MATRIISIALGEBRA

Välikoe 2 23.11.2013 VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -16 & 8 \\ -4 & -1 & -4 \\ -4 & 8 & -13 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit.

2. Kahden kilpailevan populaation S_1 ja S_2 yksilöiden lukumäärät $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ hetkellä t (t mitattu vuosina) toteuttavat differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

$e^{At} = T e^{DT} T^{-1}$

Ratkaise $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ käyttämällä hyväksi joko siirtomatriisia tai kerroinmatriisin diagonalisointia, kun alkuhetkellä $t = 0$ ensimmäisen populaation koko on 30 ja toisen 50.

3. Tarkastellaan ylideterminoitua systeemiä

$A^T A \quad (A^T A)^{-1} \cdot \underline{b}$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_2 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases}$$

a) Määrää systeemin kerroinmatriisi A ja laske sen normit $\|A\|_1$ ja $\|A\|_\infty$. (2p)

b) Laske systeemin pienimmän neliösumman ratkaisu. Laske jäännösvektorin $\underline{r}$ normi $\|\underline{r}\|_{Fr}$. (4p)

4. Arvioi Gershgorinin ympyröiden avulla matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1+j & 0 \\ 0 & 1 & 1-j \end{pmatrix}$$

ominaisarvojen sijaintia. Piirrä kuva ja määrää kuvan perusteella väli, johon A:n jokaisen ominaisarvon reaaliosa kuuluu sekä väli, johon A:n jokaisen ominaisarvon imaginaariosa kuuluu.

5. a) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Laske Cayley-Hamiltonin lauseen avulla A^{-1}. (2p)

b) Olkoon A $n \times n$ matriisi, jolla on n erisuurta ominaisarvoa. Osoita, että matriisin A determinantti on A:n ominaisarvojen tulo. (4p)

Kaavat

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_{k+1}}{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{Fr} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$\underline{x}(t) = e^{tA}\underline{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\underline{q}_1 = \frac{\underline{a}_1}{\|\underline{a}_1\|}, \quad \underline{q}_k = \frac{\underline{v}_k}{\|\underline{v}_k\|}, \; k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\underline{v}_k = \underline{a}_k - (\underline{q}_1^T \underline{a}_k)\underline{q}_1 - \cdots - (\underline{q}_{k-1}^T \underline{a}_k)\underline{q}_{k-1}, \; k = 2, 3, \ldots, n.$$