LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

Esimerkki 3.4.1. Laske määritelmän avulla funktion $f(x, y) = 3x^2y$ suunnattu derivaatta pisteessä (x_0, y_0) suuntaan $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.
Ratkaisu: Koska $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, niin

$$\vec{u}^0 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (u_1^0, u_2^0).$$

Määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
\nabla_{\vec{u}^0} f(x_0, y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tu_1^0, y_0 + tu_2^0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{3(x_0 + tu_1^0)^2(y_0 + tu_2^0) - 3x_0^2y_0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{[3x_0^2 + 6tx_0u_1^0 + 3t^2(u_1^0)^2](y_0 + tu_2^0) - 3x_0^2y_0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{3x_0^2y_0 + 6tx_0u_1^0y_0 + 3t^2(u_1^0)^2y_0 + 3x_0^2tu_2^0 + 6t^2x_0u_1^0u_2^0 + 3t^3(u_1^0)^2u_2^0 - 3x_0^2y_0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}(6x_0u_1^0y_0 + 3t(u_1^0)^2y_0 + 3x_0^2u_2^0 + 6tx_0u_1^0u_2^0 + 3t^2(u_1^0)^2u_2^0) \\
&= 6x_0y_0u_1^0 + 3x_0^2u_2^0 \\
&= \frac{6x_0y_0}{\sqrt{2}} - \frac{3x_0^2}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}x_0}{2}(-x_0 + 2y_0).
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.4.2. Olkoon $f(x, y) = y^3 + xe^{3x-4y^2}$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ suuntavektori. a) Laske gradientti $\nabla f(x, y)$. b) Laske suunnattu derivaatta $\nabla_{\vec{u}^0} f(\ln 2, 0)$.
Ratkaisu:
a)

$$\begin{aligned}
\nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\vec{\imath} + f_y(x, y)\vec{\jmath} = (e^{3x-4y^2} + 3xe^{3x-4y^2})\vec{\imath} + (3y^2 - 8xye^{3x-4y^2})\vec{\jmath} \\
&= e^{3x-4y^2}(1 + 3x)\vec{\imath} + y(3y - 8xe^{3x-4y^2})\vec{\jmath} = (e^{3x-4y^2}(1 + 3x), y(3y - 8xe^{3x-4y^2}))
\end{aligned}$$

b)
Koska

$$\vec{u}^0 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(3, -4)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$$

ja

$$\nabla f(\ln 2, 0) = e^{3\ln 2 - 0}(1 + 3\ln 2)\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} = e^{\ln 2^3}(1 + 3\ln 2)\vec{\imath} = (8 + 24\ln 2)\vec{\imath} = (8 + 24\ln 2, 0),$$

niin

$$\nabla_{\vec{u}^0} f(\ln 2, 0) = \nabla f(\ln 2, 0) \cdot \vec{u}^0 = (8 + 24\ln 2, 0) \cdot (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = \frac{24 + 72\ln 2}{5} = \frac{24}{5}(1 + \ln 8).$$

Esimerkki 3.4.3. Mihin suuntaan pisteessä $(-2, 1)$ funktion $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ arvot a) kasvavat voimakkaimmin, b) vähenevät voimakkaimmin, c) muuttuvat vähiten?

Ratkaisu:

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\vec{\imath} + f_y(x, y)\vec{\jmath} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}\vec{\imath} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\vec{\jmath}$$

a)

Funktion f arvot kasvavat voimakkaimmin pisteessä $(-2, 1)$ suuntaan

$$\nabla f(-2, 1) = \frac{2(-2)}{(-2)^2 + 1^2 + 1}\vec{\imath} + \frac{2(+1)}{(-2)^2 + 1^2 + 1}\vec{\jmath} = \frac{1}{3}(-2\vec{\imath} + \vec{\jmath}),$$

ts. suunta on $-2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

b)

Funktion f arvot vähenevät voimakkaimmin pisteessä $(-2, 1)$ suuntaan

$$-\nabla f(-2, 1) = -\frac{1}{3}(-2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = \frac{1}{3}(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}),$$

ts. suunta on $2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

c)

Funktion f arvot muuttuvat vähiten pisteessä $(-2, 1)$ suuntaan $\vec{\alpha} = \alpha_1\vec{\imath} + \alpha_2\vec{\jmath}$, jolle $\vec{\alpha} \cdot \nabla f(-2, 1) = 0$. Tällöin

$$(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \frac{1}{3}(-2, 1) = 0, -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_2 = 2\alpha_1,$$

joten

$$\vec{\alpha} = \alpha_1\vec{\imath} + 2\alpha_1\vec{\jmath} = \alpha_1(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}),\ \alpha_1 \in \mathbb{R},\ \alpha_1 \neq 0.$$

Suunta on $\pm(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$.