031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 15.12.2016 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit.

2. 3×3 matriisin A ominaisarvot ovat 1 ja 3. Vektori $\vec{u}_1 = (1,2,1)^T$ on matriisin A ominaisarvoon 1 liittyvä ominaisvektori ja vektorit $\vec{u}_2 = (-1,1,1)^T$ ja $\vec{u}_3 = (-1,4,1)^T$ ovat matriisin A ominaisarvoon 3 liittyviä ominaisvektoreita.
   a) Määrää vektori $A^{2000}\vec{u}_2$. (2p)
   b) Määrää matriisi A, jos se on näillä tiedoilla mahdollista. Jos näillä tiedoilla ei ole mahdollista määrätä matriisia A, niin perustele miksi ei. (4p)

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 3 \\ 5x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$$

järkevästi Jacobin, menetelmällä. Valitse $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$ ja laske toinen iteraatio $\vec{x}^{(2)}$.
Määrää Jacobin iteraatiomatriisi G ja vakiovektori $\vec{r}$ esityksessä $\vec{x}^{(k+1)} = G\vec{x}^{(k)} + \vec{r}$.

4. a) Määrää ylideterminoidun systeemin

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

pienimmän neliösumman ratkaisu. Määrää jäännösvektori $\vec{r}$ ja sen normi $\|\vec{r}\|_1$. (4p)

   b) Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

itseisarvoltaan suurimmalle ominaisarvolle likiarvo iteratiivisesti lähtien vektorista $\vec{y}_0 = (0,1)^T$. Likiarvo $\lambda_1^{(2)}$ riittää. (2p)

Kaavat

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\vec{y}_k \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \quad k = 2,3,\ldots,n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T\vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T\vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \quad k = 2,3,\ldots,n.$$

031078P MATRIISIALGEBRA

Test 2 15.12.2016 Reason your answers, thank you!

1. Find the eigenvalues and all eigenvectors of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. 3×3 matrix A has two different eigenvalues, 1 and 3. A vector $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)^T$ is an eigenvector of the matrix A corresponding to the eigenvalue 1 and vectors $\vec{u}_2 = (-1, 1, 1)^T$ and $\vec{u}_3 = (-1, 4, 1)^T$ are eigenvectors of the matrix A corresponding to the eigenvalue 3.
   a) Determine the vector $A^{2000}\vec{u}_2$. (2p)
   b) Determine the matrix A, if it is possible. If not, then explain why not. (4p)

3. Solve the system

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 3 \\ 5x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$$

by using the Jacobi method. Choose $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$ and calculate the iteration $\vec{x}^{(2)}$. Determine the iteration matrix G of Jacob iterations and the vector $\vec{r}$ from the vector equation $\vec{x}^{(k+1)} = G\vec{x}^{(k)} + \vec{r}$.

4. a) Find the least square solution for the overdetermined system

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 1 \end{cases}$$

Determine the residual vector $\vec{r}$ and the norm $\|\vec{r}\|_1$. (4p)

b) Let

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Find iteratively the estimation $\lambda^{(2)}$ for the strictly dominant eigenvalue of A (i.e the eigenvalue which has larger absolute value than all the other eigenvalues of A) by using the vector $\vec{y}_0 = (0, 1)^T$ as an initial vector. (2p)

Formulae:

$$D = T^{-1}AT \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\frac{\vec{y}_k \cdot \vec{y}_{k+1}}{\vec{y}_k \cdot \vec{y}_k} = \lambda_1^{(k)} \qquad \|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \quad \vec{q}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\vec{v}_k = \vec{a}_k - (\vec{q}_1^T \vec{a}_k)\vec{q}_1 - \cdots - (\vec{q}_{k-1}^T \vec{a}_k)\vec{q}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$