031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 17.12.2020

1. Määrää matriisin $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ kaikki ominaisarvot ja ominaisvektorit, sekä määrää matriisi A^2 **matriisin A diagonalisoinnin avulla** (muut tavat antavat 0 pistettä). Merkitse kaikki välivaiheet tarkasti näkyviin.

2. Määrää yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 2a \\ 2x_1 + 3x_3 & = & 4b \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 & = & 12c \end{cases}$$

kerroinmatriisi **(1p)**. Määrää kerroinmatriisin se LU-hajotelma, missä matriisin L diagonaalialkiot ovat ykkösiä **(2p)**. Ratkaise tämän **LU-hajotelman avulla yllä oleva yhtälöryhmä**, kun a, b ja c ovat tunnettuja vakioita **(3p)**. Merkitse kaikki välivaiheet tarkasti näkyviin.
Huom. Muut ratkaisutavat kuin edellä mainittu antavat yhtälöryhmän ratkaisusta 0 pistettä!

3. a) Määrää matrisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

normit $||A||_\infty$ ja $||A||_1$. Merkitse tarkasti kumpi on kumpi. Välivaiheet näkyviin. **(2p)**

b) Tarkastellaan ylideterminoitua yhtälöryhmää

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 0 \\ 0 \\ 35 \\ 35 \end{pmatrix},$$

missä matriisi A on a)-kohdan matriisi. Määrää yhtälöryhmän pienimmän neliösumman ratkaisu ja määrää jäännösvektori (eli residuaalivektori) $\vec{r}$ ja sen normi $||\vec{r}||_{Fr}$. Merkitse kaikki välivaiheet tarkasti näkyviin. **(4p)**

4. a) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Laske **Cayley-Hamiltonin lauseen** avulla A^{-1} (muut tavat antavat 0 pistettä). Merkitse kaikki välivaiheet tarkasti näkyviin. **(2p)**

b) Matriisi A on $n \times n$ matriisi, jolla on k reaalista erisuurta ominaisarvoa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, ja $\lambda_i > 1$, aina kun $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. Ominaisarvo λ_i on matriisin A karakteristisen yhtälön n_i kertainen juuri aina kun $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, ja lisäksi $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Määrää näiden tietojen avulla luvun $\det(A - I)$ itseisarvo. Perustele vastauksesi tarkasti! **(4p)**

Kaavat

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1} A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \ k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \ k = 2, 3, \ldots, n.$$