031078P MATRIISIALGEBRA

Loppukoe 27.9.2016 LASKUT NÄKYVIIN!

1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix}.$$

a) Määrää matriisin A LU-hajotelma. (3p)

b) Ratkaise kerroinmatriisin LU-hajotelman avulla yhtälöryhmät

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = \text{k} \\ 4x_1 + 18x_2 + 26x_3 = 0 \\ 3x_1 + 16x_2 + 30x_3 = \text{-k}, \end{cases}$$

kun $k = 1, 2, 3, \ldots, 155$. (3p)

2. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta.

3. Olkoon matriisi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Onko A diagonalisoituva? Jos A on diagonalisoituva, niin määrää matriisi A^{555} matriisin A diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei ole.

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

järkevästi Jacobin menetelmällä lähtien vektorista $\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$. Laske toinen iteraatio $\underline{x}^{(2)}$. Kirjoita järkevä iteraatiomatriisi G yllä olevalle yhtälöryhmälle sekä laske $||G||_\infty$.

Kaavoja:

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_{k+1}}{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$\underline{x}(t) = e^{tA}\underline{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\underline{q}_1 = \frac{\underline{a}_1}{\|\underline{a}_1\|}, \quad \underline{q}_k = \frac{\underline{v}_k}{\|\underline{v}_k\|}, \ k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\underline{v}_k = \underline{a}_k - (\underline{q}_1^T \underline{a}_k)\underline{q}_1 - \cdots - (\underline{q}_{k-1}^T \underline{a}_k)\underline{q}_{k-1}, \ k = 2, 3, \ldots, n.$$