MATRIISIALGEBRA

Loppukoe 4.2.2012 LASKUT NÄKYVIIN!

1. Etsi vaakarivimuunnoksin matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisi, kun $x = 0$. Millä x:n arvolla A:lla ei ole käänteismatriisia?

2. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

aste, nulliteetti, ydin ja ytimen kanta,

3. a) Määrää lineaarikuvauksen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$,

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - 3x_3, x_1 - 2x_2 + x_3)$$

matriisi kantojen $\{(1,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}$ ja $\{(0,-1), (-1,1)\}$ suhteen.

b) Kuvankäsittelyssä kierto on lineaarinen muunnos. Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ kannalle E) matriisi, kun kuvaa aluksi kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran j-akselin ympäri vastapäivään (katsottuna j-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin) ja sitten kulman $\frac{\pi}{2}$ verran k-akselin ympäri vastapäivään (katsottuna k-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin).

4. Kahden kilpailevan populaation S_1 ja S_2 yksilöiden lukumäärät $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ hetkellä t (t mitattu vuosina) toteuttavat differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

Ratkaise $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ käyttämällä hyväksi joko siirtomatriisia tai kerroinmatriisin diagonalisointia, kun alkuhetkellä $t = 0$ ensimmäisen populaation koko on 30 ja toisen 50.

5. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Tutki onko A diagonalisoituva. Perustelu!

b) Laske Cayley-Hamiltonin lauseen avulla $sin(\frac{\pi}{2}A)$.

Kaavoja:

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_{k+1}}{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$\|A\|_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$\underline{x}(t) = e^{tA}\underline{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\underline{q}_1 = \frac{\underline{a}_1}{\|\underline{a}_1\|}, \quad \underline{q}_k = \frac{\underline{v}_k}{\|\underline{v}_k\|}, \; k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\underline{v}_k = \underline{a}_k - (\underline{q}_1^T \underline{a}_k)\underline{q}_1 - \cdots - (\underline{q}_{k-1}^T \underline{a}_k)\underline{q}_{k-1}, \; k = 2, 3, \ldots, n.$$