031078P MATRIISIALGEBRA

Loppukoe 11.6.2022 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

matriiseja, missä a, b, c, d, e ja f ovat reaalilukuja.
Tarkastellaan laskutoimituksia AB, $A^T B$ ja BA^T. Määrää kunkin laskutoimituksen tulos, jos kyseinen laskutoimitus on määritelty. Jos jokin laskutoimituksista ei ole määritelty, niin perustele miksi ei. (3p)

b) Matriiseista C, E ja H tiedetään, että tulomatriisit CE ja HC^T ovat samankokoisia matriiseja. Lisäksi matriisin C jokaisella rivillä on 40 lukua ja jokaisella pystyrivillä eli sarakkeella on 20 lukua. Montako riviä ja montako saraketta sisältää matriisi E? Montako riviä ja montako saraketta sisältää matriisi H? (3p)

2. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta. Merkitse vastaukseesi tarkasti, mikä on ydin ja mikä on ytimen kanta.

3. Olkoon matriisi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Onko A diagonalisoituva? Jos A on diagonalisoituva, niin määrää matriisi A^{555} matriisin A diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei ole.

4. a) Määrää ylideterminoidun systeemin

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

pienimmän neliösumman ratkaisu. Määrää jäännösvektori $\vec{r}$ ja sen normi $\|\vec{r}\|_1$. (4p)

b) Olkoon A $(2n) \times (2n)$ matriisi, jolla on n erisuurta ominaisarvoa, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ niin, että jokainen $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ on A:n karakteristisen yhtälön kaksinkertainen juuri.
Osoita, että $\det A = (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n)^2$. (2p)

Kaavoja:

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \; k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \; k = 2, 3, \ldots, n.$$

031078P MATRIX ALGEBRA

Final exam 11.6.2022 INTERMEDIATE STEPS AND JUSTIFICATIONS, PLEASE!

1. a) Let

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

be matrices, where a, b, c, d, e and f are real numbers.
Consider the operations AB, $A^T B$ and BA^T. Evaluate the result of each of these operations if they are defined. If some operation is not defined then justify this fact. (3p)

b) Matrices C, E and H are such that the products CE and HC^T are matrices of the same size. In addition each row of C contains 40 numbers and each column contains 20 numbers. How many rows and columns are there in matrix E? How many rows and columns are there in matrix H? (3p)

2. Find rank, nullity, kernel and basis of kernel for the matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Indicate clearly what is kernel and what is basis of kernel.

3. Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Is A diagonalizable? If A is diagonalizable then evaluate the matrix A^{555} using the diagonalization of A. If A is not diagonalizable then justify this fact.

4. a) Find the least square solution of the overdetermined system

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}.$$

Find the residual vector $\vec{r}$ and its norm $\|\vec{r}\|_1$. (4p)

b) Let A be $(2n) \times (2n)$ matrix having n distinct eigenvalues, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ such that each $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ is a double root of characteristic equation of A.
Show that $\det A = (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n)^2$. (2p)

Formulas:

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \; k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \; k = 2, 3, \ldots, n.$$