MATRIISIALGEBRA

1. Välikoe 15.11.2018 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Määrää yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x+3y+2w=1-z \\ 6y+2x+4z=3-8w \\ 2z+4w-1=0 \end{cases}$$

kerroinmatriisi ja laajennettu (=lisätty) kerroinmatriisi. Merkitse tarkasti kumpi on kumpi. (Yhtälöryhmää ei tarvitse ratkaista). (2p)

b) Diagonaalimatriisille $D = diag(1, 2^2, 3^3, 4^4, \ldots, 180^{180})$ on voimassa $D\vec{x} = (1, 1, 1, \ldots, 1)^T$. Määrää vektori $\vec{x}$. (2p)

c) Matriiseille A, B, C ja E on voimassa matriisiyhtälö $A^T B^T + C = E$, missä E on 400 rivinen neliömatriisi. Matriisissa B on 300 saraketta. Montako riviä ja saraketta (=pystyriviä) on matriisissa A? Perustele vastauksesi. (2p)

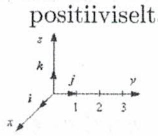
2.

a) Matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & 5 & -2 & -1 \\ -20 & 7 & -4 & -1 \\ -6 & 2 & -1 & 0 \\ 11 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ratkaise matriisin A käänteismatriisin avulla yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 2 \\ \quad - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

Huom. Muut ratkaisutavat kuin edellä mainittu antavat 0 pistettä! (2p)

b) Kuvankäsittelyssä kuvia muokataan käyttämällä lineaarisia muunnoksia, kuten esimerkiksi venytystä ja kiertoa. Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle E) matriisi, kun kuvaa aluksi venytetään i-akselin suunnassa 7 kertaiseksi, k-akselin suunnassa 5 kertaiseksi ja lopuksi kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran k-akselin ympäri vastapäivään (katsottuna k-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin). (4p)



3. Määrää matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ aste, nulliteetti, ydin, ytimen kanta, kuva-avaruus ja kuva-avaruuden kanta.
Merkitse vastaukseesi tarkasti, mikä on ydin, ytimen kanta, kuva-avaruus ja kuva-avaruuden kanta.

4. a) Matriisijoukko

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

on reaalisten 2×2 matriisien muodostaman vektoriavaruuden kanta. Matriisin A koordinaatit tässä kannassa ovat $3, 2, -1$ ja 4. Määrää matriisi A. (3p)

b) Olkoon $P_3(\mathbb{R})$ korkeintaan astetta 3 olevien polynomien muodostama vektoriavaruus. Virittävätkö polynomijoukot

$$\{2+3t+2t^2+t^3,\ 1+t-t^2+t^3\} \text{ ja } \{1+2t+3t^2+t^3,\ 5+8t+7t^2+t^3\}$$

saman vektoriavaruuden $P_3(\mathbb{R})$ aliavaruuden? Tarkka perustelu! (3p)

Kaavoja:

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \ k = 2, 3, \ldots, n,$$
$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^{\,T}\vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^{\,T}\vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, n.$$