MATRIISIALGEBRA

1. Välikoe 17.11.2016 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Diagonaalimatriisille $D = \mathrm{diag}(1, 2, 3, \dots, 100)$ ja vektorille $\vec{x}$ on voimassa: $D\vec{x} = 5\vec{x}$. Montako riviä ja montako saraketta on vektorissa $\vec{x}$? (1p) Määrää ainakin yksi nollavektorista eroava vektori $\vec{x}$ joka toteuttaa yhtälön $D\vec{x} = 5\vec{x}$. (1p)

   b) Olkoon
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$
Määrää A:n se LU-hajotelma, missä matriisin L diagonaalialkiot ovat ykkösiä. Ratkaise tämän LU-hajotelman avulla yhtälöryhmä $A\vec{x} = (4, 7, 20)^T$. (4p)

2. Etsi matriisin
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$
käänteismatriisi. Käytä vaakarivimuunnoksia. Määrää käänteismatriisin avulla yhtälöryhmän
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = a \\ x_2 + 2x_3 = b \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = c \end{cases}$$
ratkaisu, kun $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3. a) Olkoon $P_n(\mathbb{R})$ korkeintaan astetta n olevien reaalikertoimisten polynomien joukko, eli $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n | a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$. Tarkastellaan polynomiavaruutta $P_3(\mathbb{R})$. Sen eräs kanta on polynomijoukko $S = \{t, 1 + t^2, t + 2t^3, 1 + 2t^2\}$. Polynomin $p(t)$ koordinaatit kannassa S ovat $2, -2, 5$ ja 0. Määrää polynomi $p(t)$. (2p)

   b) Kuvankäsittelyssä kuvia muokataan käyttämällä lineaarisia muunnoksia, kuten esimerkiksi venytystä ja kiertoa. Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle E) matriisi, kun kuvaa aluksi venytetään k-akselin suunnassa 25 kertaiseksi ja lopuksi kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran j-akselin ympäri myötäpäivään (katsottuna j-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin). (4p)

4. a) Määrää matriisin
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & -7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta. Merkitse vastaukseesi tarkasti, mikä on ydin ja mikä on ytimen kanta. (4p)

   b) Jos matriiseille A ja B on voimassa: $B = aI + bA + cA^2$ joillakin luvuilla a, b ja c, niin sanotaan, että matriisi B voidaan lausua matriisien I, A ja A^2 avulla. Lausu matriisi A^5 matriisien I, A ja A^2 avulla, kun reaalinen neliömatriisi A toteuttaa yhtälön $A^3 = -A^2 + A - I$. (2p)

Kaavoja:

$$\underline{q}_1 = \frac{\underline{a}_1}{\|\underline{a}_1\|}, \underline{q}_k = \frac{\underline{v}_k}{\|\underline{v}_k\|}, \; k = 2, 3, \dots, n,$$
$$\underline{v}_k = \underline{a}_k - (\underline{q}_1^T \underline{a}_k)\underline{q}_1 - \cdots - (\underline{q}_{k-1}^T \underline{a}_k)\underline{q}_{k-1}, \; k = 2, 3, \dots, n.$$

MATRIX ALGEBRA

1. Test 17.11.2016 Reason your answers, thank you!

1. a) For the diagonal matrix $D = \text{diag}(1, 2, 3, \ldots, 100)$ and a vector $\vec{x}$ we have $D\vec{x} = 5\vec{x}$. Determine the number of columns and the number of rows of the vector $\vec{x}$? (1p) Determine at least one vector $\vec{x}$ such that $\vec{x} \neq \vec{0}$ and $D\vec{x} = 5\vec{x}$. (1p)

   b) Let
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$
Determine the LU decomposition of the matrix such that every element of the main diagonal of L equals to 1. Use the LU-factorization to solve the following system of equations:
$$A\vec{x} = (4, 7, 20)^T.$$
(4p)

2. By using elementary row operations, find the inverse matrix of
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$
By using the inverse matrix solve the following system of equations
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = a \\ x_2 + 2x_3 = b \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = c \end{cases},$$
where $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3. a) Let $P_n(\mathbb{R})$ be the vector space of polynomials with real coefficient of degree less than or equal to n. In other words $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n | a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$. We consider a vector space $P_3(\mathbb{R})$. The polynomial set $S = \{t, 1 + t^2, t + 2t^3, 1 + 2t^2\}$ is a basis of $P_3(\mathbb{R})$. The coordinates of the polynomial $p(t)$ with respect to the basis S are $2, -2, 5$ ja 0. Determine the polynomial $p(t)$. (2p)

   b) In computer aided design (CAD) linear transformations such as stretching, and rotations are used. Determine the matrix of the linear transformation (from the basis $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ to the basis E) when an image first is streched 25-fold in the direction of the k-axis and then is rotated clockwise (viewed from the positive j-axis to the origin) about the j-axis by an amount of $\frac{\pi}{2}$ radians. (4p)

4. a) Determine the rank, nullity, the kernel and the base of the kernel of the matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & -7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
(4p)

   b) The matrix B has the representation by matrices I, A and A^2, if there exist the numbers a, b and c such that $B = aI + bA + cA^2$. Find the representation of A^5 by matrices I, A and A^2, when the real square matrix A satisfies the equation $A^3 = -A^2 + A - I$. (2p)

Formulae:

$$\underline{q}_1 = \frac{\underline{a}_1}{\|\underline{a}_1\|}, \underline{q}_k = \frac{\underline{v}_k}{\|\underline{v}_k\|}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$
$$\underline{v}_k = \underline{a}_k - (\underline{q}_1^T \underline{a}_k)\underline{q}_1 - \cdots - (\underline{q}_{k-1}^T \underline{a}_k)\underline{q}_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, n.$$