MATRIISIALGEBRA

1. Välikoe 17.11.2016 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Diagonaalimatriisille $D = \mathrm{diag}(1, 2, 3, \ldots, 100)$ ja vektorille $\vec{x}$ on voimassa: $D\vec{x} = 5\vec{x}$. Montako riviä ja montako saraketta on vektorissa $\vec{x}$? (1p) Määrää ainakin yksi nollavektorista eroava vektori $\vec{x}$ joka toteuttaa yhtälön $D\vec{x} = 5\vec{x}$. (1p)

   b) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Määrää A:n se LU-hajotelma, missä matriisin L diagonaalialkiot ovat ykkösiä. Ratkaise tämän LU-hajotelman avulla yhtälöryhmä $A\vec{x} = (4, 7, 20)^T$. (4p)

2. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisi. Käytä vaakarivimuunnoksia. Määrää käänteismatriisin avulla yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = a \\ x_2 + 2x_3 = b \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = c \end{cases}$$

ratkaisu, kun $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3. a) Olkoon $P_n(\mathbb{R})$ korkeintaan astetta n olevien reaalikertoimisten polynomien joukko, eli $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n | a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$. Tarkastellaan polynomiavaruutta $P_3(\mathbb{R})$. Sen eräs kanta on polynomijoukko $S = \{t, 1 + t^2, t + 2t^3, 1 + 2t^2\}$. Polynomin $p(t)$ koordinaatit kannassa S ovat $2, -2, 5$ ja 0. Määrää polynomi $p(t)$. (2p)

   b) Kuvankäsittelyssä kuvia muokataan käyttämällä lineaarisia muunnoksia, kuten esimerkiksi venytystä ja kiertoa. Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ kannalle E) matriisi, kun kuvaa aluksi venytetään k-akselin suunnassa 25 kertaiseksi ja lopuksi kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran j-akselin ympäri myötäpäivään (katsottuna j-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin). (4p)

4. a) Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta. Merkitse vastaukseesi tarkasti, mikä on ydin ja mikä on ytimen kanta. (4p)

   b) Jos matriiseille A ja B on voimassa: $B = aI + bA + cA^2$ joillakin luvuilla a, b ja c, niin sanotaan, että matriisi B voidaan lausua matriisien I, A ja A^2 avulla. Lausu matriisi A^5 matriisien I, A ja A^2 avulla, kun reaalinen neliömatriisi A toteuttaa yhtälön $A^3 = -A^2 + A - I$. (2p)

Kaavoja:

$$\underline{q}_1 = \frac{\underline{a}_1}{\|\underline{a}_1\|}, \underline{q}_k = \frac{\underline{v}_k}{\|\underline{v}_k\|}, \; k = 2, 3, \ldots, n,$$
$$\underline{v}_k = \underline{a}_k - (\underline{q}_1^T \underline{a}_k)\underline{q}_1 - \cdots - (\underline{q}_{k-1}^T \underline{a}_k)\underline{q}_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, n.$$