031078P MATRIISIALGEBRA

Loppukoe 18.1.2016 LASKUT NÄKYVIIN!

1. Ratkaise Gaussin menetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} z - 2w = 1 \\ x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 5x + 10y - 8z + 11w = 12. \end{cases}$$

2. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta.

3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Määrää A:n ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit. (4p)

b) Käyttämällä hyväksi matriisin A diagonalisointia määrää ainakin yksi matriisi B, joka toteuttaa ehdon $B^{101} = A$. (2p)

4. a) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

järkevästi Jacobin menetelmällä lähtien vektorista $\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$. Laske toinen iteraatio $\underline{x}^{(2)}$. Kirjoita järkevä iteraatiomatriisi G yllä olevalle yhtälöryhmälle sekä laske $\|G\|_\infty$. (4p)

b) Olkoon A $n \times n$ matriisi, $n \geq 2$, jonka eräs ominaisarvo on 0. Osoita, että matriisin A nulliteetille $\dim N(A)$ on voimassa $\dim N(A) \geq 1$. (2p)

Kaavoja:

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_{k+1}}{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$\underline{x}(t) = e^{tA}\underline{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\underline{q}_1 = \frac{\underline{a}_1}{\|\underline{a}_1\|}, \quad \underline{q}_k = \frac{\underline{v}_k}{\|\underline{v}_k\|}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\underline{v}_k = \underline{a}_k - (\underline{q}_1^T \underline{a}_k)\underline{q}_1 - \cdots - (\underline{q}_{k-1}^T \underline{a}_k)\underline{q}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$