031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 19.12.2019 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Onko matriisi $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisoituva? Jos on, niin määrää matriisi A^{2412} matriisin diagonalisoinnin avulla. Jos matriisi A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei. (3p)

   b) Vektorit $s(1,0,0)^T$, $s \neq 0$ ovat matriisin A ominaisarvoon 1 liittyvät ominaisvektorit, vektorit $s(0,-1,0)^T$, $s \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon -1 liittyvät ominaisvektorit ja vektorit $s(2,0,2)^T$, $s \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon 3 liittyvät ominaisvektorit.
   Määrää matriisi A. (3p)

2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 & - & 5x_2 & + & 7x_3 & = & -4 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & = & -8 \end{cases}$$

järkevästi Jacobin menetelmällä lähtien vektorista $\vec{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$. Laske toinen iteraatio $\vec{x}^{(2)}$. Määrää Jacobin iteraatioiden iteraatiomatriisi G ja laske $||G||_\infty$.

3. a) Matriisi A on 50×50 matriisi, jolle on voimassa $A = B + C$, missä $B = diag(1,2,\ldots,50)$ ja $C = (c_{ij})$ on 50×50 matriisi, jolle $c_{12} = c_{21} = 2$, ja muut matriisin C alkiot ovat nollia. Määrää matriisin A kaikki ominaisarvot. (2p)

   b) Tarkastellaan ylideterminoitua yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x & + & y & = 23 \\ x & + & 2y & = 27 \\ x & + & 3y & = 30 \\ x & + & 4y & = 34 \end{cases}.$$

   Määrää yhtälöryhmän pienimmän neliösumman ratkaisu ja määrää jäännösvektori (eli residuaalivektori) $\vec{r}$ ja sen normi $||\vec{r}||_{Fr}$. (4p)

4. a) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Laske Cayley-Hamiltonin lauseen avulla A^4 (muut tavat antavat 0 pistettä). (3p)

   b) Olkoon A ja B säännöllisiä (eli kääntyviä) $n \times n$ matriiseja. Osoita, että matriisien AB ja BA ominaisarvot ovat samat. Perustele vastauksesi tarkasti! (3p)

Kaavat

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|},\ k = 2,3,\ldots,n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1},\ k = 2,3,\ldots,n.$$