LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

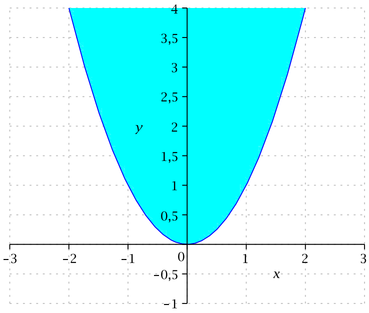
<u>*Esimerkki 3.2.1.*</u> Määrää seuraavien funktioiden määritysjoukot ja piirrä ne xy - tai xyz-koordinaatistoon:

a) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$, b) $f(x,y) = \ln(\ln(5 - x^2 - y^2))$,

c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$, d) $f(x,y,z) = \dfrac{y}{(z+2)(1 - x^2 - z^2)}$.

<u>*Ratkaisu:*</u>

a) Määritysjoukko M_f määräytyy ehdosta $y - x^2 \geq 0$, josta seuraa $M_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \}$.

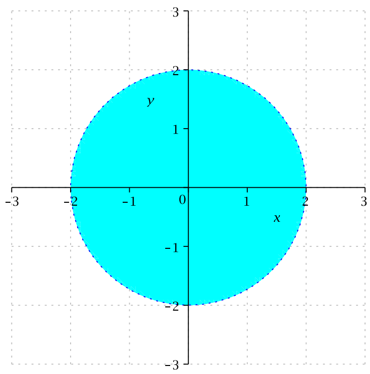


b) Nyt on oltava voimassa yhtäaikaisesti

$$\begin{cases} 5 - x^2 - y^2 > 0, \\ \ln(5 - x^2 - y^2) > 0. \end{cases}$$

Siis

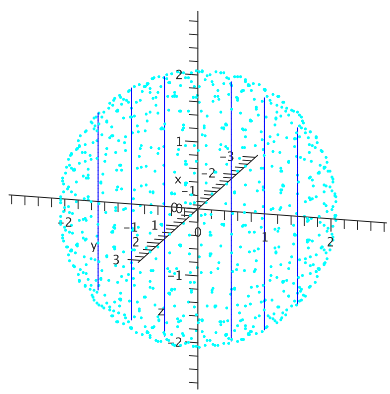
$$\begin{aligned} M_f &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 5 \text{ ja } 5 - x^2 - y^2 > 1 \} \\ &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2^2 \}. \end{aligned}$$



c) Määritysjoukossa on oltava voimassa

$$\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, \\ \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} \neq 0. \end{cases}$$

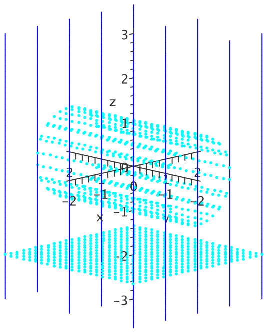
Siis $M_f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 2^2 \}$.



d) Nyt määritysjoukossa on oltava voimassa yhtäaikaisesti

$$\begin{cases} z+2 \neq 0, \\ 1-x^2-z^2 \neq 0. \end{cases}$$

Siis $M_f = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq -2 \text{ ja } x^2+z^2 \neq 1 \,\}$.

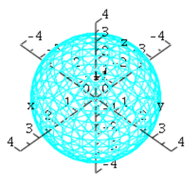


Esimerkki 3.2.2. Piirrä xyz-koordinaatistoon seuraavat pinnat:

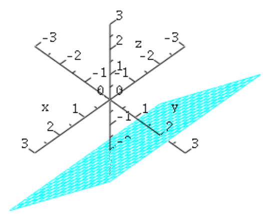
a) $x^2+y^2+z^2=6$, b) $z-y+2=0$, c) $z=2+\sqrt{x^2+y^2}$,
d) $z=-1-x^2-y^2$, e) $y^2+z^2=5$.
Mitkä eo. pinnoista ovat kahden muuttujan funktion $z=f(x,y)$ kuvaajia?

Ratkaisu:

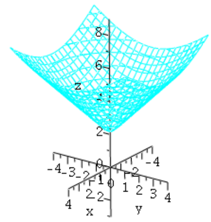
a) Pinta $x^2+y^2+z^2=(\sqrt{6})^2$ on $\sqrt{6}$-säteinen, origokeskinen pallopinta. Ei ole funktio.



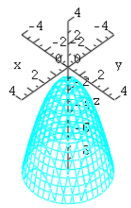
b) Pinta $z=y-2$ on taso. On funktio.



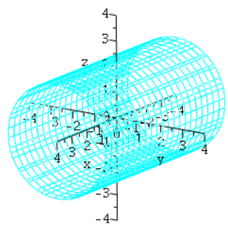
c) Pinta $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ on positiivisen z-akselin suuntaan avautuva kartiopinta, jonka huippu on pisteessä $(0, 0, 2)$. On funktio.



d) Pinta $z = -1 - x^2 - y^2$ on negatiivisen z-akselin suuntaan avautuva paraboloidipinta, jonka huippu on pisteessä $(0, 0, -1)$. On funktio.



e) Pinta $y^2 + z^2 = (\sqrt{5})^2$ on $\sqrt{5}$-säteinen lieriöpinta. Akselina x-akseli. Ei ole funktio.



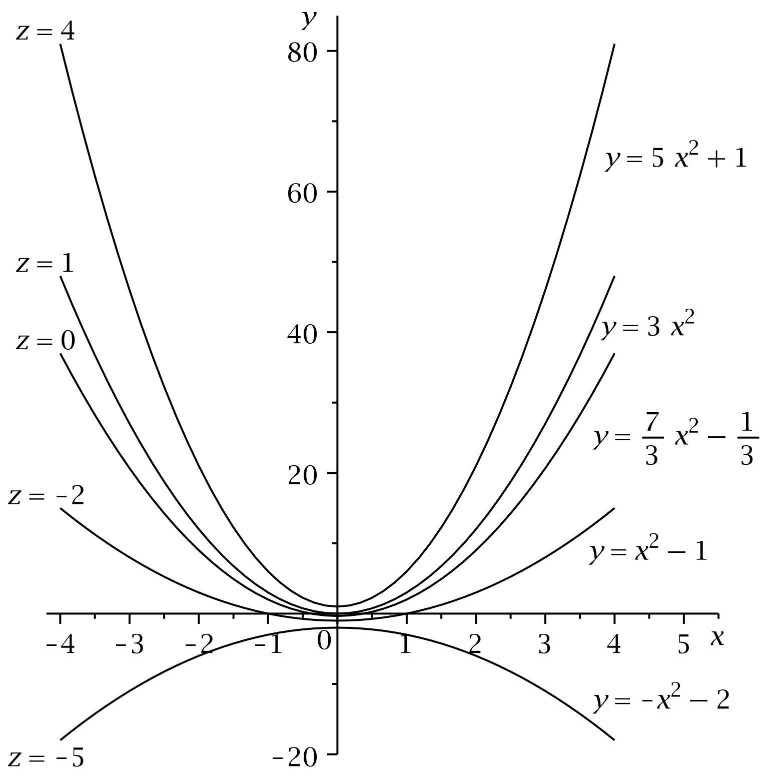
Esimerkki 3.2.3. Määrää funktion

$$z = f(x, y) = \frac{-7x^2 + 3y + 1}{2x^2 + 1}$$

arvoja $z = -5$, $z = -2$, $z = 0$, $z = 1$ ja $z = 4$ vastaavat tasa-arvokäyrät ja piirrä ne xy-koordinaatistoon.

Ratkaisu:

$$\begin{array}{llll}
f(x,y) = -5 & \dfrac{-7x^2 + 3y + 1}{2x^2 + 1} = -5 & -7x^2 + 3y + 1 = -10x^2 - 5 & y = -x^2 - 2 \\
f(x,y) = -2 & \dfrac{-7x^2 + 3y + 1}{2x^2 + 1} = -2 & -7x^2 + 3y + 1 = -4x^2 - 2 & y = x^2 - 1 \\
f(x,y) = 0 & \dfrac{-7x^2 + 3y + 1}{2x^2 + 1} = 0 & -7x^2 + 3y + 1 = 0 & y = \dfrac{7}{3}x^2 - \dfrac{1}{3} \\
f(x,y) = 1 & \dfrac{-7x^2 + 3y + 1}{2x^2 + 1} = 1 & -7x^2 + 3y + 1 = 2x^2 + 1 & y = 3x^2 \\
f(x,y) = 4 & \dfrac{-7x^2 + 3y + 1}{2x^2 + 1} = 4 & -7x^2 + 3y + 1 = 8x^2 + 4 & y = 5x^2 + 1
\end{array}$$



<u>*Esimerkki 3.2.4.*</u> Tutki, onko funktiolla

$$f(x,y) = \frac{2x^2 - xy}{4x^2 + y^2}$$

raja-arvoa origossa $(0,0)$. Valitse lähestymistieksi origon kautta kulkevat suora $y = x$ sekä paraabeli $y = x^2$.

<u>*Ratkaisu:*</u>
Valitaan aluksi lähestymistie $y = x$:

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y = x}} \frac{2x^2 - xy}{4x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - x^2}{4x^2 + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{5x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Valitaan toiseksi lähestymistieksi $y = x^2$:

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y = x^2}} \frac{2x^2 - xy}{4x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - x(x^2)}{4x^2 + (x^2)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(2 - x)}{x^2(4 + x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - x}{4 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

Koska eri lähestymisteitä pitkin saadaan eri raja-arvo, funktion f raja-arvoa ei ole olemassa origossa $(0,0)$.

Esimerkki 3.3.1. Olkoon
$$f(x,y,z) = \frac{xz}{y+z}.$$
Laske $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$ ja $f_z(x,y,z)$ sekä näytä laskemalla, että $f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z)$.

Ratkaisu: Pitämällä muuttujia y ja z vakioina saadaan
$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{xz}{y+z}) = \frac{z}{y+z}\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{z}{y+z}.$$
Pitämällä muuttujia x ja z vakioina saadaan
$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{xz}{y+z}) = xz\frac{\partial(y+z)^{-1}}{\partial y} = -\frac{xz}{(y+z)^2}.$$
Pitämällä muuttujia x ja y vakioina saadaan osamäärän derivoimissäännön nojalla
$$f_z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{xz}{y+z}) = \frac{x(y+z)-xz}{(y+z)^2} = \frac{xy}{(y+z)^2}.$$
Koska
$$f_{xy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{z}{y+z}) = z\frac{\partial(y+z)^{-1}}{\partial y} = -\frac{z}{(y+z)^2}$$
ja
$$f_{yx}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{xz}{(y+z)^2}) = -\frac{z}{(y+z)^2}\frac{\partial x}{\partial x} = -\frac{z}{(y+z)^2},$$
niin $f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z)$.

Esimerkki 3.3.2. Osoita määritelmän avulla, että funktio $f(x,y) = 3x^2 - 4y^2$ on differentioituva kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Ratkaisu: Olkoon $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mielivaltainen. Differentioituvuuden määritelmästä seuraa
$$\begin{aligned}
f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) &= 3(x+\Delta x)^2 - 4(y+\Delta y)^2 - (3x^2-4y^2) \\
&= 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 4(y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2) - 3x^2 + 4y^2 \\
&= 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4y^2 - 8y\Delta y - 4(\Delta y)^2 - 3x^2 + 4y^2 \\
&= \underbrace{6x}_{=f_x(x,y)}\ \Delta x\ \underbrace{-8y}_{=f_y(x,y)}\ \Delta y + \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\cdot\underbrace{\frac{3(\Delta x)^2 - 4(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}_{=\epsilon(\Delta x,\Delta y)}.
\end{aligned}$$
Reaalilukujen kolmioepäyhtälöstä saadaan
$$\begin{aligned}
0 \le |\epsilon(\Delta x,\Delta y)| &= \left|\frac{3(\Delta x)^2 - 4(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right| = \frac{3(\Delta x)^2 + 4(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\
&\overset{(\Delta x)^2 \le (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\le} \frac{3[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] + 4(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\
&\overset{(\Delta y)^2 \le (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\le} \frac{3[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] + 4[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\
&= 7\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.
\end{aligned}$$
Siis $0 \le |\epsilon(\Delta x,\Delta y)| \le 7\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Tästä seuraa puristuslauseen nojalla $\lim_{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0} |\epsilon(\Delta x,\Delta y)| = 0$. Koska reaaliluvun itseisarvon ominaisuudesta seuraa
$$-|\epsilon(\Delta x,\Delta y)| \le \epsilon(\Delta x,\Delta y) \le |\epsilon(\Delta x,\Delta y)|,$$
niin edelleen puristuslauseen nojalla $\lim_{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0} \epsilon(\Delta x,\Delta y) = 0$. Funktio $f(x,y) = 3x^2 - 4y^2$ on siis differentioituva kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\square$