MATRIISIALGEBRA

Loppukoe 23.3.2023 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 7 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

matriiseja, missä a, b, c, d, e ja f ovat reaalilukuja.
Tarkastellaan laskutoimituksia AB, BA ja $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. Määrää kunkin laskutoimituksen tulos, jos kyseinen laskutoimitus on määritelty. Jos jokin laskutoimituksista ei ole määritelty, niin perustele miksi ei. (3p)

b) Matriisi $D = \mathrm{diag}(1, 2, 3, \ldots, 2000)$. Matriisissa C on kolme nollasta eriävää lukua: 1. rivin 2. sarakkeen alkio on 5, 500. rivin 499. sarakkeen alkio on -8 ja 500. rivin 501. sarakkeen alkio on 3. Muut matriisin C alkiot ovat nollia. Matriisien summa $C + D$ on määritelty. Olkoon vektori $\vec{a} = (2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2000})^{\mathrm{T}}$. Vektori on myös matriisi. Tarkastellaan matriisia $(C + D)\vec{a}$.
b1) Montako riviä ja montako saraketta matriisissa $(C + D)\vec{a}$ on?
b2) Määrää matriisin $(C + D)\vec{a}$ 1. rivin 1. sarakkeen alkio.
b3) Määrää matriisin $(C + D)\vec{a}$ 500. rivin 1. sarakkeen alkio.

Ratk. a)

$$AB = \begin{pmatrix} 5a + 7b + 2c & 8a + 3b + 4c & -a - 2b - 3c \\ 5d + 7e + 2f & 8d + 3e + 4f & -d - 2e - 3f \end{pmatrix}.$$

BA ei ole määritelty. Matriisin B rivillä eri määrä alkioita kuin matriisin A sarakkeella.

$$\begin{aligned} B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} &= (AB)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5a + 7b + 2c & 8a + 3b + 4c & -a - 2b - 3c \\ 5d + 7e + 2f & 8d + 3e + 4f & -d - 2e - 3f \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{pmatrix} 5a + 7b + 2c & 5d + 7e + 2f \\ 8a + 3b + 4c & 8d + 3e + 4f \\ -a - 2b - 3c & -d - 2e - 3f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b1) Matriisissa $(C + D)\vec{a}$ on yhtä monta riviä kuin matriisissa D ja yhtä monta saraketta kuin pystyvektorissa $\vec{a}$. Siis 2000 riviä ja 1 sarake.

b2) Matriisin $(C+D)$ 1. rivi on $(1, 5, 0, 0, \ldots, 0)$ ja vektorin $\vec{a}$ 1. (ainoa) sarake on $(2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2000})^{\mathrm{T}}$. Matriisin $(C+D)\vec{a}$ 1. rivin 1. sarakkeen alkio on $1 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + \cdots 0 \cdot 2^{2000} = 2 + 5 \cdot 4 = 22$.

b3) Matriisin $(C + D)\vec{a}$ 500 rivi on $(0, 0, \ldots, 0, -8, 500, 3, 0, \ldots, 0)$, missä -8 on rivin 499. alkio. Vektorin $\vec{a}$ 1. (ainoa) sarake on $(2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{449}, 2^{500}, 2^{501}, \ldots, 2^{2000})^{\mathrm{T}}$, missä 2^{449} on 449. rivin alkio.
Matriisin $(C + D)\vec{a}$ 500. rivin 1. sarakkeen alkio on

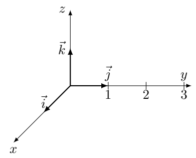
$$\begin{aligned} &0 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 + \cdots + 0 \cdot 2^{448} - 8 \cdot 2^{449} + 500 \cdot 2^{500} + 3 \cdot 2^{501} + 0 \cdot 2^{502} + \cdots + 0 \cdot 2^{2000} \\ &\quad = -4 \cdot 2 \cdot 2^{449} + 500 \cdot 2^{500} + 3 \cdot 2 \cdot 2^{500} = (-4 + 500 + 6)2^{500} = 502 \cdot 2^{500} \quad . \end{aligned}$$

2. a) Kuvankäsittelyssä kuvia muokataan käyttämällä lineaarisia muunnoksia, kuten esimerkiksi venytystä ja kiertoa. Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle E) matriisi, kun kuvaa aluksi venytetään k-akselin suunnassa 25 kertaiseksi ja lopuksi kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran j-akselin ympäri myötäpäivään (katsottuna j-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin).

b) Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta. Merkitse vastaukseesi tarkasti, mikä on ydin ja mikä on ytimen kanta.



Ratk. a) Venytys:

$$V\vec{i} = V\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V\vec{j} = V\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V\vec{k} = V\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 25\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Venytyksen matriisi $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$

Kierto:

$$K\vec{i} = K\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K\vec{j} = K\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K\vec{k} = K\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{i} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kierron matriisi $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(1p)**

Muunnoksen matriisi:

$$K \cdot V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **(2p)**

b) Määrätään matriisin A aste vaakarivimuunnoksin (aste säilyy vaakarivimuunnoksissa)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Matriisin aste on vapaiden rivien (= vapaiden sarakkeiden lukumäärä). Matriisissa B on kaksi vapaata riviä. Matriisin A aste = matriisin B aste. Siis A:n aste $\dim(R(A)) = 2$.
Matriisin A nulliteetti on $\dim(N(A)) = 3 - \dim(R(A)) = 1$.
Määrätään ydin $N(A) = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$ ($\vec{0}$ on nollavektori).
Ratkaistaan yhtälöryhmä $A\vec{x} = \vec{0}$. Siis

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Laajennettu kerroinmatriisi:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \overset{\text{kuten edellä}}{\cdots} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Alemmasta yhtälöstä saadaan: $x_2 = \frac{4}{3}x_3$. Sijoittamalla ylempään saadaan $x_1 = -\frac{4}{3}x_3 + x_3 = -\frac{1}{3}x_3$.
Valitaan $x_3 = s \in \mathbb{R}$. Tällöin $x_2 = \frac{4}{3}s$ ja $x_1 = -\frac{1}{3}s$. Ratkaisut ovat

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}s \\ \frac{4}{3}s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matriisin A ytimen muodostavat kaikki vektorit $\vec{x} = s(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1)^T, s \in \mathbf{R}$. Siis
$N(A) = \{\vec{x} \mid \vec{x} = s(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1)^T, s \in \mathbf{R}\} = L(\{(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1)^T\})$.
Ytimen eräs kanta on $\{(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1)^T\}$.

3. Olkoon matriisi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Onko A diagonalisoituva? Jos A on diagonalisoituva, niin määrää matriisi A^{555} matriisin A diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei ole.

Ratk. $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 1 \cdot (-2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

Ominaisarvoille λ on $\det(A - \lambda I) = 0$, eli $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Ominaisarvot: $\lambda_1 = 2$ ja $\lambda_2 = 3$.

Kaksi eri suurta ominaisarvoa ja A on 2×2 matriisi, joten A on diagonalisoituva.

Ominaisvektorit:

$\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu: $x_2 = x_1$. Silloin ominaisvektoreille: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ominaisarvoon $\lambda_1 = 2$ liittyvät ominaisvektorit: $s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \neq 0$.

$\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 1 \\ -2 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu: $x_2 = 2x_1$. Silloin ominaisvektoreille: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ominaisarvoon $\lambda_2 = 3$ liittyvät ominaisvektorit: $s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \neq 0$.

Diagonalisoidaan matriisi A:

Matriisi $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(T|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Siis $T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Silloin $A = TDT^{-1}$, missä $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A^{555} = TD^{555}T^{-1} = T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{555} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{555} & 0 \\ 0 & 3^{555} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{556} - 3^{555} & -2^{555} + 3^{555} \\ 2^{556} - 2 \cdot 3^{555} & -2^{555} + 2 \cdot 3^{555} \end{pmatrix}.$$

4. a) Määrää ylideterminoidun systeemin

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 1 \end{cases}$$

pienimmän neliösumman ratkaisu. Määrää jäännösvektori $\vec{r}$ ja sen normi $\|\vec{r}\|_1$.

b) Matriisi A on $n \times n$ matriisi, jolla on k reaalista erisuurta ominaisarvoa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, ja $\lambda_i > 1$, aina kun $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. Ominaisarvo λ_i on matriisin A karakteristisen yhtälön n_i kertainen juuri aina kun $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, ja lisäksi $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Määrää näiden tietojen avulla luvun $\det(A - I)$ itseisarvo.

Ratk. a) Yhtälöryhmä matriisimuodossa:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eli $A\vec{x} = \vec{b}$,

missä

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pienimmän neliösumman ratkaisu määrätään yhtälöstä

$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$$

eli $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Siis $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ratkaisemalla yhtälöryhmä saadaan

PNS-ratkaisu: $x_1 = \frac{79}{66}, x_2 = -\frac{4}{11}$.

Jäännösvektori $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} \frac{79}{66} \\ -\frac{4}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{66} \\ \frac{5}{66} \\ -\frac{20}{66} \end{pmatrix}$.

$||\vec{r}||_1 = \max\{\frac{35}{66} + \frac{5}{66} + \frac{20}{66}\} = \frac{10}{11}$.

b) Koska jokainen λ_i, $i = 1, \ldots, k$ on A:n karakteristisen yhtälön $p(\lambda) = 0$ n_i kertainen juuri, niin $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ on polynomin $p(\lambda)$ tekijä aina kun $i = 1, 2, 3 \ldots, k$. Siis A:n karakteristinen polynomi $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$.

Silloin

$|\det(A-I)| = |p(1)| = |(-1)^n(1-\lambda_1)^{n_1}(1-\lambda_2)^{n_2} \cdots (1-\lambda_k)^{n_k}| = (\lambda_1-1)^{n_1}(\lambda_2-1)^{n_2} \cdots (\lambda_k-1)^{n_k}$.