031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 15.12.2022

1. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit.

2. a) Vektorit $s(-1,0)^{\mathrm{T}}$, $s \neq 0$ ovat matriisin A ominaisarvoon 1 liittyvät ominaisvektorit, vektorit $s(1,2)^{\mathrm{T}}$, $s \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon 2 liittyvät ominaisvektorit. Onko matriisi A diagonalisoituva? Jos on, niin määrää matriisi A^{2023} matriisin A diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei.

   b) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 & = 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = 20 \end{cases}$$

LU- hajotelman avulla (muut ratkaisumenetelmät antavat 0 pistettä), kun tiedetään, että yhtälöryhmän kerroinmatriisilla on LU- hajotelma joka koostuu matriiseista

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 3 \\ 5x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$$

järkevästi Jacobin menetelmällä. Valitse $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$ ja laske toinen iteraatio $\vec{x}^{(2)}$.
Määrää Jacobin iteraatiomatriisi G ja vakiovektori $\vec{r}$ esityksessä $\vec{x}^{(k+1)} = G\vec{x}^{(k)} + \vec{r}$. Määrää iteraatiomatriisin G normi $||G||_1$.

4. a) Laske Cayley-Hamiltonin lauseen avulla (muut laskentatavat antavat 0 pistettä) A^5, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   b) Arvioi Gershgorinin ympyröiden avulla matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1+\mathtt{i} & 0 \\ 0 & 1 & 1-\mathtt{i} \end{pmatrix}$$

ominaisarvojen sijaintia. Piirrä kuva ja määrää kuvan perusteella väli, johon A:n jokaisen ominaisarvon reaaliosa kuuluu sekä väli, johon A:n jokaisen ominaisarvon imaginaariosa kuuluu.

Kaavoja:

$ax^2 + bx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1} A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \ k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^{\mathrm{T}} \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^{\mathrm{T}} \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \ k = 2, 3, \ldots, n.$$