# MATRIISIALGEBRA

Loppukoe 14.12.2009 LASKUT NÄKYVIIN!

1. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 3 & -6 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

aste, nulliteetti, ydin, ytimen kanta, kuva-avaruus ja kuva-avaruuden kanta (1p kukin).

2. a) Kuvankäsittelyssä kierto ja venytys ovat lineaarisia muunnoksia. Muodosta muunnoksen (kannalta $E = \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ kannalle $E$) matriisi, kun kuvaa aluksi kierretään kulman $\frac{\pi}{2}$ verran $k$-akselin ympäri vastapäivään (katsottuna $k$-akselin positiiviselta puoliakselilta origoon päin), sen jälkeen venytetään $i$-akselin suunnassa 3 kertaiseksi ja lopuksi venytetään $j$-akselin suunnassa 4 kertaiseksi.

   b) Määrää lineaarikuvauksen $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $F(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2,\ 2x_1 + 4x_2,\ -x_1 + 3x_2)$ matriisi luonnollisten kantojen suhteen.

3. Ratkaise diffferentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_3'(t) = 2x_1(t) + 4x_3(t) \end{cases}$$

kerroinmatriisin diagonalisointia tai siirtomatriisia käyttäen.

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 19 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 31 \end{cases}$$

järkevästi Jacobin menetelmällä lähtien vektorista $\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$. Laske toinen iteraatio $\underline{x}^{(2)}$. Kirjoita Jacobin iterointikaavat ja iteraatiomatriisi $G$ yllä olevalle yhtälöryhmälle sekä laske $||G||_\infty$.

5. a) Reaalisen symmetrisen matriisin ominaisarvot ovat reaalisia. Osoita, että jos $\lambda$ on matriisin

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   ominaisarvo, niin $0 < \lambda < 4$.

   b) Osoita tulos: Jos matriisilla $A$ on erisuuret ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ja jos $\underline{x}_i$ on ominaisvektoria $\lambda_i$ vastaava ominaisvektori, aina kun $i = 1, 2, \ldots, r$, niin vektorijoukko $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_r\}$ on vapaa.

**Kaavoja:**

$$D = T^{-1}AT$$

$$\frac{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_{k+1}}{\underline{y}_k \cdot \underline{y}_k} = \lambda_1^{(k)}$$

$$||A||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$||A||_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda},$$

$$||A||_{F_r} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\kappa(A) = ||A||\,||A^{-1}||$$

$$\underline{x}(t) = e^{tA}\underline{x}_0$$

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_{n-1}A^{n-1}$$

$$\underline{q}_1 = \frac{\underline{a}_1}{||\underline{a}_1||}, \quad \underline{q}_k = \frac{\underline{v}_k}{||\underline{v}_k||}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\underline{v}_k = \underline{a}_k - (\underline{q}_1^T \underline{a}_k)\underline{q}_1 - \cdots - (\underline{q}_{k-1}^T \underline{a}_k)\underline{q}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$