031078P MATRIISIALGEBRA
Välikoe 2 13.12.2018 Ratkaisut

1. Tarkastellaan matriisia
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Määrää matriisin A ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit. (4p)
b) Määrää matriisin A^{2019} ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit. (2p)

Ratk.a) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -10 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 12$
Ominaisarvoille $\det(A - \lambda I) = 0$ eli $\lambda_1 = 4$ ja $\lambda_2 = 3$. **(2p)**

Ominaisvektoreille $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$ on voimassa $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.
$\lambda = 4$:
$\begin{pmatrix} -1-4 & 2 \\ -10 & 8-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
Gauss: $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -10 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {}^{-2} \\ {}_{+} \end{array} \sim \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Yhtälöryhmänä: $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$. Siis $x_2 = \frac{5}{2}x_1$.
Silloin $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{5}{2}x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.
Matriisin A ominaisarvoon 4 liittyvät ominaisvektorit ovat $t\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, missä $t \neq 0$. **(1p)**
$\lambda = 3$:
$\begin{pmatrix} -1-3 & 2 \\ -10 & 8-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
Gauss: $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {}^{\frac{-5}{2}} \\ {}_{+} \end{array} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Siis $x_2 = 2x_1$. Silloin $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Matriisin A ominaisarvoon 3 liittyvät ominaisvektorit ovat $s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, missä $s \neq 0$. **(1p)**
b) Kaikilla $k = 2, 3, \ldots$ on $A^k\vec{x} = \lambda^k\vec{x}$ aina kun $\vec{x}$ on matriisin A ominaisarvoon λ liittyvä ominaisarvo.
Silloin matriisin A^{2019} ominaisarvot ovat 4^{2019} ja 3^{2019}. **(1p)**
Ominaisarvoon 4^{2019}liittyvät ominaisvektorit ovat $t\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, missä $t \neq 0$ ja ominaisarvoon 3^{2019} liittyvät ominaisvektorit ovat $s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, missä $s \neq 0$. **(1p)**

2. Vektorit $s(-2,1,2)^T + t(1,1,2)^T$, $s \neq 0$ tai $t \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon 3 liittyvät ominaisvektorit ja vektorit $s(0,0,1)^T$, $s \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon -4 liittyvät ominaisvektorit. Onko matriisi A diagonalisoituva? Jos A on diagonalisoituva, niin määrää matriisit A ja A^{12} matriisin A diagonalisoinnin avulla (muut tavat antavat 0 pistettä). Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei.
Ratk.
Selvästi A on 3×3 matriisi. Vektorijoukko $\{(-2,1,2)^T, (1,1,2)^T, (0,0,1)^T\}$ on vapaa, joten A:lla on 3 vapaata ominaisvektoria, joten A on diagonalisoituva. **(1p)**
Nyt $A = TDT^{-1}$, missä $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, ja $D = \mathrm{diag}(3, 3, -4)$.
Matriisi $T^{-1} = \cdots = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$. **(2p)**

$$A = TDT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{diag}(3,3,-4)\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & 4 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1p)}$$

$$A^{12} = TD^{12}T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{diag}(3^{12},3^{12},4^{12})\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{12} & 0 \\ 0 & 2\cdot 3^{12} - 2\cdot 4^{12} & 4^{12} \end{pmatrix}.$$

(2p)

3. Tarkastellaan ylideterminoitua yhtälöryhmää

$$\begin{cases} 2w & - & q & = 6 \\ 2q & + & 5w & = 2 \\ & & 3w & = -8 \\ q & - & 2w & = 4 \end{cases}.$$

a) Määrää yhtälöryhmän kerroinmatriisi A, kun yhtälöryhmä annetaan muodossa $A\vec{x} = \vec{b}$, missä $\vec{x} = (q,w)^T$. Laske kerroinmatriisille A normit $||A||_1$ ja $||A||_\infty$. (2p)
b) Määrää yhtälöryhmän pienimmän neliösumman ratkaisu (3p) ja määrää jäännösvektorin (eli residuaalivektorin) $\vec{r}$ normi $||\vec{r}||_{Fr}$. (1p)
Ratk. a) Yhtälöryhmä matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Kerroinmatriisi $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$||A||_1 = \max\{1+2+1, 2+5+3+2\} = \max\{4,12\} = 12$ (1p)
$||A||_\infty = \max\{1+2, 2+5, 0+3, 1+2\} = \max\{2,7,3,3\} = 7$ (1p)
b) PNS-ratkaisulle $\vec{x} = \begin{pmatrix} q \\ w \end{pmatrix}$ on voimassa:

$A^TA\vec{x} = A^T \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$, eli

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Siis $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$. **(2p)**
Yhtälöryhmän ratkaisu: $q = \frac{2}{3}$, ja $w = -\frac{1}{3}$. **(1p)**

Jäännösvektori $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{3} \\ \frac{7}{3} \\ -7 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

$||\vec{r}||_{Fr} = \sqrt{|\frac{22}{3}|^2 + |\frac{7}{3}|^2 + |-7|^2 + |\frac{8}{3}|^2} = \sqrt{\frac{346}{3}}$ **(1p)**

4. **a)** Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

itseisarvoltaan suurimmalle ominaisarvolle likiarvo iteratiivisesti lähtien vektorista $\vec{y}_0 = (1, -1, 1)^T$. Likiarvo $\lambda^{(1)}$ riittää. (4p)

b) Olkoon A $n \times n$ matriisi, $n \geq 2$, jonka ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tunnetaan. Määrää $\det A$. (1p)

c) Neliömatriisin B karakteristinen polynomi

$$p_B(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + 15.$$

Onko matriisilla B käänteismatriisia. Perustele vastauksesi! (1p)

Ratk. a) Nyt $\vec{y}_0 = (1, -1, 1)^T$. Silloin

$$\vec{y}_1 = A\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1p)}$$

$$\vec{y}_2 = A\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -29 \\ 57 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1p)}$$

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{\vec{y}_1^T \cdot \vec{y}_2}{\vec{y}_1^T \cdot \vec{y}_1} = \frac{(5,-5,9)(29,-29,57)^T}{(5,-5,9)(5,-5,9)^T} = \frac{803}{131} \approx 6,13. \qquad \textbf{(2p)}$$

b) Matriisin A karakteristinen polynomi

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Koska matriisin ominaisarvot ovat samalla kaikki karakteristisen polynomin nollakohdat, niin $p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$.

Silloin

$$\begin{aligned} \det A &= \det(A - 0I) &&= p_A(0) = (-1)^n(0 - \lambda_1)(0 - \lambda_2)\cdots(0 - \lambda_n) = (-1)^n(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \\ &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \end{aligned}. \qquad \textbf{(1p)}$$

c) $\det B = \det(B - 0I) = p_B(0) = (-1)^n \cdot 0 + b_{n-1} \cdot 0 + \cdots + b_1 \cdot 0 + 15 = 15$

Koska $\det B \neq 0$, niin B^{-1} on olemassa. **(1p)**