MATRIISIALGEBRA

1. Välikoe 16.11.2017 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

matriiseja, missä a, b, c, d, e ja f ovat reaalilukuja.
Tarkastellaan laskutoimituksia AB, $A^T B$ ja BA^T. Määrää kunkin laskutoimituksen tulos, jos kyseinen laskutoimitus on määritelty. Jos jokin laskutoimituksista ei ole määritelty, niin perustele miksi ei. (3p)

b) Matriiseista C, E ja H tiedetään, että tulomatriisit CE ja HC^T ovat samankokoisia matriiseja. Lisäksi matriisin C jokaisella rivillä on 40 lukua ja jokaisella pystyrivillä eli sarakkeella on 20 lukua. Montako riviä ja montako saraketta on sisältää matriisi E? Montako riviä ja montako saraketta sisältää matriisi H? (3p)

2. Olkoon matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & x \end{pmatrix}.$$

Määrää vaakarivimuunnoksin matriisin A käänteismatriisi, kun $x = \frac{1}{2}$. Millä x:n arvolla A:lla ei ole käänteismatriisia?

3. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta. Merkitse vastaukseesi tarkasti, mikä on ydin ja mikä on ytimen kanta.

4. a) Olkoon $P_n(\mathbb{R})$ korkeintaan astetta n olevien polynomien muodostama vektoriavaruus. Olkoon polynomin $p(t)$ derivaatta polynomi $p'(t)$. Määrää yhtälöllä

$$F(p(t)) = p'(t)$$

määritellyn lineaarikuvauksen $F : P_4(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ matriisi kantojen $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ ja $\{1, t, t^2, t^3\}$ suhteen. (3p)

b) Olkoon $\mathcal{M}_{n\times n}$ reaalisten $n \times n$ matriisien muodostama vektoriavaruus ja olkoon $\mathcal{D}_{n\times n}$ kaikkien reaalisten $n \times n$ diagonaalimatriisien joukko. Onko $\mathcal{D}_{n\times n}$ vektoriavaruuden $\mathcal{M}_{n\times n}$ aliavaruus? Jos on, niin todista, että kyseessä on aliavaruus. Jos ei ole, niin perustele miksi ei. (3p)

Kaavoja:

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$
$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, n.$$

MATRIX ALGEBRA

1. Test 16.11.2017 Reason your answers, thank you!

1. a) Let

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \text{ and } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

be matrices , where a, b, c, d, e and f are real numbers.
Consider the matrix products AB, A^TB and BA^T. For each matrix product determine whether or not the product is defined. If the product is defined, then find the result of the matrix product. If the product is not defined, then explain why not. (3p)

b) For the matrices C, E and H the matrix products CE and HC^T have the same size. Moreover every row of the matrix C has 40 numbers and every column of C has 20 numbers. What is the size of the matrix E? What is the size of the matrix H? (3p)

2. Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & x \end{pmatrix}.$$

By using elementary row operations, find the inverse matrix of A, when$x = \frac{1}{2}$. For what value of x the inverse of A does not exist?

3. Determine the rank, nullity, the kernel and the base of the kernel of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

4. a) Let $P_n(\mathbb{R})$ be the vector space of polynomials with real coefficient of degree less than or equal to n. Let $p'(t)$ be the derivative of the polynomial $p(t)$. Let $F : P_4(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ be the linear transformation defined by

$$F(p(t)) = p'(t).$$

Find the matrix A of the linear transformation F with respect to the basis $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ and $\{1, t, t^2, t^3\}$. (3p)

b) Let $\mathcal{M}_{n\times n}$ be a vector space of the real $n \times n$ matrices and let $\mathcal{D}_{n\times n}$ be the set of all $n \times n$ real diagonal matrices. Is $\mathcal{D}_{n\times n}$ a subspace of the vector space $\mathcal{M}_{n\times n}$? Reason your answer. (3p)

Formulae:

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \ k = 2, 3, \ldots, n,$$
$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T\vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T\vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, n.$$