MATRIISIALGEBRA

1. Välikoe 16.11.2023 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

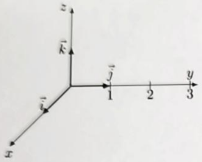
1. a) Matriisi $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Onko matriisi $(A+B)C$ määritelty? Jos on, niin laske kyseinen matriisi. Jos ei ole, niin perustele miksi ei. (3p)

   b) Matriisi B on 150×70 matriisi. Vaakavektori (joka on myös matriisi) $\vec{a} = (1, 2, 3, 4, \ldots, 10000)$. Matriisitulo $\vec{a}(BC)^{\mathrm{T}}$ on määritelty.
   b1) Montako riviä ja montako saraketta on matriisissa C ?
   b2) Montako riviä ja montako saraketta on matriisissa $\vec{a}(BC)^{\mathrm{T}}$?

2. a) Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollinen kanta $E = \{(1,0),(0,1)\}$. Vektorin $\vec{u}$ koordinaatit luonnollisessa kannassa ovat 16 ja 25. Määrää vektorin $\vec{u}$ koordinaatit kannassa $\{(1,2),(3,5)\}$ (2p)

   b) Kuvankäsittelyssä kuvia muokataan käyttämällä lineaarisia muunnoksia, kuten esimerkiksi peilausta, venytystä ja kiertoa. Tarkastellaan seuraavia muunnoksia:
   1) Kuva peilataan xy-tason ($= ij$-tason) suhteen.
   2) Kuva venytetään k-akselin suunnassa 10-kertaiseksi.
   3) Kuva kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran i-akselin ympäri myötäpäivään (katsottuna i-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin).

   Muodosta erikseen jokaisen muunnoksen 1), 2) ja 3) matriisi kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle E. Käytä hyväksi muunnosten 1), 2) ja 3) muunnosmatriiseja (muut ratkaisutavat antavat 0 p tästä osasta) ja määrää matriisi (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle E), muunnokselle, jossa tehdään muunnokset 1), 2) ja 3) tässä järjestyksessä. Muunna saamasi muunnosmatriisin avulla vektori $(6, 12, 23)^{\mathrm{T}}$. (4p)



3. Tarkastellaan matriisia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Määrää matriisin A aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta. Merkitse vastaukseesi tarkasti, mikä on ydin ja mikä on ytimen kanta. (4p)

   b) Onko vektori $(1, -1, 5, -2)^{\mathrm{T}}$ matriisin A b1) ytimen b2) kuva-avaruuden vektori? Perustele kumpikin vastauksesi. (2p)

4. a) Olkoon $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ vektoriavaruuden $\mathbb{V}$ kanta ja $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ vektoriavaruuden $\mathbb{U}$ kanta. Tarkastellaan lineaarista kuvausta $F : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$, jolle $F(\vec{v}_1) = 2\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2$, $F(\vec{v}_2) = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ ja $F(\vec{v}_3) = 2023\vec{u}_2$. Määrää lineaarikuvauksen F matriisi kantojen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ja $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ suhteen ja määrää tämän matriisin avulla (muut ratkaisutavat antavat tästä osasta 0 pistettä) $F(\frac{1}{2}\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$. (3p)

   b) Olkoot B ja C säännöllisiä matriiseja ja olkoon A neliömatriisi, jolle on voimassa matriisiyhtälö

$$BAC + BC = CB.$$

   Ratkaise matriisi A, kun matriisit B, C, B^{-1} ja C^{-1} tunnetaan.(3p)

KAAVOJA:

$ax^2 + bx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$A_{m \times n} = (a_{ik}), B_{n \times p} = (b_{kj})$

$AB = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$