031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 14.12.2023. VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit. Onko matriisi A diagonalisoituva? Jos on, niin määrää matriisi A^5 matriisin A diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei.

2. Määrää matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 25 \end{pmatrix}$ se LU-hajotelma, missä matriisin L diagonaalialkiot ovat ykkösiä. (3p)

Ratkaise tämän LU-hajotelman avulla alla oleva yhtälöryhmä. Merkitse kaikki välivaiheet tarkasti näkyviin. (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 & = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 & = 8 \\ 4x_2 + 15x_3 + 7x_4 & = 12 \\ 9x_3 + 25x_4 & = 4 \end{cases}$$

Huom. Muut ratkaisutavat kuin edellä mainittu antavat yhtälöryhmän ratkaisusta 0 pistettä!

3. a) Vektorit $s(1,2)^{\mathrm{T}}$, $s \neq 0$ ovat matriisin A ominaisarvoon 2 liittyvät ominaisvektorit, vektorit $s(1,1)^{\mathrm{T}}$, $s \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon 1 liittyvät ominaisvektorit. Määrää matriisi $A + A^{412}$ matriisin A diagonalisoinnin avulla. (3p)

   b) Määrää ylideterminoidun systeemin

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 1 \end{cases}$$

pienimmän neliösumman ratkaisu. Määrää jäännösvektori $\vec{r}$ ja sen normi $\|\vec{r}\|_\infty$. (3p)

4. a) Laske Cayley-Hamiltonin lauseen avulla A^4, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ (3p)

Huom. Muut ratkaisutavat kuin edellä mainittu antavat ratkaisusta 0 pistettä!

   b) 3×3 matriisista A tiedetään vain karakteristinen polynomi $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda + 3$. Säännöllinen 3×3 matriisi B tunnetaan. Lisäksi tiedetään, että

$$5I + 3B = 5B^{-1}A^3 - 25B^{-1}A^2 - 20B^{-1} + 10B^{-1}A.$$

Määrää matriisi B^{-1}. (3p)

Kaavoja:

$ax^2 + bx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1} A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \; k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^{\mathrm{T}} \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^{\mathrm{T}} \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \; k = 2, 3, \ldots, n.$$