031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 19.12.2019 Ratkaisut

1. **a)** Onko matriisi $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisoituva? Jos on, niin määrää matriisi A^{2412} matriisin diagonalisoinnin avulla. Jos matriisi A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei. (3p)
b) Vektorit $s(1,0,0)^T$, $s \neq 0$ ovat matriisin A ominaisarvoon 1 liittyvät ominaisvektorit, vektorit $s(0,-1,0)^T$, $s \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon -1 liittyvät ominaisvektorit ja vektorit $s(2,0,2)^T$, $s \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon 3 liittyvät ominaisvektorit.
Määrää matriisi A. (3p)

Ratk. a) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2$. Ominaisarvoille $\det(A-\lambda I) = 0$, eli $\lambda = 3$ on ainoa ominaisarvo. **(1p)**

Ominaisvektoreille $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$ on voimassa: $(A - 3I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Siis $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, eli $x_2 = 0$ ja matriisin A ominaisarvoon 3 liittyvät ominaisarvot ovat muotoa $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, missä $x_1 \neq 0$.

Matriisilla A on vain 1 vapaa ominaisvektori. Siis A ei ole diagonalisoituva. **(2p)**

b) Matriisilla A on kolme erisuurta ominaisarvoa, joten A on diagonalisoituva. Kun $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ja $D = diag(1,-1,2)$, niin $A = TDT^{-1}$. **(1p)**.

$$\text{Nyt} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ |(-1) \\ (-1) \mid \frac{1}{2} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ joten}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Silloin $A = TDT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **(2p)**

2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 = -8 \end{cases}$$

järkevästi Jacobin menetelmällä lähtien vektorista $\vec{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$. Laske toinen iteraatio $\vec{x}^{(2)}$. Määrää Jacobin iteraatioiden iteraatiomatriisi G ja laske $||G||_\infty$.

Ratk. Vaihdetaan yhtälöiden järjestystä:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 = -8 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -4. \end{cases}$$

Matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Kerroinmatriisi $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ on lävistäjävaltainen, joten iteraatiot suppenevat kohti yhtälöryhmän ratkaisua. **(1p)**

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 = -8 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -4. \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + 2 \\ x_2 = -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{8}x_3 - 1 \\ x_3 = -\frac{1}{7}x_1 + \frac{5}{7}x_2 - \frac{4}{7} \end{cases}.$$

Iteraatiokaavat:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k)} + 2 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{1}{8}x_3^{(k)} - 1 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{7}x_1^{(k)} + \frac{5}{7}x_2^{(k)} - \frac{4}{7} \end{cases}.$$

Valitaan $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0,0,0)$.

1. iteraatio:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + 2 = 2 \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{8} \cdot 0 - 1 = -1 \\ x_3^{(1)} = -\frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{5}{7} \cdot 0 - \frac{4}{7} = -\frac{4}{7} \end{cases}.$$

2. iteraatio:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3}(-\frac{4}{7}) + 2 = \frac{15}{7} \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{4} \cdot 2 - \frac{1}{8}(-\frac{4}{7}) - 1 = -\frac{10}{7} \\ x_3^{(2)} = -\frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{5}{7} \cdot (-1) - \frac{4}{7} = -\frac{11}{7} \end{cases}.$$

(3p)

Iteraatiokaavat:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k)} + 2 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{1}{8}x_3^{(k)} - 1 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{7}x_1^{(k)} + \frac{5}{7}x_2^{(k)} - \frac{4}{7} \end{cases}.$$

Matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Jacobin iteraatioiden iteraatiomatriisi $G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & 0 \end{pmatrix}$. **(1p)**

Iteraatiomatriisin normi (maksimi itseisarvojen rivisummista):
$||G||_\infty = \max\{0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{8}, \frac{1}{7} + \frac{5}{7} + 0\} = \max\{\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{6}{7}\} = \frac{6}{7}$. **(1p)**

3. **a)** Matriisi A on 50×50 matriisi, jolle on voimassa $A = B + C$, missä $B = diag(1, 2, \ldots, 50)$ ja $C = (c_{ij})$ on 50×50 matriisi, jolle $c_{12} = c_{21} = 2$, ja muut matriisin C alkiot ovat nollia. Määrää matriisin A kaikki ominaisarvot. (2p)

b) Tarkastellaan ylideterminoitua yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x & + & y & = 23 \\ x & + & 2y & = 27 \\ x & + & 3y & = 30 \\ x & + & 4y & = 34 \end{cases}.$$

Määrää yhtälöryhmän pienimmän neliösumman ratkaisu ja määrää jäännösvektori (eli residuaalivektori) $\vec{r}$ ja sen normi $||\vec{r}||_{Fr}$. (4p)

Ratk. a)

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2 & 2-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\ & \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ 0 & & & \cdots & & 0 & 50-\lambda\end{vmatrix}=(50-\lambda)(49-\lambda)\cdots(3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix},$$

eli $\det(A-\lambda I)=(50-\lambda)(49-\lambda)\cdots(3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-2)$.
Ominaisarvoille $\det(A-\lambda I)=0$, eli $\lambda^2-3\lambda-2)=0, (3-\lambda)=0,\ldots,(50-\lambda)=0$, eli
$\lambda_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \lambda_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \lambda_3=3, \lambda_4=4,\ldots,\lambda_{50}=50$. **(2p)**

b) Yhtälöryhmä matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\ 27\\ 30\\ 34\end{pmatrix}.$$

PNS-ratkaisulle:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}23\\ 27\\ 30\\ 34\end{pmatrix},$$

eli $\begin{pmatrix}4 & 10\\ 10 & 30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}114\\ 303\end{pmatrix}$. **(1p)**

Yhtälöryhmän ratkaisu antaa PNS-ratkaisun $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{39}{2}\\ \frac{18}{5}\end{pmatrix}$. **(1p)**

Jäännösvektori $\vec{r}=\begin{pmatrix}23\\ 27\\ 30\\ 34\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{39}{2}\\ \frac{18}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}\\ -\frac{3}{10}\\ -\frac{3}{10}\\ \frac{1}{10}\end{pmatrix}$ **(1p)**

$||\vec{r}||_{Fr}=\sqrt{(\frac{1}{10})^2+(\frac{3}{10})^2+(\frac{3}{10})^2+(\frac{1}{10})^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **(1p)**

4. **a)** Olkoon

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Laske Cayley-Hamiltonin lauseen avulla A^4 (muut tavat antavat 0 pistettä). (3p)
b) Olkoon A ja B säännöllisiä (eli kääntyviä) $n\times n$ matriiseja. Osoita, että matriisien AB ja BA ominaisarvot ovat samat. Perustele vastauksesi tarkasti! (3p)

Ratk. a) $\det(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}1-\lambda & 0\\ -1 & 2-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2$.
Cayley-Hamilton: $A^2-3A+2I=O_{2\times 2}$. **(1p)**
Siis $A^2=3A-2I$.
Silloin $A^3=A(3A-2I)=3A^2-2A=3(3A-2I)-2A=7A-6I$.
Siis $A^4=AA^3=A(7A-6I)=7A^2-6A=7(3A-2I)-6A=15A-14I$, **(1p)**
eli $A=15\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}-14\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -15 & 16\end{pmatrix}$. **(1p)**

b) Olkoon λ matriisin AB ominaisarvo. Koska matriisit A ja B ovat kääntyviä, niin myös matriisi AB on kääntyvä. Silloin $\lambda\neq 0$.
Koska λ on AB:n ominaisarvo, on olemassa sellainen vektori $\vec{x}\neq 0$, että $AB\vec{x}=\lambda\vec{x}$.
Silloin myös $BAB\vec{x}=B\lambda\vec{x}$, eli $BA(B\vec{x})=\lambda(B\vec{x})$. Vektori $B\vec{x}\neq\vec{0}$, sillä $AB\vec{x}=\lambda\vec{x}\neq\vec{0}$.
Siis $BA(B\vec{x})=\lambda(B\vec{x})$ ja $B\vec{x}\neq\vec{0}$, joten λ on matriisin BA ominaisarvo.
Vaihtamalla edellä A:n ja B:n paikkaa voidaan osoittaa, että jokainen BA:n ominaisarvo on myös matriisin AB ominaisarvo.
Siis matriisien AB ja BA ominaisarvot ovat samat. **(3p)**