031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 16.12.2021 Ratkaisut

1. Määrää yhtälöryhmien

$$\begin{cases} x_1+4x_2+5x_3 &= k \\ 4x_1+18x_2+26x_3 &= 0 \\ 3x_1+16x_2+30x_3 &= -k, \end{cases} \quad , k=1612,1613,1614,\ldots,2412.$$

kerroinmatriisi(1p). Määrää kerroinmatriisin se LU-hajotelma, missä matriisin L diagonaalialkiot ovat ykkösiä (2p). Ratkaise tämän LU-hajotelman avulla yllä olevat yhtälöryhmät (3p). Merkitse kaikki välivaiheet tarkasti näkyviin.
Huom. Muut ratkaisutavat kuin edellä mainittu antavat yhtälöryhmien ratkaisuista 0 pistettä!
Ratk.
Kerroinmatriisi: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix}$ (1p)
LU Kehitelmä: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (2p)
Yhtälöryhmät matriisimuodossa: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}, k=1612,1613,1614,\ldots,2412,$
eli
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}, k=1612,1613,1614,\ldots,2412.$
Merkitään $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, jolloin
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}, k=1612,1613,1614,\ldots,2412.$ (1p)
Eteenpäin sijoittamalla $y_1=k, y_2=-4k$ ja $y_3=4k$, aina kun $k=1612,1613,1614,\ldots,2412.$
Silloin $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -4k \\ 4k \end{pmatrix}$, josta taaksepäin sijoittamalla
$x_1=\frac{55}{3}k, x_2=-6k$ ja $x_3=\frac{4}{3}k$, aina kun $k=1612,1613,1614,\ldots,2412.$ (2p)

2. Olkoon B diagonalisoituva $n\times n$ matriisi, jolle $B=Tdiag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)T^{-1}$.
Matriisi $e^B = Tdiag(e^{\lambda_1},e^{\lambda_2},\ldots,e^{\lambda_n})T^{-1}$. Tarkastellaan matriisia $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Onko A diagonalisoituva? Jos on, niin määrää matriisi e^A matriisin diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei.
Ratk. Matriisin A ominaisarvot toteuttavat yhtälön $\det(A-\lambda I)=0$, eli $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$
Omnaisarvot ovat $\lambda_1 = 2$ ja $\lambda_2 = 4$. (1p).
2×2 matriisilla on 2 eri suurta ominaisarvoa, joten se on diagonalisoituva. Ominaisarvoa 2 vastaavat ominaisvektorit ovat $t(-1,1)^T$, $t\neq 0$ ja ominaisarvoa 4 vastaavat ominaisvektorit ovat $t(1,1)^T$, $t\neq 0$. (1p)
Silloin $A=TDT^{-1}$, missä $T=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. (1p)
Matriisi $T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (1p)
Silloin $e^A = T\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^4 \end{pmatrix}T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^2+e^4 & -e^2+e^4 \\ -e^2+e^4 & e^2+e^4 \end{pmatrix}$. (2p)

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & = & 19 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 12x_3 & = & 31 \end{cases}$$

järkevästi Jacobin menetelmällä lähtien vektorista $\vec{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$. Laske toinen iteraatio $\vec{x}^{(2)}$.
Määrää Jacobin iteraatioiden iteraatiomatriisi G ja laske $||G||_\infty$. (5p)
Suppenevatko iteraatiot kohti ratkaisua? (Perustele vastauksesi!) (1p)
Ratk. Vaihdetaan yhtälöiden järjestystä:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 19 \\ x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 31 \end{cases}$$

Kerroinmatriisi $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & 12 \end{pmatrix}$ on lävistäjävaltainen, joten iteraatiot suppenevat kohti oikeaa ratkaisua. (1p)
Yhtälöryhmästä saadaan:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4} \\ x_2 = \frac{2}{7}x_1 + \frac{1}{7}\ x_3 - \frac{19}{7} \\ x_3 = -\frac{1}{12}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{31}{12} \end{cases}.$$

(1p)

Iteraatiokaavat:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{1}{4}x_3^{(k)} + \frac{3}{4} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{2}{7}x_1^{(k)} + \frac{1}{7}\ x_3^{(k)} - \frac{19}{7} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{12}x_1^{(k)} + \frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{31}{12} \end{cases}.$$

Valitaan $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0,0,0)$.
1. iteraatio:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -\frac{1}{4}x_2^{(0)} + \frac{1}{4}x_3^{(0)} + \frac{3}{4} = 0 + 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \\ x_2^{(1)} = \frac{2}{7}x_1^{(0)} + \frac{1}{7}\ x_3^{(0)} - \frac{19}{7} = 0 + 0 - \frac{19}{7} = -\frac{19}{7} \\ x_3^{(1)} = -\frac{1}{12}x_1^{(0)} + \frac{1}{4}x_2^{(0)} + \frac{31}{12} = 0 + 0 + \frac{31}{12} = +\frac{31}{12} \end{cases}.$$

2. iteraatio:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -\frac{1}{4}x_2^{(1)} + \frac{1}{4}x_3^{(1)} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}(-\frac{19}{7}) + \frac{1}{4}\frac{31}{12} + \frac{3}{4} = 2.074 \\ x_2^{(2)} = \frac{2}{7}x_1^{(1)} + \frac{1}{7}x_3^{(1)} - \frac{19}{7} = \frac{2}{7}\frac{3}{4} + \frac{1}{7}\frac{31}{12} - \frac{19}{7} = -2.131 \\ x_3^{(2)} = -\frac{1}{12}x_1^{(1)} + \frac{1}{4}x_2^{(1)} + \frac{31}{12} = -\frac{1}{12}\frac{3}{4} + \frac{1}{4}(-\frac{19}{7}) + \frac{31}{12} = 1.842 \end{cases}.$$

(2p)

Iteraatiokaavat matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{19}{7} \\ \frac{31}{12} \end{pmatrix}$$

Jacobin iteraatioiden iteraatiomatriisi $G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$. (1p)
Iteraatiomatriisin normi (maksimi itseisarvojen rivisummista):
$||G||_\infty = \max\{\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}\} = \frac{1}{2}$. (1p)

4. a) Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

itseisarvoltaan suurimman ominaisarvon likiarvo iteratiivisesti lähtien vektorista $\vec{y}_0 = (-1,1,-1)^T$. Likiarvo $\lambda_1^{(1)}$ riittää. Välivaiheet näkyviin. (3p)

b) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laske Cayley-Hamiltonin lauseen avulla matriisi $\cos(\pi A)$. (3p)

Ratk. a)

$$\vec{y}_1 = A\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{y}_2 = A\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$ (1p)

$\lambda_1^{(1)} = \frac{\vec{y}_1^T \cdot \vec{y}_2}{\vec{y}_1^T \cdot \vec{y}_2} = \frac{(1,-1,3)\cdot(-1,3,-5)^T}{(1,-1,3)\cdot(1,-1,3)^T} = \frac{-19}{11} \approx -1.727.$ (2p)

b) Katso Harjoitus 11 tehtävä 7.