031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 13.12.2017 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit. Jos matriisi A on diagonalisoituva, niin määrää matriisi A^{200} matriisin diagonalisoinnin avulla. Jos matriisi A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei.

2. 2×2 matriisin A ominaisarvoon -3 liittyy ominaisvektori $(1,-2)^T$ ja matriisin A ominaisarvoon -2 liittyy ominaisvektori $(1,3)^T$.

   a) Määrää vektori $A^{2412}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})$. (2p)

   b) Määrää matriisi A, jos se on näillä tiedoilla mahdollista. Jos näillä tiedoilla ei ole mahdollista määrätä matriisia A, niin perustele miksi ei. (4p)

3. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} -16 + 8x_3 = -4x_2 + 3x_1 \\ x_2 + 6x_1 - 10 = x_3 \\ -21 + x_1 = x_3 - 4x_2 \end{cases}.$$

   a) Ratkaise yhtälöryhmä järkevästi Gauss-Seidelin menetelmällä lähtien vektorista $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (1,1,1)$. Laske toinen iteraatio $\vec{x}^{(2)}$. (4p)

   b) Määrää yhtälöryhmälle Jacobin iteraatiomatriisi G ja laske iteraatiomatriisin G ∞-normi. (2p)

4. a) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Laske Cayley-Hamiltonin lauseen avulla A^5. (3p)

   b) $n \times n$ neliömatriisin $A = (a_{ij})$ **jälki** $tr(A)$ määritellään yhtälöllä

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   Olkoon A diagonalisoituva $n \times n$ neliömatriisi, jonka ominaisarvot ovat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Lausu $tr(A)$ A:n ominaisarvojen avulla. (3p)

   Aputulos: $tr(BC) = tr(CB)$ aina kun B ja C ovat $n \times n$ neliömatriiseja.

Kaavat

$$D = T^{-1}AT \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\frac{\vec{y}_k \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)} \qquad \|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

031078P MATRIX ALGEBRA

Test 2 13.12.2017 Reason your answers, thank you!

1. Find the eigenvalues and all eigenvectors of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

If the matrix A is diagonalizable, then determine the matrix A^{200}. If the matrix A is not a diagonalizable, then explain why not.

2. 2×2 matrix A has an eigenvector $(1, -2)^T$ corresponding the eigenvalue -3 and an eigenvector $(1, 3)^T$ corresponding the eigenvalue -2.

a) Determine the vector $A^{2412}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$. (2p)

b) Determine the matrix A, if it is possible. If not, then explain why not. (4p)

3. Consider the system

$$\begin{cases} -16 + 8x_3 = -4x_2 + 3x_1 \\ x_2 + 6x_1 - 10 = x_3 \\ -21 + x_1 = x_3 - 4x_2 \end{cases}$$

of equations.

a) Solve the system by using the Gauss-Seidel method. Choose $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (1, 1, 1)$ and calculate the iteration $\vec{x}^{(2)}$. (4p)

b) Determine the iteration matrix G of Jacob iterations of the system and find $||G||_\infty$. (2p)

4. a) Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

By Cayley-Hamilton theorem find A^5 . (3p)

b) If $A = (a_{ij})$ is an $n \times n$ square matrix , then

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

is the trace of A. Let A be diagonalizable $n \times n$ square matrix and let eigenvalues of A be $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Find $tr(A)$ by using eigenvalues of A. (3p)

Hint: $tr(BC) = tr(CB)$ for all $n \times n$ square matrices B and C.

Formulae:

$$D = T^{-1}AT \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\frac{\vec{y}_k \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)} \qquad \|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \; k = 2, 3, \ldots, n.$$