031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 16.12.2021

1. Määrää yhtälöryhmien

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= k \\ 4x_1 + 18x_2 + 26x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 16x_2 + 30x_3 &= -k, \end{cases} \quad , k = 1612, 1613, 1614, \ldots, 2412.$$

kerroinmatriisi(1p). Määrää kerroinmatriisin se LU-hajotelma, missä matriisin L diagonaalialkiot ovat ykkösiä (2p). Ratkaise tämän LU-hajotelman avulla yllä olevat yhtälöryhmät (3p). Merkitse kaikki välivaiheet tarkasti näkyviin.
Huom. Muut ratkaisutavat kuin edellä mainittu antavat yhtälöryhmien ratkaisuista 0 pistettä!

2. Olkoon B diagonalisoituva $n \times n$ matriisi, jolle $B = Tdiag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)T^{-1}$.
Matriisi $e^B = Tdiag(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n})T^{-1}$. Tarkastellaan matriisia $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Onko A diagonalisoituva? Jos on, niin määrää matriisi e^A matriisin diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei.

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 19 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 31 \end{cases}$$

järkevästi Jacobin menetelmällä lähtien vektorista $\vec{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. Laske toinen iteraatio $\vec{x}^{(2)}$.
Määrää Jacobin iteraatioiden iteraatiomatriisi G ja laske $||G||_\infty$. (5p)
Suppenevatko iteraatiot kohti ratkaisua? (Perustele vastauksesi!) (1p)

4. a) Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

itseisarvoltaan suurimman ominaisarvon likiarvo iteratiivisesti lähtien vektorista $\vec{y}_0 = (-1, 1, -1)^T$. Likiarvo $\lambda_1^{(1)}$ riittää. Välivaiheet näkyviin. (3p)

b) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laske Cayley-Hamiltonin lauseen avulla matriisi $\cos(\pi A)$. (3p)

Kaavat

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1} A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \ k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \ k = 2, 3, \ldots, n.$$