LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

Esimerkki 3.5.1. Olkoon $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $x = x(t) = t\cos(t)$ ja $y = y(t) = t\sin(t)$. Olkoon edelleen $z(t) = f(x(t), y(t))$ yhdistetty funktio. Käytä ketjusääntöä ja esitä derivaatta $\frac{dz}{dt}$ muuttujan t avulla.
Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= (2x-3y)(\cos(t) - t\sin(t)) + (-3x+2y)(\sin(t) + t\cos(t)) \\
&= (2t\cos(t) - 3t\sin(t))(\cos(t) - t\sin(t)) + (-3t\cos(t) + 2t\sin(t))(\sin(t) + t\cos(t)) \\
&= 2t\cos^2(t) - 2t^2\cos(t)\sin(t) - 3t\sin(t)\cos(t) + 3t^2\sin^2(t) \\
&\quad - 3t\cos(t)\sin(t) - 3t^2\cos^2(t) + 2t\sin^2(t) + 2t^2\sin(t)\cos(t) \\
&= 2t(\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1}) - 6t\cos(t)\sin(t) + 3t^2(\underbrace{-\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1-2\cos^2(t)}) \\
&= -6t\cos(t)\sin(t) - 6t^2\cos^2(t) + 3t^2 + 2t
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.5.2. Kappale liikkuu xy-koordinaatistossa käyrää $\vec{x}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} = t\vec{\imath} + 3t^2\vec{\jmath}$ pitkin, missä $t \geq 0$ kuvaa aikaa sekunneissa ja x- ja y- koordinaattien yksikkö on cm. Kappaleen lämpötila (°C) pisteessä $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on $T(x,y) = 10e^{2x^2+7x-3y}$. Muodostetaan yhdistetty funktio $z(t) = T(x(t), y(t))$.

a) Laske ketjusäännön avulla kappaleen lämpötilan muutosnopeus (°C/s) hetkellä $t > 0$. Päättele lämpötilan muutosnopeuden perusteella, milloin kappale lämpenee ja milloin jäähtyy.

b) Millä ajan t hetkellä kappaleen lämpötila on suurin?

c) Missä tason $\mathbb{R}^2$ pisteessä kappale tällöin on?

d) Mikä on kappaleen suurin lämpötila?

Ratkaisu:

a) Ketjusäännöllä saadaan kappaleen lämpötilan muutosnopeus hetkellä $t > 0$, $[\vec{x}'(t) = (1, 6t)]$:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= 10(4x+7)e^{2x^2+7x-3y}\ 1 - 30e^{2x^2+7x-3y}\ 6t \\
&= 10(4t+7)e^{2t^2+7t-9t^2}\ 1 - 30e^{2t^2+7t-9t^2}\ 6t \\
&= 70(-2t+1)e^{-7t^2+7t},\ t > 0,
\end{aligned}$$

joten kappale lämpenee ($\frac{dz}{dt} > 0$), kun 0 s < t < 0.5 s, ja kappale jäähtyy ($\frac{dz}{dt} < 0$), kun $t > 0.5$ s.

b) Kappaleen lämpötila on suurin hetkellä $t = 0.5$ s.

c) Kappale on pisteessä $\vec{x}(0.5\text{ s}) = (0.5\text{ cm}, 3 \cdot 0.5^2\text{ cm}) = (0.5\text{ cm}, 0.75\text{ cm})$.

d) Kappaleen suurin lämpötila $T(0.5\text{ cm}, 0.75\text{ cm}) = 10\mathrm{e}^{2\cdot 0.5^2+7\cdot 0.5-3\cdot 0.75}\ {}^\circ\mathrm{C} = 10\mathrm{e}^{1.75}\ {}^\circ\mathrm{C}$

Esimerkki 3.5.3. Olkoon $f(x,y) = 3x^2y - y^2$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $x = x(s,t) = te^{2s}$, $y = y(s,t) = te^{-2s}$. Olkoon edelleen $z(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ yhdistetty funktio. Käytä ketjusääntöä ja esitä osittaisderivaatat z_s ja z_t muuttujien s ja t avulla.
Ratkaisu:

$$\begin{aligned} z_s &= f_x x_s + f_y y_s \\ &= (6xy)(2te^{2s}) + (3x^2 - 2y)(-2te^{-2s}) = 6te^{2s}te^{-2s}2te^{2s} + (3(te^{2s})^2 - 2te^{-2s})(-2)te^{-2s} \\ &= 12t^3e^{2s} + (3t^2e^{4s} - 2te^{-2s})(-2)te^{-2s} = 12t^3e^{2s} - 6t^3e^{2s} + 4t^2e^{-4s} = 6t^3e^{2s} + 4t^2e^{-4s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_t &= f_x x_t + f_y y_t \\ &= (6xy)(e^{2s}) + (3x^2 - 2y)(e^{-2s}) = 6te^{2s}te^{-2s}e^{2s} + (3(te^{2s})^2 - 2te^{-2s})e^{-2s} \\ &= 6t^2e^{2s} + (3t^2e^{4s} - 2te^{-2s})e^{-2s} = 6t^2e^{2s} + 3t^2e^{2s} - 2te^{-4s} = 9t^2e^{2s} - 2te^{-4s} \end{aligned}$$

Esimerkki 3.5.4. Olkoon funktio $z = f(x,y)$ differentioituva sekä $x = x(u,v) = u\cos\alpha - v\sin\alpha$, $y = y(u,v) = u\sin\alpha + v\cos\alpha$, missä α on vakio. Olkoon edelleen $z(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ yhdistetty funktio. Osoita ketjusäännön avulla, että $f_x^2 + f_y^2 = z_u^2 + z_v^2$.
Ratkaisu: Koska

$$z_u = f_x x_u + f_y y_u = f_x\,\cos\alpha + f_y\,\sin\alpha \text{ ja } z_v = f_x x_v + f_y y_v = f_x\,(-\sin\alpha) + f_y\,\cos\alpha,$$

niin

$$\begin{aligned} z_u^2 + z_v^2 &= (f_x\,\cos\alpha + f_y\,\sin\alpha)^2 + (-f_x\,\sin\alpha + f_y\,\cos\alpha)^2 \\ &= f_x^2\,\cos^2\alpha + 2f_xf_y\cos\alpha\sin\alpha + f_y^2\,\sin^2\alpha + f_x^2\,\sin^2\alpha - 2f_xf_y\sin\alpha\cos\alpha + f_y^2\,\cos^2\alpha \\ &= (f_x^2 + f_y^2)(\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{=1}) = f_x^2 + f_y^2. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.6.1.1. Määrää funktion

a) $f(x,y) = x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y,$ b) $g(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} - 4x + y$

kaikkien kriittisten pisteiden laatu.
Ratkaisu:

a) Kriittiset pisteet ovat gradientin nollakohtia:

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= 2y(x-1) = 0, \qquad\qquad y = 0 \text{ tai } x = 1, \\ f_y(x,y) &= x^2 - 2x + 4y - 15 = 0. \end{cases}$$

Sijoitetaan 2. yhtälöön $y = 0$: $x^2 - 2x - 15 = 0$ $\quad x = -3$ tai $x = 5$.
Sijoitetaan 2. yhtälöön $x = 1$: $1 - 2 + 4y - 15 = 0$ $\quad y = 4$.
Kriittiset pisteet ovat $(x,y) = (-3,0)$, $(x,y) = (5,0)$ ja $(x,y) = (1,4)$.
Kriittisen pisteen (x_0,y_0) laatu määrätään laskemalla lausekkeet

$$f_{xx}(x_0,y_0),\ D(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2.$$

Lasketaan toiset osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2y, \\ f_{yy}(x,y) &= 4, \\ f_{xy}(x,y) &= 2x - 2. \end{aligned}$$

Nyt $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = 8y - (2x-2)^2$.
Piste $(-3,0)$ on satulapiste, sillä $D(-3,0) = -64 < 0$.
Piste $(5,0)$ on satulapiste, sillä $D(5,0) = -64 < 0$.
Piste $(1,4)$ on paikallinen minimipiste, sillä $D(1,4) = 32 > 0$ ja $f_{xx}(1,4) = 8 > 0$.

b) Kriittiset pisteet ovat gradientin nollakohtia:

$$\begin{cases} g_x(x,y) &= x^{-2} - 4 = 0, \\ g_y(x,y) &= -y^{-2} + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &x = -\tfrac{1}{2} \text{ tai } x = +\tfrac{1}{2}, \\ &y = -1 \text{ tai } y = +1. \end{aligned}$$

Kriittiset pisteet ovat $(x,y) = (-\frac{1}{2}, 1)$, $(x,y) = (\frac{1}{2}, 1)$, $(x,y) = (-\frac{1}{2}, -1)$ ja $(x,y) = (\frac{1}{2}, -1)$.
Lasketaan toiset osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} g_{xx}(x,y) &= -2x^{-3}, \\ g_{yy}(x,y) &= 2y^{-3}, \\ g_{xy}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Nyt $D(x,y) = g_{xx}(x,y)g_{yy}(x,y) - (g_{xy}(x,y))^2 = -4(xy)^{-3} - 0^2 = -4(xy)^{-3}$.
Piste $(-\frac{1}{2}, 1)$ on paikallinen minimipiste, sillä $D(-\frac{1}{2}, 1) = 32 > 0$ ja $g_{xx}(-\frac{1}{2}, 1) = 16 > 0$.
Pisteet $(\frac{1}{2}, 1)$ ja $(-\frac{1}{2}, -1)$ ovat satulapisteitä, sillä $D(\frac{1}{2}, 1) = -32 < 0$ ja $D(-\frac{1}{2}, -1) = -32 < 0$.
Piste $(\frac{1}{2}, -1)$ on paikallinen maksimipiste, sillä $D(\frac{1}{2}, -1) = 32 > 0$ ja $g_{xx}(\frac{1}{2}, -1) = -16 < 0$.

Esimerkki 3.6.1.2. Olkoon $a < 0$ reaaliluku. Olkoon edelleen $f(x,y) = 2ax^2 - 2axy + y^3 + a^2 - 10$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio. Määrää funktion kaikki kriittiset pisteet sekä tutki perustellen niiden laatu.
Ratkaisu: Kriittiset pisteet ovat gradientin nollakohtia:

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= 4ax - 2ay &= 0, & | \cdot 1 \\ f_y(x,y) &= -2ax + 3y^2 &= 0. & | \cdot 2 \end{cases}$$

Eliminoidaan x kertomalla puolittain sopivasti ja laskemalla yhteen

$$\begin{cases} 4ax - 2ay &= 0, \\ 2y(3y - a) &= 0 \end{cases} \qquad y = 0 \text{ tai } y = \tfrac{a}{3}.$$

Sijoitetaan 1. yhtälöön $y = 0$: $4ax = 0$ $\quad x = 0$.
Sijoitetaan 1. yhtälöön $y = \frac{a}{3}$: $4ax - \frac{2a^2}{3} = 0$ $\quad x = \frac{a}{6}$.
Kriittiset pisteet ovat $(x,y) = (0,0)$ ja $(x,y) = (\frac{a}{6}, \frac{a}{3})$.
Lasketaan toiset osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 4a, \\ f_{yy}(x,y) &= 6y, \\ f_{xy}(x,y) &= -2a. \end{aligned}$$

Nyt $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = 24ay - 4a^2$.
Piste $(0,0)$ on satulapiste, sillä $D(0,0) = -4a^2 < 0$.
Piste $(\frac{a}{6}, \frac{a}{3})$ on paikallinen maksimipiste, sillä $D(\frac{a}{6}, \frac{a}{3}) = 4a^2 > 0$ ja $f_{xx}(\frac{a}{6}, \frac{a}{3}) = 4\underbrace{a}_{<0} < 0$.