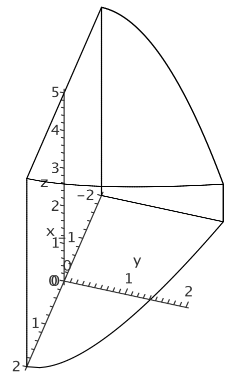
LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

Esimerkki 3.8.2.1. Laske sen kappaleen tilavuus, jota ylhäältä rajoittaa pinta $z = f(x, y) = 5 - y^2$, alhaalta taso $z = g(x, y) = 0$ sekä sivuilta pinta $y = \sqrt{2 - x}$ sekä tasot $y = 0$ ja $x = -2$. Piirrä kuva kappaleesta.
Ratkaisu:
Kappale voidaan kuvata seuraavasti:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{2 - x}, 0 \le z \le 5 - y^2\}.$$



Lasketaan kappaleen tilavuus:

$$\iiint\limits_V 1\, dV = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{2-x}} \int_{0}^{5-y^2} dz\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{2-x}} \Big(\Big/_{0}^{5-y^2} z \Big)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{2-x}} (5 - y^2)\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} \Big(\Big/_{0}^{\sqrt{2-x}} (5y - \frac{1}{3} y^3) \Big)\, dx$$

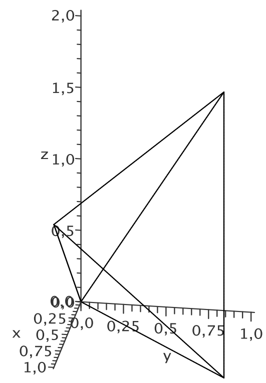
$$= \int_{-2}^{2} (5(2 - x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(2 - x)^{\frac{3}{2}})\, dx$$

$$= \Big/_{-2}^{2} (-\frac{10}{3}(2 - x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{15}(2 - x)^{\frac{5}{2}}) = \frac{112}{5} = 22\frac{2}{5}.$$

Esimerkki 3.8.2.2. Olkoon $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, x - y \le z \le x + y\}$ suljettu kappale. Piirrä kuva kappaleesta V ja laske

$$\iiint\limits_V (x + y - 2z)\, dV.$$

Ratkaisu:



$$\iiint\limits_V (x + y - 2z)\, dV = \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \int_{x-y}^{x+y} (x + y - 2z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \Big(\Big/_{x-y}^{x+y} [(x + y)z - z^2] \Big)\, dy\, dx$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} [(x + y)(x + y) - (x + y)^2 - (x + y)(x - y) + (x - y)^2]\, dy\, dx$$

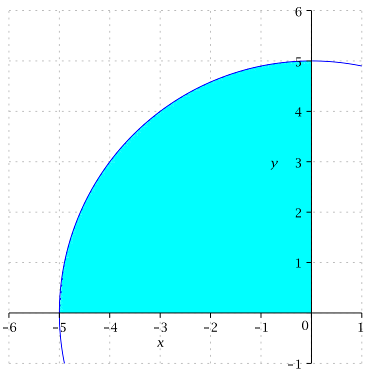
$$= \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} (2y^2 - 2xy)\, dy\, dx$$

$$= \int_{0}^{1} \Big/_{0}^{x} (\frac{2}{3} y^3 - xy^2)\, dx = -\int_{0}^{1} \frac{1}{3} x^3\, dx = -\frac{1}{12}.$$

Esimerkki 3.9.1.1. Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu käyrän $y = \sqrt{25 - x^2}$ sekä puolisuorien $y = 0$, $x \le 0$ ja $x = 0$, $y \ge 0$ leikatessa toisensa. Piirrä kuva tasoalueesta A ja laske napakoordinaattien avulla

$$\iint_A x\sqrt{x^2+y^2}e^{(x^2+y^2)^2}\,dA.$$

Ratkaisu:
Alue $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -5 \le x \le 0, 0 \le y \le \sqrt{25-x^2}\}$ voidaan kuvata napakoordinaattien avulla muodossa
$A' = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 5, \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi\}$.

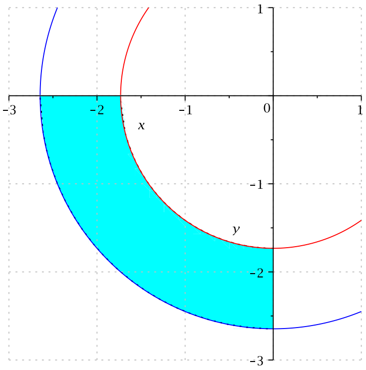


$$\begin{aligned}
&\iint_A x\sqrt{x^2+y^2}e^{(x^2+y^2)^2}\,dA \\
&= \int_{-5}^{0}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2}e^{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx \\
&= \iint_{A'} r\cos\varphi\, re^{(r^2)^2}r\,dr\,d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{5} r^3\cos\varphi\, e^{r^4}\,dr\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{4}\int_{0}^{5}\cos\varphi\, 4r^3e^{r^4}\,dr\,d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{4}\Big/_{0}^{5}\cos\varphi\, e^{r^4}\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{4}(e^{625}-1)\cos\varphi\,d\varphi \\
&= \Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{4}(e^{625}-1)\sin\varphi = \frac{1}{4}(1-e^{625})
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.9.1.2. Olkoon $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 3 \le x^2 + y^2 \le 7,\ x \le 0,\ y \le 0\}$ ympyrärenkaan osa. Piirrä kuva tasoalueesta A ja laske napakoordinaattien avulla

$$\iint\limits_A \frac{8}{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA.$$

Ratkaisu:
Ympyrärenkaan osa
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 3 \le x^2 + y^2 \le 7,\ x \le 0,\ y \le 0\}$
voidaan kuvata napakoordinaattien avulla muodossa
$A' = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{3} \le r \le \sqrt{7}, \pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}\}$.



$$\iint\limits_A \frac{8}{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

$$= \iint\limits_{A'} \frac{8}{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{8r}{4r^2 + 1}\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \Big/_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \ln\left|4r^2 + 1\right|\, d\varphi = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (\ln(29) - \ln(13))\, d\varphi$$

$$= \Big/_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \ln\frac{29}{13}\varphi = \frac{\pi}{2} \ln\frac{29}{13}.$$