031078P MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 17.12.2015 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta.

2. Olkoon matriisi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Onko A diagonalisoituva? Jos A on diagonalisoituva, niin määrää matriisi A^{555} matriisin A diagonalisoinnin avulla. Jos A ei ole diagonalisoituva, niin perustele miksi ei ole.

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 & - & 3x_2 & + & 12x_3 & = & 31 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & = & 19 \end{cases}$$

järkevästi Jacobin menetelmällä lähtien vektorista $\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$. Laske toinen iteraatio $\underline{x}^{(2)}$. Määrää Jacobin iteraatioiden iteraatiomatriisi G ja laske $||G||_1$.

4. a) Määrää ylideterminoidun systeemin

$$\begin{cases} x_1 & - & 6x_2 & = -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & = 2 \\ x_1 & + & x_2 & = 1 \\ x_1 & + & 7x_2 & = 6 \end{cases}$$

pienimmän neliösumman ratkaisu. Laske jäännösvektorin $\underline{r}$ normi $||\underline{r}||_\infty$. (4p)

b) Olkoot A ja B $n \times n$ matriiseja, joille $B = T^{-1}AT$, missä T on säännöllinen $n \times n$ matriisi. Osoita, että A:n ja B:n ominaisarvot ovat samat. (2p)

Kaavat

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_{k+1}}{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$||A||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$||A||_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$||A||_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = ||A||\,||A^{-1}||$$

$$\underline{x}(t) = e^{tA}\underline{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\underline{q}_1 = \frac{\underline{a}_1}{||\underline{a}_1||}, \quad \underline{q}_k = \frac{\underline{v}_k}{||\underline{v}_k||}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\underline{v}_k = \underline{a}_k - (\underline{q}_1^T \underline{a}_k)\underline{q}_1 - \cdots - (\underline{q}_{k-1}^T \underline{a}_k)\underline{q}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$