F1 →

KÄÄNNÄ

# MATRIX ALGEBRA

1. test 28.11.2019 Reason your answers, thank you!

1. a) Find the coordinates of the vector $\vec{u}$ with respect to the basis $\{(1,0),(0,1)\}$, when the coordinates of the vector $\vec{u}$ with respect to the basis $\{(-6,7),(-6,6)\}$ are 3 and $-5$. (2p)

   b) The set $S = \{1, t, t^2\}$ of polynomials are a basis of the polynomial space $P_2(\mathbb{R})$. Find the coordinates of the polynomial $p(t) = (-4t+6)(t-3)+11$ with respect to the basis $S$. (2p)

   c) We have a matrix equation $AB^T = C\,diag(1,2,3,\ldots,498,499)$. Find how many rows and how many columns the matrix $B$ contains, when the matrix $A$ is invertible and the number of rows of the matrix $C$ is 100 less than the number of columns of $C$. (2p)

2. Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determine the $LU$ decomposition of the matrix such that every element of the main diagonal of $L$ equals to 1. Use the $LU$-factorization to solve the following system of equations:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3a \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = b \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 = -a \end{cases},$$

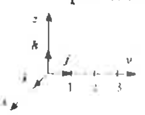
where $a$ and $b$ are known constants.

3. In computer aided design (CAD) linear transformations such as stretching, reflections and rotations are used.

   a) Determine the matrix of the linear transformation (from the basis $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ to the basis $E$) when an image is reflected about $xy$-plane. (1p)

   b) Determine the matrix of the linear transformation (from the basis $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ to the basis $E$) when an image is rotated clockwise about the $i$-axis (viewed from the positive $i$-axis to the origin) by amount of $\frac{\pi}{2}$ radians. (1p)

   c) Determine the matrix of the linear transformation (from the basis $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ to the basis $E$) when an image first is streched 28-fold in the direction of the $i$-axis, then is streched 11-fold in the direction of $k$-axis and then is rotated counter-clockwise about the $j$-axis (viewed from the positive $j$-axis to the origin) by amount of $\frac{\pi}{2}$ radians. (4p)



4. a) Determine the rank, nullity, the kernel ( null space), the base of the kernel of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4p)

   b) The set $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ of vectors is a basis of a vector space $U$. Is $\{\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}\}$ a basis of $U$? Reason your answer! (2p)

**Formulae:**

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|},\ \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|},\ k = 2,3,\ldots,n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T\vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T\vec{a}_k)\vec{q}_{k-1},\ k = 2,3,\ldots,n.$$

ENG ->
TURN

# MATRIISIALGEBRA

1. Välikoe 28.11.2019 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Määrää vektorin $\vec{u}$ koordinaatit kannassa $\{(1,0),(0,1)\}$, kun $\vec{u}$:n koordinaatit kannassa $\{(-6,7),(-6,6)\}$ ovat 3 ja $-5$. (2p)
   b) Polynomijoukko $S = \{1, t, t^2\}$ on polynomiavaruuden $P_2(\mathbb{R})$ kanta. Määrää polynomin $p(t) = (-4t+6)(t-3)+11$ koordinaatit kannan $S$ suhteen. Merkitse tarkasti jokaiselle koordinaatille mihin kannan polynomiin koordinaatti liittyy. (2p)
   c) Matriiseille $A$, $B$ ja $C$ on voimassa matriisiyhtälö $AB^T = Cdiag(1,2,3,\ldots,498,499)$. Montako riviä ja saraketta ( pystyriviä) on matriisissa $B$, kun matriisi $A$ on säännöllinen (eli kääntyvä), ja matriisissa $C$ on rivejä 100 vähemmän kuin sarakkeita. (2p)

2. Olkoon

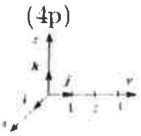
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Määrää $A$:n se $LU$-hajotelma, missä matriisin $L$ diagonaalialkiot ovat ykkösiä. Määrää tämän $LU$-hajotelman avulla yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3a \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = b \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 = -a \end{cases}$$

ratkaisu, kun $a$ ja $b$ ovat tunnettuja vakioita.
**Huom.** Muut ratkaisutavat kuin edellä mainittu antavat yhtälöryhmän ratkaisusta 0 pistettä!

3. Kuvankäsittelyssä kuvia muokataan käyttämällä lineaarisia muunnoksia, kuten esimerkiksi peilausta, venytystä ja kiertoa.
   a) Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle $E$) matriisi, kun kuva peilataan $xy$-tason ( $ij$-tason) suhteen. (1p)
   b) Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle $E$) matriisi, kun kuva kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran $i$-akselin ympäri myötäpäivään (katsottuna $i$-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin). (1p)
   c) Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle $E$) matriisi kun kuva aluksi venytetään $i$-akselin suunnassa 28 kertaiseksi ja $k$-akselin suunnassa 11 kertaiseksi, sekä lopuksi kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran $j$-akselin ympäri vastapäivään (katsottuna $j$-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin). Muunna saamasi muunnosmatriisin avulla vektori $(10, 20, 30)^T$. (4p)



4. a) Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

   aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta. Merkitse vastaukseesi tarkasti, mikä on ydin ja mikä on ytimen kanta. (4p)
   b) Vektorijoukko $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ on vektoriavaruuden $U$ kanta. Onko vektorijoukko

$$\{\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}\}$$

   myös vektoriavaruuden $U$ kanta? Perustele vastauksesi tarkasti! (2p)

**Kaavoja:**

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \; k = 2, 3, \ldots, n,$$
$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, n.$$