LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

Esimerkki 3.6.2.1. Määrää Lagrangen menetelmällä funktion $f(x, y, z) = -3x + 12y + 24z$ suurin arvo lisäehdolla $x = y^2 + z^2$.
Ratkaisu:

$$\begin{cases} f(x,y,z) & = -3x + 12y + 24z \quad \text{maksimoitava funktio} \\ g(x,y,z) & = y^2 + z^2 - x = 0 \quad \text{lisäehto} \end{cases}$$

Lagrangen menetelmän käyttö johtaa yhtälöryhmään

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x & = -3 + \lambda(-1) & = 0, & \mid \cdot 2y \neq 0 & \mid \cdot 2z \neq 0 \\ f_y + \lambda g_y & = 12 + \lambda(2y) & = 0, & \mid \cdot 1 & \\ f_z + \lambda g_z & = 24 + \lambda(2z) & = 0, & & \mid \cdot 1 \\ & y^2 + z^2 - x & = 0. & & \end{cases}$$

Eliminoidaan λ kertomalla puolittain sopivasti ja laskemalla yhteen

$$\begin{cases} -6y + 12 & = 0, \\ -6z + 24 & = 0, \\ y^2 + z^2 - x & = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y & = 2, \\ z & = 4, \\ y^2 + z^2 - x & = 0. \end{cases}$$

Sijoitetaan alimpaan yhtälöön $y = 2$ ja $z = 4$. Tällöin $2^2 + 4^2 - x = 0$, josta $x = 20$. Siis funktion suurin arvo on $f(20, 2, 4) = -3 \cdot 20 + 12 \cdot 2 + 24 \cdot 4 = 60$.

Esimerkki 3.6.2.2. Olkoot $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ ja $d > 0$ reaalilukuja. Määrää Lagrangen menetelmällä kolmen muuttujan reaaliarvoisen funktion $f(x, y, z) = axy + bxz + cyz$ pienin arvo lisäehdolla $xyz = d$.
Ratkaisu:

$$\begin{cases} f(x,y,z) & = axy + bxz + cyz,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0 \quad \text{minimoitava funktio} \\ g(x,y,z) & = xyz - d = 0,\ d > 0 \quad \text{lisäehto} \end{cases}$$

Lagrangen menetelmän käyttö johtaa yhtälöryhmään

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x & = ay + bz + \lambda yz & = 0, & \mid \cdot x \neq 0 & \mid \cdot x \neq 0 \\ f_y + \lambda g_y & = ax + cz + \lambda xz & = 0, & \mid \cdot (-y) \neq 0 & \\ f_z + \lambda g_z & = bx + cy + \lambda xy & = 0, & & \mid \cdot (-z) \neq 0 \\ & xyz - d & = 0. & & \end{cases}$$

Eliminoidaan λ kertomalla puolittain sopivasti ja laskemalla yhteen

$$\begin{cases} z(bx - cy) & = 0, & \mid : z \neq 0 \\ y(ax - cz) & = 0, & \mid : y \neq 0 \\ xyz - d & = 0, & \end{cases} \qquad \begin{cases} y & = \frac{b}{c}x, \\ z & = \frac{a}{c}x, \\ xyz - d & = 0. \end{cases}$$

Sijoitetaan alimpaan yhtälöön $y = \frac{b}{c}x$ ja $z = \frac{a}{c}x$, jolloin saadaan $x\frac{b}{c}x\frac{a}{c}x - d = 0$. Tämän ratkaisu on $x = \sqrt[3]{\frac{c^2d}{ab}}$. Sijoittamalla edelleen saadaan $y = \frac{b}{c}\sqrt[3]{\frac{c^2d}{ab}}$ ja $z = \frac{a}{c}\sqrt[3]{\frac{c^2d}{ab}}$. Funktion pienin arvo on

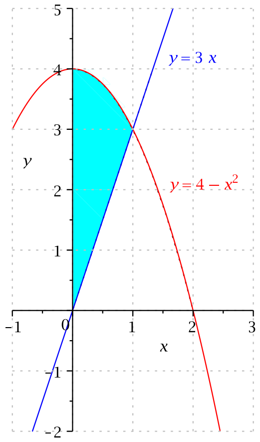
$$\begin{aligned} f\left(\sqrt[3]{\frac{c^2d}{ab}}, \frac{b}{c}\sqrt[3]{\frac{c^2d}{ab}}, \frac{a}{c}\sqrt[3]{\frac{c^2d}{ab}}\right) &= a\left(\sqrt[3]{\frac{c^2d}{ab}}\right)\left(\frac{b}{c}\sqrt[3]{\frac{c^2d}{ab}}\right) + b\left(\sqrt[3]{\frac{c^2d}{ab}}\right)\left(\frac{a}{c}\sqrt[3]{\frac{c^2d}{ab}}\right) + c\left(\frac{b}{c}\sqrt[3]{\frac{c^2d}{ab}}\right)\left(\frac{a}{c}\sqrt[3]{\frac{c^2d}{ab}}\right) \\ &= \left(\sqrt[3]{\frac{a^3c^2d}{ab}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{b^3c^2d}{c^3ab}}\right) + \left(\sqrt[3]{\frac{b^3c^2d}{ab}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{a^3c^2d}{c^3ab}}\right) + \left(\sqrt[3]{\frac{b^3c^2d}{ab}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{a^3c^2d}{c^3ab}}\right) \\ &= 3\sqrt[3]{abcd^2}. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.7.2.1. Piirrä kuvat tasoalueista, joiden yli integrointi suoritetaan, ja laske

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3x}^{4-x^2} 6x^2y\,dy\,dx,$ b) $\displaystyle\int_2^4 \int_{-\frac{1}{2}y}^{-1} \frac{32xy}{(4x^2+y^2+1)^2}\,dx\,dy.$

Ratkaisu:

a)



$$\int_0^1 \int_{3x}^{4-x^2} 6x^2y\,dy\,dx = \int_0^1 \Bigg(\bigg/_{3x}^{4-x^2} 3x^2y^2 \Bigg)\,dx$$

$$= \int_0^1 [3x^2(4-x^2)^2 - 3x^2(3x)^2]\,dx$$

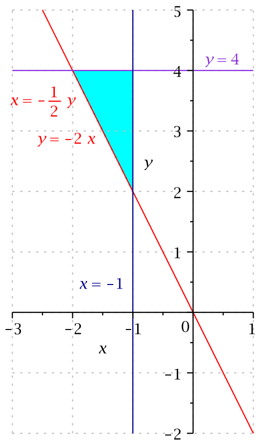
$$= \int_0^1 [3x^2(16-8x^2+x^4) - 3x^2 9x^2]\,dx$$

$$= \int_0^1 (48x^2 - 24x^4 + 3x^6 - 27x^4)\,dx$$

$$= \int_0^1 (3x^6 - 51x^4 + 48x^2)\,dx$$

$$= \bigg/_0^1 (\frac{3}{7}x^7 - \frac{51}{5}x^5 + 16x^3) = 6\frac{8}{35}$$

b)



$$\int_2^4 \int_{-\frac{1}{2}y}^{-1} \frac{32xy}{(4x^2+y^2+1)^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_2^4 \int_{-\frac{1}{2}y}^{-1} 32xy(4x^2+y^2+1)^{-2}\,dx\,dy$$

$$= \int_2^4 \Bigg(\bigg/_{-\frac{1}{2}y}^{-1} [-4y(4x^2+y^2+1)^{-1}] \Bigg)\,dy$$

$$= \int_2^4 [-4y(y^2+5)^{-1} + 4y(2y^2+1)^{-1}]\,dy$$

$$= \bigg/_2^4 [-2\ln(y^2+5) + \ln(2y^2+1)]\,dy$$

$$= -2\ln(21) + \ln(33) + 2\ln(9) - \ln(9) = \ln\frac{33}{49}$$

Esimerkki 3.7.2.2.
a) Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -3\sqrt{x} \leq y \leq 4\sqrt{x}\}$ xy-tason suljettu ja rajoitettu alue. Laske

$$\iint\limits_A 16xy^3 \, dA.$$

b) Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 3, -\frac{1}{2}\ln(y) \leq x \leq 0\}$ xy-tason suljettu ja rajoitettu alue. Laske

$$\iint\limits_A 24y^2 e^{-2x} \, dA.$$

Ratkaisu:

a)

$$\iint\limits_A 16xy^3 \, dA = \int_0^1 \int_{-3\sqrt{x}}^{4\sqrt{x}} 16xy^3 \, dy \, dx = \int_0^1 \left(\Big/_{-3\sqrt{x}}^{4\sqrt{x}} 4xy^4 \right) dx = \int_0^1 [4x(4\sqrt{x})^4 - 4x(-3\sqrt{x})^4] \, dx$$

$$= \int_0^1 (1024x^3 - 324x^3) \, dx = \int_0^1 700x^3 \, dx = \Big/_0^1 175x^4 = 175$$

b)

$$\iint\limits_A 24y^2 e^{-2x} \, dA = \int_1^3 \int_{-\frac{1}{2}\ln(y)}^{0} 24y^2 e^{-2x} \, dx \, dy = \int_1^3 \left(\Big/_{-\frac{1}{2}\ln(y)}^{0} (-12)y^2 e^{-2x} \right) dy$$

$$= \int_1^3 (-12y^2 + 12y^2 e^{\ln(y)}) \, dy = \int_1^3 (-12y^2 + 12y^3) \, dy = \Big/_1^3 (-4y^3 + 3y^4) = 136$$

Esimerkki 3.7.2.3. Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $y = -x$ ja $y = 1$ sekä käyrän $y = \sqrt{x}$ leikatessa toisensa. Piirrä kuva tasoalueesta A ja laske

$$\iint\limits_A 24x^2y\,dA.$$

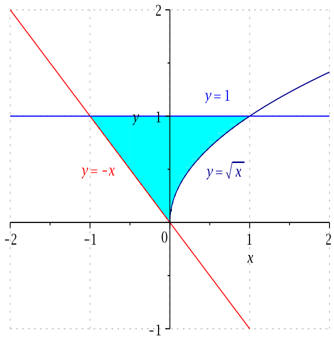
Ratkaisu:

$$\iint\limits_A 24x^2y\,dA = \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-x}^{1} 24x^2y\,dy\,dx + \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{\sqrt{x}}^{1} 24x^2y\,dy\,dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{0}\left(\bigg/_{\!-x}^{\,1} 12x^2y^2\right)dx + \int\limits_{0}^{1}\left(\bigg/_{\!\sqrt{x}}^{\,1} 12x^2y^2\right)dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} 12x^2(1^2 - (-x)^2)\,dx + \int\limits_{0}^{1} 12x^2(1^2 - (\sqrt{x})^2)\,dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{0}(12x^2 - 12x^4)\,dx + \int\limits_{0}^{1}(12x^2 - 12x^3)\,dx = 2\frac{3}{5}$$

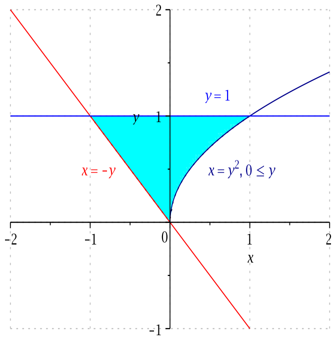


TAI

$$\iint\limits_A 24x^2y\,dA = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-y}^{y^2} 24x^2y\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_{0}^{1}\left(\bigg/_{\!-y}^{\,y^2} 8x^3y\right)dy = \int\limits_{0}^{1} 8y[(y^2)^3 - (-y)^3]\,dy$$

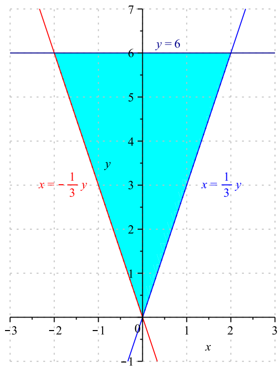
$$= \int\limits_{0}^{1}(8y^7 + 8y^4)\,dy = \bigg/_{\!0}^{\,1}(y^8 + \frac{8}{5}y^5) = 2\frac{3}{5}$$



Esimerkki 3.7.2.4. Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $y = 3x$, $y = -3x$ ja $y = 6$ leikatessa toisensa. Piirrä kuva tasoalueesta A ja laske

$$\iint_A \frac{3}{y^2+1}\, dA.$$

Ratkaisu:

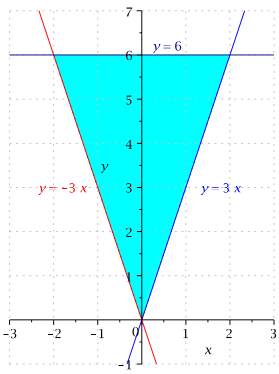


$$\iint_A \frac{3}{y^2+1}\, dA = \int_0^6 \int_{-\frac{1}{3}y}^{\frac{1}{3}y} \frac{3}{y^2+1}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^6 \Big/_{-\frac{1}{3}y}^{\frac{1}{3}y} \frac{3x}{y^2+1}\, dy = \int_0^6 \frac{2y}{y^2+1}\, dy$$

$$= \Big/_0^6 \ln(y^2+1) = \ln(37)$$

TAI



$$\iint_A \frac{3}{y^2+1}\, dA$$

$$= \int_{-2}^{0} \int_{-3x}^{6} \frac{3}{y^2+1}\, dy\, dx + \int_0^2 \int_{3x}^{6} \frac{3}{y^2+1}\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{0} \Big/_{-3x}^{6} 3\overline{\text{arc}}\tan y\, dx + \int_0^2 \Big/_{3x}^{6} 3\overline{\text{arc}}\tan y\, dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (3\overline{\text{arc}}\tan 6 + 3\overline{\text{arc}}\tan(3x))\, dx$$

$$+ \int_0^2 (3\overline{\text{arc}}\tan 6 - 3\overline{\text{arc}}\tan(3x))\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 3\overline{\text{arc}}\tan 6\, dx + \int_{-2}^{0} 3\overline{\text{arc}}\tan(3x)\, dx$$

$$- \int_0^2 3\overline{\text{arc}}\tan(3x)\, dx$$

$$\overset{\text{os.int.}}{=} 12\overline{\text{arc}}\tan 6 + \Big/_{-2}^{0} 3x\overline{\text{arc}}\tan(3x) - \Big/_0^2 3x\overline{\text{arc}}\tan(3x)$$

$$- \int_{-2}^{0} \frac{9x}{9x^2+1}\, dx + \int_0^2 \frac{9x}{9x^2+1}\, dx$$

$$= 12\overline{\text{arc}}\tan 6 + 6\overline{\text{arc}}\tan(-6) - 6\overline{\text{arc}}\tan(6)$$

$$- \Big/_{-2}^{0} \frac{1}{2}\ln(9x^2+1) + \Big/_0^2 \frac{1}{2}\ln(9x^2+1) = \ln(37)$$

Esimerkki 3.7.3.1. Laske integrointijärjestystä vaihtamalla

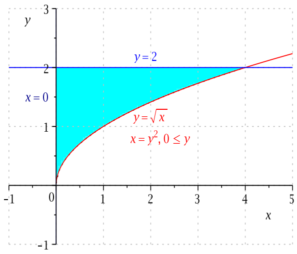
$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 21x^2\sqrt{1+y^7}\,dy\,dx.$$

Piirrä kuva tasoalueesta, jonka yli integrointi suoritetaan.
Ratkaisu:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 21x^2\sqrt{1+y^7}\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} 21x^2\sqrt{1+y^7}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left(\Big/_{0}^{y^2} 7x^3(1+y^7)^{\frac{1}{2}} \right) dy = \int_0^2 7y^6(1+y^7)^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \Big/_{0}^{2} \frac{2}{3}(1+y^7)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(129\sqrt{129}-1)$$



Esimerkki 3.7.3.2. Laske integrointijärjestystä vaihtamalla

$$\int_0^2 \int_{3y}^6 \frac{18y}{x^3+100}\,dx\,dy.$$

Piirrä kuva tasoalueesta, jonka yli integrointi suoritetaan.
Ratkaisu:

$$\int_0^2 \int_{3y}^6 \frac{18y}{x^3+100}\,dx\,dy = \int_0^6 \int_0^{\frac{1}{3}x} \frac{18y}{x^3+100}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^6 \left(\Big/_{0}^{\frac{1}{3}x} \frac{9y^2}{x^3+100} \right) dx = \int_0^6 \frac{x^2}{x^3+100}\,dx$$

$$= \Big/_{0}^{6} \frac{1}{3}\ln|x^3+100| = \frac{1}{3}(\ln 316 - \ln 100)$$

$$= \frac{1}{3}\ln\frac{79}{25}$$