031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 13.12.2018 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. Tarkastellaan matriisia
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}.$$
a) Määrää matriisin A ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit. (4p)
b) Määrää matriisin A^{2019} ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit. (2p)

2. Vektorit $s(-2,1,2)^T + t(1,1,2)^T$, $s \neq 0$ tai $t \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon 3 liittyvät ominaisvektorit ja vektorit $s(0,0,1)^T$, $s \neq 0$, ovat matriisin A ominaisarvoon -4 liittyvät ominaisvektorit.
Onko matriisi A diagonalisoituva? Jos A on diagonalisoituva, niin määrää matriisit A ja A^{12} matriisin A diagonalisoinnin avulla (muut tavat antavat 0 pistettä). Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei.

3. Tarkastellaan ylideterminoitua yhtälöryhmää
$$\begin{cases} 2w & - & q & = 6 \\ 2q & + & 5w & = 2 \\ & & 3w & = -8 \\ q & - & 2w & = 4 \end{cases}.$$
a) Määrää yhtälöryhmän kerroinmatriisi A, kun yhtälöryhmä annetaan muodossa $A\vec{x} = \vec{b}$, missä $\vec{x} = (q, w)^T$. Laske kerroinmatriisille A normit $||A||_1$ ja $||A||_\infty$. (2p)
b) Määrää yhtälöryhmän pienimmän neliösumman ratkaisu (3p) ja määrää jäännösvektorin (eli residuaalivektorin) $\vec{r}$ normi $||\vec{r}||_{Fr}$. (1p)

4. a) Etsi matriisin
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$
itseisarvoltaan suurimmalle ominaisarvolle likiarvo iteratiivisesti lähtien vektorista $\vec{y}_0 = (1,-1,1)^T$. Likiarvo $\lambda^{(1)}$ riittää. (4p)
b) Olkoon A $n \times n$ matriisi, $n \geq 2$, jonka ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tunnetaan. Määrää $\det A$. (1p)
c) Neliömatriisin B karakteristinen polynomi
$$p_B(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + 15.$$
Onko matriisilla B käänteismatriisia. Perustele vastauksesi! (1p)

Kaavat

$$D = T^{-1}AT$$
$$\frac{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k^T \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$
$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$
$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$
$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$
$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$
$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$$
$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$
$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|},\ k = 2,3,\ldots,n,$$
$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T\vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T\vec{a}_k)\vec{q}_{k-1},\ k = 2,3,\ldots,n.$$