031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 17.12.2020 Ratkaisut

1. Määrää matriisin $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ kaikki ominaisarvot ja ominaisvektorit, sekä määrää matriisi A^2 **matriisin A diagonalisoinnin avulla** (muut tavat antavat 0 pistettä). Merkitse kaikki välivaiheet tarkasti näkyviin.

Ratk.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 5 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)[(3-\lambda)^2-25]$$

Ominaisarvoille: $\det(A-\lambda I)=0$, eli $(4-\lambda)[(3-\lambda)^2-25]=0$

Ominaisarvot: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=4$ ja $\lambda_3=8$ **(1p)**

Ominaisarvoon λ liittyville ominaisvektoreille on voimassa: $(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0}$.

$\lambda_1=-2$: $\quad \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} - (-2)I\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Laajennettu kerroinmatriisi: $\begin{pmatrix} 3-(-2) & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4-(-2) & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3-(-2) & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vastaava yhtälöryhmä: $\begin{cases} x_1 + x_3 & = 0 \\ x_2 & = 0 \end{cases}$.

Siis $x_3=-x_1$ ja $x_2=0$.

Silloin ominaisvektorit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Matriisin A ominaisarvoon -2 liittyvät ominaisvektorit ovat $s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, missä $s \neq 0$.

Vastaavasti:

Matriisin A ominaisarvoon 4 liittyvät ominaisvektorit ovat $s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, missä $s \neq 0$.

Matriisin A ominaisarvoon 8 liittyvät ominaisvektorit ovat $s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, missä $s \neq 0$. **(2p)**

Matriisilla A on kolme erisuurta ominaisarvoa, joten A on diagonalisoituva. Kun $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja $D = diag(-2,4,8)$, niin $A = TDT^{-1}$.

Nyt $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow + \\ \\ -\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2} \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

eli $T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **(1p)**

Silloin $A^2 = TDT^{-1}TDT^{-1} = TD^2T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

eli $A^2 = \begin{pmatrix} 34 & 0 & 30 \\ 0 & 16 & 0 \\ 30 & 0 & 34 \end{pmatrix}$. **(2p)**

2. Määrää yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2a \\ 2x_1 + 3x_3 &= 4b \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 &= 12c \end{cases}$$

kerroinmatriisi **(1p)**. Määrää kerroinmatriisin se LU-hajotelma, missä matriisin L diagonaalialkiot ovat ykkösiä **(2p)**. Ratkaise tämän LU**-hajotelman avulla yllä oleva yhtälöryhmä**, kun a, b ja c ovat tunnettuja vakioita **(3p)**. Merkitse kaikki välivaiheet tarkasti näkyviin.
Huom. Muut ratkaisutavat kuin edellä mainittu antavat yhtälöryhmän ratkaisusta 0 pistettä!

Ratk. Kerroinmatriisi
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ **(1p)**

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \quad -3 \\ + \\ + \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -2 = -\ell_{21}, \\ -3 = -\ell_{31} \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ + \end{matrix} \qquad -1 = -\ell_{32} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U \end{aligned}$$

Alakolmiomatriisi L on

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2p)
Yhtälöryhmä matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4b \\ 12c \end{pmatrix}.$$

Siis $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4b \\ 12c \end{pmatrix}$ eli $LU \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4b \\ 12c \end{pmatrix}$.

Merkitään $U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Silloin on $L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4b \\ 12c \end{pmatrix}$, eli $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4b \\ 12c \end{pmatrix}$.

Sama yhtälöryhmänä:

$$\begin{cases} y_1 &= 2a \\ 2y_1 + y_2 &= 4b \\ 3y_1 + y_2 + y_3 &= 12c. \end{cases}$$

Eteenpäin sijoittamalla:

$$\begin{cases} y_1 &= 2a \\ y_2 &= -4a + 4b \\ y_3 &= -2a - 4b + 12c \end{cases}$$ **(3p)**

Koska $U\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\-4a+4b\\-2a-4b+12c\end{pmatrix}$, eli
$\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\-4a+4b\\-2a-4b+12c\end{pmatrix}$, saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3 &= 2a\\ 2x_2-x_3 &= -4a+4b\\ 2x_3 &= -2a-4b+12c.\end{cases}$$

Taaksepäin sijoittamalla
$x_3=-a-2b+6c$, $x_2=-\frac{5}{2}a+b+3c$ ja $x_1=\frac{3}{2}a+5b-9c$.

3. **a)** Määrää matrisin

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&4\\1&-1&1\\1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}$$

normit $||A||_\infty$ ja $||A||_1$. Merkitse tarkasti kumpi on kumpi. Välivaiheet näkyviin. **(2p)**
b) Tarkastellaan ylideterminoitua yhtälöryhmää

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-35\\0\\0\\35\\35\end{pmatrix},$$

missä matriisi A on a)-kohdan matriisi. Määrää yhtälöryhmän pienimmän neliösumman ratkaisu ja määrää jäännösvektori (eli residuaalivektori) $\vec{r}$ ja sen normi $||\vec{r}||_{Fr}$. Merkitse kaikki välivaiheet tarkasti näkyviin. **(4p)**

Ratk. $||\cdot||_\infty$ on itseisarvojen rivisummien maksimi:

$$||A||_\infty=\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=\max\{1+|-2|+4,1+|-1|+1,1+0+0,1+1+1,1+2+4\}=\max\{7,3,1,3,7\}=7.$$

$||\cdot||_1$ on itseisarvojen sarakesummien maksimi:

$$||A||_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|=\max\{1+1+1+1+1,|-2|+|-1|+0+1+2,4+1+0+1+4\}=\max\{5,6,10\}=10.$$

(2p)
b) PNS-ratkaisulle:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\-2&-1&0&1&2\\4&1&0&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&4\\1&-1&1\\1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\-2&-1&0&1&2\\4&1&0&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-35\\0\\0\\35\\35\end{pmatrix},$$

eli $\begin{pmatrix}5&0&10\\0&10&0\\10&0&34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\175\\35\end{pmatrix}$.

Yhtälöryhmän ratkaisu antaa PNS-ratkaisun $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{35}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$. **(2p)**

Jäännösvektori $\vec{r} = \begin{pmatrix} -35 \\ 0 \\ 0 \\ 35 \\ 35 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{35}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -12 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$. **(1p)**

$||\vec{r}||_{Fr} = \sqrt{2^2 + 8^2 + (-12)^2 + 8^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{70} \approx 16,733.$ **(1p)**

4. **a)** Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Laske **Cayley-Hamiltonin lauseen** avulla A^{-1} (muut tavat antavat 0 pistettä). Merkitse kaikki välivaiheet tarkasti näkyviin. **(2p)**

b) Matriisi A on $n \times n$ matriisi, jolla on k reaalista erisuurta ominaisarvoa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, ja $\lambda_i > 1$, aina kun $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. Ominaisarvo λ_i on matriisin A karakteristisen yhtälön n_i kertainen juuri aina kun $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, ja lisäksi $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Määrää näiden tietojen avulla luvun $\det(A - I)$ itseisarvo. Perustele vastauksesi tarkasti! **(4p)**

Ratk. Karakteristinen polynomi on

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda^2) - 5 = \lambda^2 - 4\lambda - 1$$

Karakteristinen yhtälö: $p(\lambda) = 0$ eli $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$

Cayley-Hamiltonin lauseen mukaan matriisi toteuttaa karakteristisen yhtälönsä, joten

$$p(A) = A^2 - 4A - I = O_{2\times 2}.$$

Tästä seuraa

$$I = A^2 - 4A \qquad \text{Siis } A^{-1} = A - 4I.$$

Lasketaan vielä käänteismatriisi

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A - 4I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2p)

b) Katso Harjoitus 11 tehtävä 4.