031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 15.12.2022 Ratkaisut

1. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit.

Ratk. Ominaisarvot:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Ominaisarvoille on $det(A - \lambda I) = 0$, eli $(1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$.

Ominaisarvot $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$. **(2p)**

Ominaisvektorit:

$\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu: $x_2 = x_3$. Silloin ominaisvektori $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ominaisarvoon 1 liittyvät ominaisvektorit ovat $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, kun $(s,t) \neq (0,0)$ **(3p)**

$\lambda_3 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 & 1 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ 0 & -1 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu: $x_3 = x_1, x_2 = 0$. Silloin ominaisvektori

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvoon 2 liittyvät ominaisvektorit ovat $t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, kun $t \neq 0$. **(1p)**

2. a) Vektorit $s(-1,0)^{\mathrm{T}}$, $s \neq 0$ ovat matriisin A ominaisarvoon 1 liittyvät ominaisvektorit, vektorit $s(1,2)^{\mathrm{T}}$, $s \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon 2 liittyvät ominaisvektorit. Onko matriisi A diagonalisoituva? Jos on, niin määrää matriisi A^{2023} matriisin A diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei.

   b) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 20 \end{cases}$$

   LU- hajotelman avulla (muut ratkaisumenetelmät antavat 0 pistettä), kun tiedetään, että yhtälöryhmän kerroinmatriisilla on LU- hajotelma joka koostuu matriiseista

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ratk. a) Matriisi A on 2×2 matriisi, jolla on kaksi eri suurta ominaisarvoa, joten A on diagonalisoituva. **(1p)**

Silloin $A = TDT^{-1}$, missä matriisi $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ja $D = diag(1,2)$.

Nyt $T^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Silloin

$A^{2023} = TD^{2023}T^{-1} = Tdiag(1^{2023}, 2^{2023})T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2023} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{2022} - \frac{1}{2} \\ 0 & 2^{2023} \end{pmatrix}$.

(2p)

b)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 & = 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = 20 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Siis $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}$

Merkitään $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Silloin $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}$. Vastaava yhtälöryhmä: $\begin{cases} y_1 & & & = 4 \\ -y_1 & +y_2 & & = 7 \\ 2y_1 & + & y_3 & = 20 \end{cases}$

Eteenpäin sijoittamalla: $y_1 = 4$, $y_2 = 7 + y_1 = 7 + 4 = 11$, ja $y_3 = 20 - 2y_1 = 20 - 8 = 12$. **(1p)**

Koska $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ niin $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Vastaava yhtälöryhmä: $\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 4 \\ & 4x_2 & +x_3 & = 11 \\ & & 4x_3 & = 12 \end{cases}$. Taaksepäin sijoittamalla saadaan $x_3 = 3, x_2 = 2$ ja $x_1 = 1$.

Vastaus: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. **(2p)**

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 3 \\ 5x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$$

järkevästi Jacobin menetelmällä. Valitse $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$ ja laske toinen iteraatio $\vec{x}^{(2)}$.
Määrää Jacobin iteraatiomatriisi G ja vakiovektori $\vec{r}$ esityksessä $\vec{x}^{(k+1)} = G\vec{x}^{(k)} + \vec{r}$. Määrää iteraatiomatriisin G normi $||G||_1$.

Ratk. Vaihdetaan yhtälöiden järjestystä:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

Matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kerroinmatriisi $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ on lävistäjävaltainen, joten iteraatiot suppenevat kohti yhtälöryhmän ratkaisua.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_2 + \frac{7}{5} \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}. \end{cases}$$

(1p)

Iteraatiokaavat:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}x_2^{(k)} + \frac{7}{5} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k)} + \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Valitaan $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0, 0)$.

1. iteraatio:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{7}{5} = \frac{7}{5} \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

2. iteraatio:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{5}\cdot \frac{3}{4} + \frac{7}{5} = \frac{31}{20} = 1{,}55 \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{2}\cdot \frac{7}{5} + \frac{3}{4} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \end{cases}$$

(2p)

Iteraatiokaavat matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Jacobin iteraatioiden iteraatiomatriisi $G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. **(1p)**

Vakiovektori $\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. **(1p)**

$||G||_1$ on G:n istseisarvojen sarakesummien maksimi, eli $||G||_1 = \max\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\} = \frac{1}{2}$. **(1p)**

4. a) Laske Cayley-Hamiltonin lauseen avulla (muut laskentatavat antavat 0 pistettä) A^5, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Arvioi Gershgorinin ympyröiden avulla matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1+\mathtt{i} & 0 \\ 0 & 1 & 1-\mathtt{i} \end{pmatrix}$$

ominaisarvojen sijaintia. Piirrä kuva ja määrää kuvan perusteella väli, johon A:n jokaisen ominaisarvon reaaliosa kuuluu sekä väli, johon A:n jokaisen ominaisarvon imaginaariosa kuuluu.

Ratk.a) Katso harjoitus 11 tehtävä 2a

b) Gershgorinin lause: A:n ominaisarvot $\in \big(\cup_{k=1}^{n} B_k\big) \cap \big(\cup_{k=1}^{n} C_k\big)$,

jossa $B_k = \{z \in \mathbb{C} \mid |a_{kk} - z| \leq R_k\}$, $R_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|$

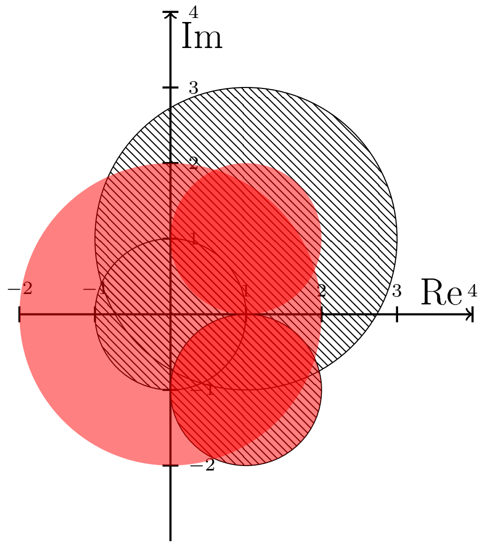
ja $C_k = \{z \in \mathbb{C} \mid |a_{kk} - z| \leq S_k\}$, $S_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} |a_{ik}|$.

Tässä tehtävässä Gershgorinin ympyrät ovat ('riviympyrät' B_k ja 'sarakeympyrät' C_k (alla olevassa kuvassa viivoitettu alue))

$$\begin{aligned} B_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 0| \leq 2\} \\ B_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (1+\mathtt{i})| \leq 1\} \\ B_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (1-\mathtt{i})| \leq 1\} \\ C_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 0| \leq 1\} \\ C_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (1+\mathtt{i})| \leq 2\} \\ C_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (1-\mathtt{i})| \leq 1\} \end{aligned}$$

(1p)

Kaikki ominaisarvot ovat alla olevan kuvion viivoitetussa punaisella väritetyssä alueessa.



(1p)

Reaaliosa $\mathrm{Re}(\lambda) \in [-1, 2]$ kaikilla ominaisarvoilla λ.
Imaginaariosa $\mathrm{Im}(\lambda) \in [-2, 2]$ kaikilla ominaisarvoilla λ.

(1p)