = y_j$ holds for $j = 0, \ldots, n$ with y_j given. How can you solve this based on polynomial interpolation?

4. Consider the intial value probelm $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0$, which we want to solve numerically by using Heun's method. Its Butcher table reads

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

a) Write down Heun's method in the form $x_{j+1} = x_j + \cdots$

b) Derive the stability function for Heun's method. (Enough details, please.)