MATRIISIALGEBRA

Loppukoe 23.3.2023 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 7 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

matriiseja, missä a, b, c, d, e ja f ovat reaalilukuja.
Tarkastellaan laskutoimituksia AB, BA ja $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. Määrää kunkin laskutoimituksen tulos, jos kyseinen laskutoimitus on määritelty. Jos jokin laskutoimituksista ei ole määritelty, niin perustele miksi ei. (3p)

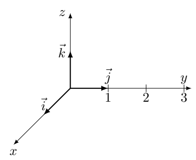
b) Matriisi $D = \operatorname{diag}(1, 2, 3, \ldots, 2000)$. Matriisissa C on kolme nollasta eriävää lukua: 1. rivin 2. sarakkeen alkio on 5, 500. rivin 499. sarakkeen alkio on -8 ja 500. rivin 501. sarakkeen alkio on 3. Muut matriisin C alkiot ovat nollia. Matriisien summa $C + D$ on määritelty. Olkoon vektori $\vec{a} = (2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2000})^{\mathrm{T}}$. Vektori on myös matriisi. Tarkastellaan matriisia $(C + D)\vec{a}$.
b1) Montako riviä ja montako saraketta matriisissa $(C + D)\vec{a}$ on?
b2) Määrää matriisin $(C + D)\vec{a}$ 1. rivin 1. sarakkeen alkio.
b3) Määrää matriisin $(C + D)\vec{a}$ 500. rivin 1. sarakkeen alkio.

2. a) Kuvankäsittelyssä kuvia muokataan käyttämällä lineaarisia muunnoksia, kuten esimerkiksi venytystä ja kiertoa. Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle E) matriisi, kun kuvaa aluksi venytetään k-akselin suunnassa 25 kertaiseksi ja lopuksi kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran j-akselin ympäri myötäpäivään (katsottuna j-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin).

b) Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta. Merkitse vastaukseesi tarkasti, mikä on ydin ja mikä on ytimen kanta.



3. Olkoon matriisi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Onko A diagonalisoituva? Jos A on diagonalisoituva, niin määrää matriisi A^{555} matriisin A diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei ole.

4. a) Määrää ylideterminoidun systeemin

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

pienimmän neliösumman ratkaisu. Määrää jäännösvektori $\vec{r}$ ja sen normi $\|\vec{r}\|_1$.

b) Matriisi A on $n \times n$ matriisi, jolla on k reaalista erisuurta ominaisarvoa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, ja $\lambda_i > 1$, aina kun $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. Ominaisarvo λ_i on matriisin A karakteristisen yhtälön n_i kertainen juuri aina kun $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, ja lisäksi $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Määrää näiden tietojen avulla luvun $\det(A - I)$ itseisarvo.

Käännä!

Kaavoja:

$ax^2+bx+c=0, \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$A_{m\times n}=(a_{ik}), B_{n\times p}=(b_{kj}),\ AB=(c_{ij}), \quad c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

$D=T^{-1}AT$

$\frac{\vec{y}_k^T\cdot\vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k^T\cdot\vec{y}_k}=\lambda_1^{(k)}$

$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{m}\ |a_{ij}|$

$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le m}\sum\limits_{j=1}^{n}\ |a_{ij}|$

$\|A\|_2=\sqrt{\lambda},$

$\|A\|_{F_r}=\sqrt{\sum\limits_i\sum\limits_j\ |a_{ij}|^2}$

$\kappa(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$

$f(A)=d_0I+d_1A+d_2A^2+\cdots+d_{n-1}A^{n-1}$

$$\vec{q}_1=\frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k=\frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|},\ k=2,3,\ldots,n,$$

$$\vec{v}_k=\vec{a}_k-(\vec{q}_1^{\mathrm{T}}\vec{a}_k)\vec{q}_1-\cdots-(\vec{q}_{k-1}^{\mathrm{T}}\vec{a}_k)\vec{q}_{k-1},\ k=2,3,\ldots,n.$$