031078P MATRIISIALGEBRA Ratkaisut

Loppukoe 11.6.2022 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

matriiseja, missä a, b, c, d, e ja f ovat reaalilukuja.
Tarkastellaan laskutoimituksia AB, $A^T B$ ja BA^T. Määrää kunkin laskutoimituksen tulos, jos kyseinen laskutoimitus on määritelty. Jos jokin laskutoimituksista ei ole määritelty, niin perustele miksi ei. (3p)

b) Matriiseista C, E ja H tiedetään, että tulomatriisit CE ja HC^T ovat samankokoisia matriiseja. Lisäksi matriisin C jokaisella rivillä on 40 lukua ja jokaisella pystyrivillä eli sarakkeella on 20 lukua. Montako riviä ja montako saraketta sisältää matriisi E? Montako riviä ja montako saraketta sisältää matriisi H? (3p)

Ratk. a) $AB = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \\ e+3f & 2e+4f \end{pmatrix}$

$A^T B$ ei ole määritelty, koska A^T:ssä on eri määrä sarakkeita, kuin B:ssä rivejä.

$BA^T = \begin{pmatrix} a+2b & c+2d & e+2f \\ 3a+4b & 3c+4d & 3e+4f \end{pmatrix}.$

1p kukin.

b) C on 20×40 (20 riviä, 40 saraketta) matriisi. CE on olemassa, joten E:ssä on 40 riviä. Lisäksi CE.ssä on 20 riviä.

C^T on 40×20 matriisi. HC^T on olemassa, joten H:ssa on 40 saraketta. Lisäksi HC^T:ssä on 20 saraketta.

Koska CE ja HC^T ovat samankokoisia, niin molemmissa on 20 riviä ja 20 saraketta. Silloin E:ssä on oltava 20 saraketta ja H:ssa 20 riviä.

Vastaus: E:ssä 40 riviä, 20 saraketta ja H:ssa 20 riviä ja 40 saraketta.

Pelkkä vastaus 1p. Perustelut 2p.

2. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta. Merkitse vastaukseesi tarkasti, mikä on ydin ja mikä on ytimen kanta.

Ratk. Katso mallia Harjoituksen 6 tehtävästä 3a).

3. Olkoon matriisi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Onko A diagonalisoituva? Jos A on diagonalisoituva, niin määrää matriisi A^{555} matriisin A diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei ole.

Ratk. Katso mallia Harjoituksen 8 tehtävästä 1.

4. a) Määrää ylideterminoidun systeemin

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

pienimmän neliösumman ratkaisu. Määrää jäännösvektori $\vec{r}$ ja sen normi $\|\vec{r}\|_1$. (4p)

b) Olkoon A $(2n) \times (2n)$ matriisi, jolla on n erisuurta ominaisarvoa, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ niin, että jokainen $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ on A:n karakteristisen yhtälön kaksinkertainen juuri.
Osoita,että $\det A = (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n)^2$. (2p)

Ratk.a) Katso Harjoituksen 10 tehtävä 2.

b) Koska jokainen λ_i, $i = 1, \ldots, n$ on A:n karakteristisen yhtälön $p(\lambda)$ kaksinkertainen juuri, niin $(\lambda - \lambda_i)^2$ on polynomin $p(\lambda)$ tekijä aina kun $i = 1, \ldots, n$. Siis A:n karakteristinen polynomi
$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^{2n}(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)^2 \cdots (\lambda - \lambda_n)^2$.

Silloin $\det(A) = \det(A - 0I) = p(0) = (-1)^{2n}(0 - \lambda_1)^2(0 - \lambda_2)^2 \cdots (0 - \lambda_n)^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_n^2 = (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n)^2$.