ENGLANTI KÄÄNNÄ
ENGLISH TURN OVER

031078P MATRIISIALGEBRA

Loppukoe 3.2.2020 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

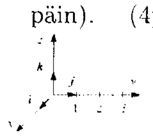
1. Määrää yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 7x_3 = -20 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

kerroinmatriisi ja laajennettu (=lisätty) kerroinmatriisi. Merkitse tarkasti kumpi on kumpi. Ratkaise yhtälöryhmä Gaussin menetelmällä.
Huom. Muut ratkaisutavat kuin edellä mainittu antavat yhtälöryhmän ratkaisusta 0 pistettä!

2. a) Olkoon $P_n(\mathbb{R})$ korkeintaan astetta n olevien reaalikertoimisten polynomien joukko, eli $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n | a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$. Tarkastellaan polynomiavaruutta $P_3(\mathbb{R})$. Sen eräs kanta on polynomijoukko $S = \{t, 1 + t^2, t + 2t^3, 1 + 2t^2\}$. Polynomin $p(t)$ koordinaatit kannassa S ovat $2, -2, 5$ ja 0. Määrää polynomi $p(t)$. (2p)

b) Kuvankäsittelyssä kuvia muokataan käyttämällä lineaarisia muunnoksia, kuten esimerkiksi venytystä ja kiertoa. Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle E) matriisi, kun kuvaa aluksi venytetään k-akselin suunnassa 25 kertaiseksi ja lopuksi kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran j-akselin ympäri myötäpäivään (katsottuna j-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin). (4p)



3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 31 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 19 \end{cases}$$

järkevästi Jacobin menetelmällä lähtien vektorista $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$. Laske toinen iteraatio $\vec{x}^{(2)}$. Määrää Jacobin iteraatioiden iteraatiomatriisi G ja laske $||G||_1$.

4. a) Vektorit $s(-2, 1, 2)^T + t(1, 1, 2)^T$, $s \neq 0$ tai $t \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon 3 liittyvät ominaisvektorit ja vektorit $s(0, 0, 1)^T$, $s \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon -4 liittyvät ominaisvektorit. Onko matriisi A diagonalisoituva? Jos A on diagonalisoituva, niin määrää matriisit A ja A^{12} matriisin A diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei. (3p)

b) Tarkastellaan $n \times n$ matriisia $A = (a_{ij})$. Matriisin karakteristinen polynomi

$$p_A(\lambda) = b_n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1 \lambda + b_0.$$

Lausu polynomin kertoimet b_0, b_n ja b_{n-1} matriisin A alkioiden avulla. (3p)

Kaavoja:

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_{k-1}}{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$||A||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda}.$$

$$||A||_F = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = ||A|| ||A^{-1}||$$

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1} A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{||\vec{a}_1||}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{||\vec{v}_k||}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

FINNISH TURN OVER
SUOMI KÄÄNNÄ

031078P MATRIX ALGEBRA

Test 3.2.2020 Reason your answers, thank you!

1. Determine the coefficient matrix and the augmented matrix of the system

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 7x_3 = -20 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

of linear equations. Solve the system by using Gaussian elimination.

2. a) Let $P_n(\mathbb{R})$ be the vector space of polynomials with real coefficient of degree less than or equal to n. In other words $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n | a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$. We consider a vector space $P_3(\mathbb{R})$. The polynomial set $S = \{t, 1 + t^2, t + 2t^3, 1 + 2t^2\}$ is a basis of $P_3(\mathbb{R})$. The coordinates of the polynomial $p(t)$ with respect to the basis S are $2, -2, 5$ ja 0. Determine the polynomial $p(t)$. (2p)

   b) In computer aided design (CAD) linear transformations such as stretching, and rotations are used. Determine the matrix of the linear transformation (from the basis $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ to the basis E) when an image first is streched 25-fold in the direction of the k-axis and then is rotated clockwise (viewed from the positive j-axis to the origin) about the j-axis by an amount of $\frac{\pi}{2}$ radians. (4p)

3. Solve the system

$$\begin{cases} x_1 & - & 3x_2 & + & 12x_3 & = & 31 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & = & 19 \end{cases}$$

by using the Jacobi method. Choose $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$ and calculate the iteration $\vec{x}^{(2)}$. Determine the iteration matrix G of Jacob iterations for the above system and find the norm $||G||_1$.

4. a) A matrix A has eigenvectors $s(-2, 1, 2)^T + t(1, 1, 2)^T$, $s \neq 0$ or $t \neq 0$, corresponding the eigenvalue 3 of A and eigenvectors $s(0, 0, 1)^T$, $s \neq 0$, corresponding the eigenvalue -4 of A. If the matrix A is diagonalizable, then determine the matrices A and A^{12}. If the matrix A is not diagonalizable, then explain why not. (3p)

   b) Let

$$p_A(\lambda) = b_n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1 \lambda + b_0.$$

be a characteristic polynomial of the $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})$. Define b_0, b_n and b_{n-1} by using elements of A. (3p)

Formulae:

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_{k-1}}{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$||A||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$||A||_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda}.$$

$$||A||_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = ||A|| \, ||A^{-1}||$$

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1} A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{||\vec{a}_1||}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{||\vec{v}_k||}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$