031078P MATRIISIALGEBRA

Loppukoe 18.1.2017 LASKUT NÄKYVIIN!

1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Määrää A:n se LU-hajotelma, missä matriisin L diagonaalialkiot ovat ykkösiä. Ratkaise tämän LU-hajotelman avulla yhtälöryhmä $A\vec{x} = (4, 7, 20)^T$.

2. a) Vektorijoukko $S = \{(0,1,0,0), (1,0,1,0), (0,1,0,2), (1,0,2,0)\}$ on lineaarisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ kanta. Vektorin $\vec{u}$ koordinaatit kannassa S ovat $1, -2, 5$ ja 0. Määrää vektorin $\vec{u}$ koordinaatit luonnollisessa kannassa.

   b) Kuvankäsittelyssä kierto ja venytys ovat lineaarisia muunnoksia. Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle E) matriisi, kun kuvaa aluksi kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran k-akselin ympäri vastapäivään (katsottuna k-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin), sen jälkeen venytetään i-akselin suunnassa 3 kertaiseksi ja lopuksi venytetään j-akselin suunnassa 4 kertaiseksi.

3. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta.

4. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

   a) Määrää A:n ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit. (4p)

   b) Käyttämällä hyväksi matriisin A diagonalisointia määrää ainakin yksi matriisi B, joka toteuttaa ehdon $B^3 = A$. (2p)

Kaavoja:

$$D = T^{-1}AT \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\frac{\vec{y}_k \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)} \qquad \|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1} A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \ k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^{\,T} \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^{\,T} \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \ k = 2, 3, \ldots, n.$$