031022P, Numeeriset Menetelmät — Tentti 13.12. 2014

Muista esittää riittävät perustelut!

1) **(6p.)** Vektorit

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ja } a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

virittävät $\mathbb{R}^3$:n aliavaruuden $\mathbf{V}$. Laske $\mathbf{V}$:n ortogonaaliprojektiomatriisi P. Laske vektorin $b = [1\,1\,1]^T$ projektio $\mathbf{V}$:lle.

2) **(6p.)** a. Etsi yhtälöryhmän ratkaisut

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^4 & = 1 \\ x_3 - x_1^3 x_2 & = 0 \\ x_3 + e^{x_1} & = 2x_2 \end{cases}$$

eliminoimalla ensin yksi tuntemattomista ja sen jälkeen käyttämällä Newtonin menetelmää.

b. Mitä tarkoitetaan yksinkertaistetulla Newtonin menetelmällä?

3) **(6p.)** Selosta *lyhyesti* mitä tiedät aiheesta

a. Pienimmän neliösumman ongelma.

b. Orthomin(1) iteraatio.

c. Yhdistetty Simpsonin sääntö.

4) **(6p.)** Kaksiaskelinen Adams-Bashforthin menetelmä on

$$x_{j+2} - x_{j+1} = \frac{h}{2}(3f_{j+1} - f_j).$$

Näytä, että menetelmän kertaluku on 2.

031022P, Numeeriset Menetelmät — Tentti 16.8. 2014

Muista esittää riittävät perustelut!

1) **(6p.)** Olkoon $f(x_1, x_2) = 4(\frac{x_1}{2} - 1)^4 + (\frac{x_1}{2} - x_2)^2$.

a. Mitä tarkoittaa kriittinen piste?

b. Mikä on Hessen matriisi?

c. Etsi f:n kriittiistä pistettä käyttämällä Newtonin iteraatiota lähtemällä liikkeelle pisteestä $(0, 3)$. Ota kaksi askelta.

2) **(6p.)** Haluamme numeerisen integrointikaavan, joka on muotoa

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)] + \beta(b-a)^2[f'(b) - f'(a)].$$

Nyt β voidaan valita siten, että k.o. integrointikaava on tarkka polynomeille astetta 3. Kuinka β pitää tällöin valita? (Tarkka tarkoittaa, että $\approx$ on tällöin $=$.) Vihje: riittää vaatia, että integrointikaava on tarkka funktioilla 1, x, x^2 ja x^3.

3) **(6p.)** Olkoon $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ja $b(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ e^t \end{bmatrix}$. Ratkaise differentiaaliyhtälösysteemi

a. $x'(t) = Ax(t)$ alkuehdolla $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b. $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ alkuehdolla $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4) **(6p.)** Tarkastellaan niin sanottua keskipistesääntöä

$$x_{j+2} - x_j = 2hf_{j+1}$$

Onko menetelmä eksplisiittinen vai implisiittinen? Mikä on sen kertaluku? Onko menetelmä stabiili?

031022P, Numeeriset Menetelmät — Tentti 10.5. 2014

Muista esittää riittävät perustelut!

1) **(6p.)** Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ QR-hajotelma $A = QR$.

2) **(6p.)** Selosta *lyhyesti* mitä tarkoittaa

a. Pienimmän neliösumman ongelma.

b. Gauss-Seidelin iteraatio.

c. Nopeimman laskeutumisen menetelmä.

3) **(6p.)** Haluamme numeerisen integrointikaavan, joka on muotoa

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] + \beta(b-a)^2[f'(b) - f'(a)].$$

Nyt β voidaan valita siten, että k.o. integrointikaava on tarkka polynomeille astetta 3. Kuinka β pitää tällöin valita? (Tarkka tarkoittaa, että $\approx$ on tällöin $=$.) Vihje: riittää vaatia, että integrointikaava on tarkka funktioilla 1, x, x^2 ja x^3.

4) **(6p.)** Näytä, että Adams-Bashforthin menetelmä

$$x_{j+3} - x_{j+2} = \frac{h}{12}(23f_{j+2} - 16f_{j+1} + 5f_j).$$

on kertalukua 3.

Matematiikan jaos

Numeeriset menetelmät (031022P)

1. välikoe, 15.2.2014

1. Määrää matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 3 & -a \\ -a & 4-a & a^2-1 \end{bmatrix}$$

LU-hajotelma kaikille $a \in \mathbb{R}$. Ratkaise LU-hajotelmaa käyttäen yhtälöryhmä $Ax = b$, missä $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2a^2 - a + 3 \end{bmatrix}$.

2. Ratkaise pienimmän neliösumman mielessä yhtälöryhmä $Ax = b$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Suorita neljä iteraatiota Jacobin menetelmällä ratkaistessasi yhtälöryhmän

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & -10 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$B = -D^{-1}(L+U)$
$C = D^{-1}b$

ratkaisun approksimaatiota. Käytä alkuarvauksena pistettä $x^{(0)} = [0\,0\,0]^\top$. Arvioi approksimaation $x^{(4)}$ virhettä $\|\cdot\|_\infty$-normin suhteen.

4. Määrää yhtälöryhmän

2D-Newton

$$x - e^y = 0$$
$$x + y = 2$$

$e^y + y - 2 = 0$
$x - e^{-x+2} = 0$

ratkaisun approksimaatio tuhannesosan tarkkuudella.