MATRIISIALGEBRA

Loppukoe 18.1.2024 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1.
a) Määrää vaakarivimuunnoksin matriisin $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi. (4p)

b) Määrää a)-kohdan käänteismatriisin avulla yhtälöryhmän $\begin{cases} y + 2z = a \\ x + 3z = b \\ 4x - 3y + 8z = c \end{cases}$ ratkaisu, kun $a, b, c \in \mathbb{R}$. (2p)

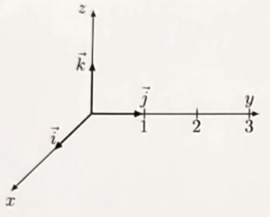
Huom! Muut ratkaisutavat kuin edellä mainittu antavat ratkaisusta 0 pistettä.

2.
a) Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollinen kanta $E = \{(1,0), (0,1)\}$. Vektorin $\vec{u}$ koordinaatit luonnollisessa kannassa ovat 16 ja 25. Määrää vektorin $\vec{u}$ koordinaatit kannassa $\{(1,2), (3,5)\}$. (2p)

b) Kuvankäsittelyssä kuvia muokataan käyttämällä lineaarisia muunnoksia, kuten esimerkiksi peilausta, venytystä ja kiertoa. Tarkastellaan seuraavia muunnoksia:

1) Kuva peilataan xy-tason ($= ij$-tason) suhteen.
2) Kuva venytetään k-akselin suunnassa 10-kertaiseksi.
3) Kuva kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran i-akselin ympäri myötäpäivään (katsottuna i-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin).

Muodosta erikseen jokaisen muunnoksen 1), 2) ja 3) matriisi kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle E. Käytä hyväksi muunnosten 1), 2) ja 3) muunnosmatriiseja (muut ratkaisutavat antavat 0 p tästä osasta) ja määrää matriisi (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle E), muunnokselle, jossa tehdään muunnokset 1), 2) ja 3) tässä järjestyksessä. Muunna saamasi muunnosmatriisin avulla vektori $(6, 12, 23)^{\mathrm{T}}$. (4p)



3. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit. Onko matriisi A diagonalisoituva? Jos on, niin määrää matriisi A^5 matriisin A diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei.

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

järkevästi Gauss - Seidelin menetelmällä. Valitse $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$ ja lopeta iterointi, kun $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\|_\infty < 0,4$. (4p)

b) Osoita, että jokaiselle matriisin A ominaisarvolle λ on voimassa:

$|\lambda| \leq ||A||_t$ aina kun $t \in \{1, \infty, Fr\}$. (2p)

Käännä!

Kaavoja:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$A_{m \times n} = (a_{ik}), B_{n \times p} = (b_{kj}),\ AB = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$D = T^{-1} AT$$

$$\frac{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1} A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|},\ k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^{\,T} \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^{\,T} \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1},\ k = 2, 3, \ldots, n.$$